5.2 POČÁTKY MATEMATICKÉ TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Hry v kostky

Podle archeologických nálezů se hrací kostky používaly již v době před 40 tisíci lety. Nejprve se jednalo o přírodní nepravidelné předměty, například o hlezenní kosti kopytníků (proto se dodnes říká kostka), které mohou po dopadu zaujmout jednu ze čtyř různých poloh – viz následující obrázek.

Obr. 5.7

Hrací kostku lze nalézt na egyptských malbách ze čtvrtého tisíciletí před naším letopočtem, kde je zachycena jako pomůcka v deskových hrách. Hry v kostky byly rozšířené ve starověkém Řecku a Římě, stejně jako například v Indii.

Zdá se však, že se dlouho nepočítaly relativní četnosti jednotlivých hodů; důvodem mohla být nedokonalost kostek. Zárodky kombinatoriky lze nalézt v Asii. *Bhagabati Sútra* přibližně z roku 300 před n. l. obsahuje počty kombinací a permutací k prvků z n pro $k = 1, 2, 3$. Tyto počty se využívají při řešení problémů typu „jaké podsoubory lze vytvořit z daného počtu mužů a žen“ apod. I v dalších sútrách lze nalézt kombinatorické otázky.

V Evropě se kombinatorickým úvahám věnoval biskup Wibold z Cambray, který kolem roku 965 vymyslel hru, v níž mniši házeli třemi kostkami. Každý si tak vylosoval jednu z 56 ctností přiřazených jednotlivým kombinacím, kterou musel po následujících dvacet čtyři hodin praktikovat. V předchozí části jsme viděli, že hazardní hry byly ze strany církve kritizovány a považovány za hřích; skutečnost, že uvedená hra pochází právě z církevního prostředí, proto vypadá překvapivě. Kritika se však týkala jen her o peníze.

Hody dvěma kostkami

Pro názornost začněme hody dvěma kostkami. Je zřejmé, že v takovém případě existuje celkem $6 \cdot 6 = 36$ možností, jaké počty ok se na jednotlivých kostkách mohou objevit. Každou z těchto možností můžeme vyjádřit jako uspořádanou dvojici (m, n), kde m je počet ok na první kostce a n je počet ok na druhé kostce. Všechny možné součty $k = m + n$, které se při hodu dvojicí kostek mohou objevit, jsou spolu s odpovídajícími pravděpodobnostmi p_k uvedeny v následující tabulce, z níž je zároveň patrné, že nejpravděpodobnější je součet 7.

Součet	Hodnoty na kostkách	Pravděpodobnost
2	(1,1)	1/36
3	(1,2), (2,1)	2/36
4	(1,3), (3,1), (2,2)	3/36
5	(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)	4/36
6	(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)	5/36
7	(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)	6/36
8	(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)	5/36
9	(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)	4/36
10	(4,6), (6,4), (5,5)	3/36
11	(5,6), (6,5)	2/36
12	(6,6)	1/36

Tab. 5.1

Hody třemi kostkami

Kombinatorické výsledky se objevují v básni *De vetula* (*O stařence*), jejímž autorem byl pravděpodobně Richard de Fournival (1190–1260), humanista a kancléř katedrály v Amiens. Je zde uvedena následující tabulka týkající se hodu třemi kostkami, kdy existuje celkem $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ možností, jaké počty ok se na jednotlivých kostkách mohou objevit.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Tab. 5.2

Hodnoty v prvních dvou sloupcích tabulky 5.2 značí součty, čísla ve čtvrtém sloupci, tzv. *punktuace*, udávají počet rozkladů dané hodnoty na součet tří čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a poslední sloupec uvádí počty *kadencí*, tj. počty různých hodů, které dávají příslušný součet. Podrobněji jsou tyto rozklady spolu s příslušnými pravděpodobnostmi uvedeny v tabulce 5.3.

Součet	**Rozklad**	**Součet**	**Rozklad**	**Počet možností**	**Pravděpodobnost**
3	1+1+1	18	6+6+6	1	1/216
4	1+1+2	17	6+6+5	3	3/216
5	1+1+3 1+2+2	16	6+6+4 6+5+5	3 3	6/216
6	1+1+4 1+2+3 2+2+2	15	6+6+3 6+5+4 5+5+5	3 6 1	10/216
7	1+1+5 1+2+4 1+3+3 2+2+3	14	6+6+2 6+5+3 6+4+4 5+5+4	3 6 3 3	15/216
8	1+1+6 1+2+5 1+3+4 2+2+4 2+3+3	13	6+6+1 6+5+2 6+4+3 5+5+3 5+4+4	3 6 6 3 3	21/216
9	1+2+6 1+3+5 1+4+4 2+2+5 2+3+4 3+3+3	12	6+5+1 6+4+2 6+3+3 5+5+2 5+4+3 4+4+4	6 6 3 3 6 1	25/216
10	1+3+6 1+4+5 2+2+6 2+3+5 2+4+4 3+3+4	11	6+4+1 6+3+2 5+5+1 5+4+2 5+3+3 4+4+3	6 6 3 6 3 3	27/216

Tab. 5.3

Nejnižší součet, který při hodu třemi kostkami může padnout, je 3, nejvyšší 18. V obou případech existuje jediná možnost, která k těmto součtům vede, totiž (1,1,1), popř. (6,6,6). Součet 4 lze získat celkem třemi různými způsoby: (1,1,2), (1,2,1) a (2,1,1), existují tedy tři kadence. Všechny však vycházejí z rozkladu $4 = 1+1+2$ a liší se jen tím, na které kostce padne dvojka; tvoří proto jednu punktuaci. Podobné je to se součtem $17 = 5+6+6$, kdy na jedné kostce padne pětka a na ostatních šestka. Pro součet 5 existuje celkem 6 možností, které lze rozdělit do dvou skupin: první odpovídá rozkladu $5 = 1+1+3$ a obsahuje trojice (1,1,3), (1,3,1) a (3,1,1), druhá odpovídá rozkladu $5 = 1+2+2$ a obsahuje trojice (1,2,2), (2,1,2) a (2,2,1). Stejný počet punktuací a kadencí existuje i pro součet 16.

Pro součet 6 existuje celkem 10 možností, které lze rozdělit do tří skupin odpovídajících rozkladům $6 = 1+1+4$, $6 = 1+2+3$ a $6 = 2+2+2$. V první skupině jsou opět tři trojice, a to (1,1,4), (1,4,1) a (4,1,1), v druhé skupině je šest trojic, totiž (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) a (3,2,1) (pro jedničku existují tři možnosti, na které kostce se může objevit, pro dvojku pak už zbývají jen dvě kostky na výběr a trojka se objeví na poslední zbývající kostce, celkem tedy existuje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností), a konečně v poslední skupině je samotná trojice (2,2,2).

Podobně můžeme pokračovat i dále a doplnit zbytek tabulky 5.3. Pravděpodobnost v posledním sloupci vždy získáme vydělením počtu možností pro daný součet číslem 216, tj. počtem všech existujících možností při hodu třemi kostkami.

Opakované hody kostkami

Antoine Gombaud, rytíř de Méré (1607 – 1685), který se zabýval literaturou, filosofií a matematikou a byl slavnou postavou na dvoře francouzského krále Ludvíka XIV, se bavil tím, že se s lidmi sázel, že při čtyřech hodech kostkou padne aspoň jedna šestka. Někdy byl úspěšný, jindy ne, celkově však vydělával. Své úspěchy si zdůvodnil takto: Při jednom hodu je pravděpodobnost výhry 1/6; při čtyřech hodech to tedy bude čtyřikrát více, tedy 4/6. Později se začal sázet, že při 24 hodech dvěma kostkami padne aspoň jednou dvojice šestek. Řekl si, že pravděpodobnost, že padne dvojice šestek, je 1/36; sečetl 24 těchto hodnot dohromady a získal hodnotu 24/36, o které se domníval, že je to hledaná pravděpodobnost výhry. A protože 24/36 je rovno 4/6, usoudil, že jsou pravděpodobnosti výhry v obou hrách stejné a on bude dál vydělávat. Ke svému překvapení však začal naopak prodělávat; obrátil se proto na francouzského matematika a filosofa Blaise Pascala (1623 – 1662). Ten pak o tomto problému diskutoval v korespondenci s matematikem Pierrem de Fermatem (1607 – 1665), státním úředníkem a právníkem v Toulouse. Dokážete vysvětlit, v čem udělal rytíř de Méré chybu?

Jistě jste si povšimli, že v případě hodu jednou kostkou jednoduše sečetl pravděpodobnosti výhry při prvním, druhém, třetím a čtvrtém hodu a domníval se, že tak získal výslednou pravděpodobnost výhry při čtyřech hodech. Jak ale víte, sčítat se mohou jen pravděpodobnosti jevů, které se navzájem vylučují. Při opakovaném hodu kostkou se přitom klidně může stát, že šestka padne i dvakrát, třikrát nebo dokonce čtyřikrát – a tyto možnosti jsou v uvedeném součtu započítány vícekrát. Podobně rytíř de Méré sečetl pravěpodobnosti výhry při 24 hodech dvěma kostkami.

Nejjednodušší způsob, jak vypočítat správnou hodnotu pravděpodobnosti, je následující. Uvažujme nejprve hody jednou kostkou. Pravděpodobnost, že šestka *nepadne*, je v každém hodu rovna 5/6. Při čtyřech hodech je tedy pravděpodobnost, že šestka nepadne ani jednou, rovna součinu

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \doteq 0{,}482.$$

Pravděpodobnost, že naopak aspoň jedna šestka *padne*, je potom rovna rozdílu $1-0{,}482=0{,}518$. Správná hodnota pravděpodobnosti je tedy menší než hodnota, kterou vypočítal rytíř de Méré, stále je však větší než 1/2. Při dlouhodobém hraní proto de Méré vyhrál ve více než polovině případů a celkově tak vydělával.

Podobně můžeme postupovat i případě hodu dvěma kostkami, kdy správná hodnota pravděpodobnosti, že při 24 hodech padne aspoň jednou dvojice šestek, vychází

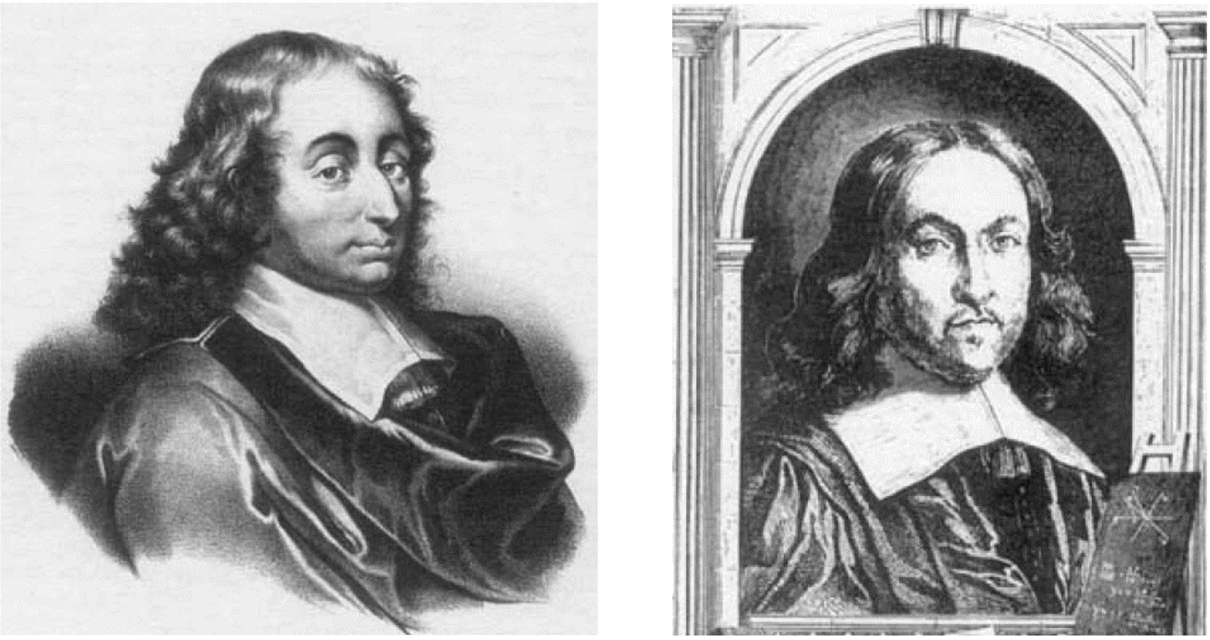
$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0{,}491.$$

Viděli jsme, že v případě čtyř hodů jednou kostkou de Méré sice uvažoval chybně, ale jeho postup náhodou fungoval, protože vedl stejně jako správný výpočet k hodnotě větší než 1/2. V případě 24 hodů čtyřmi kostkami se nesprávnost výpočtu již projevila, protože správná hodnota pravděpodobnosti je naopak menší než 1/2; z dlouhodobého hlediska proto musel de Méré prodělávat.

.

Počátek matematické teorie pravděpodobnosti

Za počátek matematické teorie pravděpodobnosti je obvykle považována zmíněná korespondence, kterou spolu vedli Blaise Pascal (viz obr. 5.7 vlevo) a Pierre de Fermat (viz obr. 5.7 vpravo) v roce 1654. Jednou z prvních úloh, které byly v této korespondenci řešeny a které motivovaly další vývoj teorie pravděpodobnosti, byla vedle úloh o hodech kostkou tzv. *úloha o rozdělení sázky*, jíž je věnována následující část.



Obr. 5.8

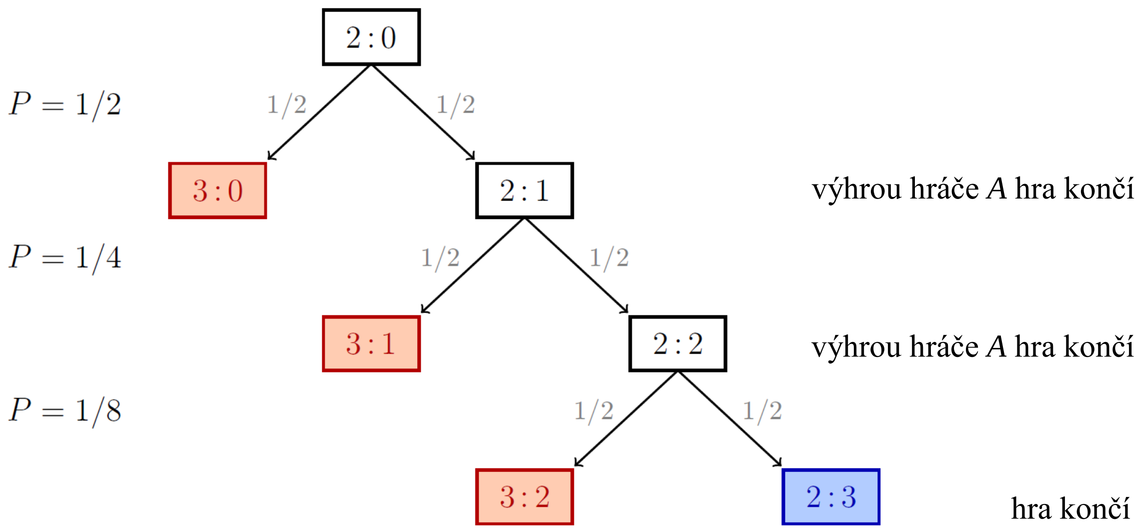
V roce 1985 však byl objeven středověký rukopis z počátku XV. století, kde jsou popsána správná řešení úlohy o rozdělení sázky, shodná s výsledky Pascala, Fermata a dalších matematiků.

Úloha o rozdělení sázky

V úloze o rozdělení sázky se jedná o následující problém. Hráči *A* a *B* hrají sérii her o určitou předem složenou částku. Jejich šance na výhru jsou v každé jednotlivé hře stejné. Na začátku se dohodnou, že budou hrát do té doby, než jeden z nich vyhraje tři hry. Za stavu 2:0 pro hráče *A* je hra přerušena. Jak má být mezi ně vsazená částka spravedlivě rozdělena?

Uveďme nejprve Fermatovo a Pascalovo řešení, které lze provést pro nízký maximální počet *N* chybějících her a dva hráče *A* a *B*, jimž chybí po řadě *m* a *n* her, kde $N = m + n - 1$. Představme si například, že hráči *A* chybí jedna hra k tomu, aby zvítězil, a hráči *B* chybí 3 hry, neboli $m = 1$, $n = 3$ a $N = 3$. Ve třech hrách jsou možné následující výsledky: *AAA* (třikrát vyhraje hráč *A*), *AAB* (dvakrát vyhraje hráč *A* a potřetí hráč *B*), *ABA*, *BAA*, *BAB*, *BBA*, *ABB* a *BBB*. Hráč *A* tedy vyhrává v sedmi z osmi případů a hráč *B* pouze v jediném – a ve stejném poměru, tj. $7{:}\,1$, by měla být rozdělena i sázka, tj. hráč *A* by měl dostat 7/8 a hráč *B* zbývající 1/8. Ve skutečnosti by se ovšem hrály pouze posloupnosti her *A*, *BA*, *BBA* a *BBB*; započtení ostatních zohledňuje požadavek, aby všechny tyto soubory her byly stejně „pravděpodobné“. Skutečně, každá ze započtených osmi her má pravděpodobnost $1/8 = 2^{-3}$.

Jiné řešení uvažuje jen reálně hrané hry *A*, *BA*, *BBA* a *BBB*, jejichž pravděpodobnosti jsou po řadě $1/2$, $1/4$, $1/8$ a $1/8$. Hráč *B* vyhrává jen v poslední z nich; dělení sázky je proto opět v poměru $7{:}\,1$ – viz následující obrázek.



Obr. 5.9

Vraťme se ještě k předchozímu řešení, které uvažovalo všechny možné trojice her. Viděli jsme, že v jednom případě vyhraje třikrát hráč *A*, ve třech případech vyhraje dvakrát hráč *A* a jednou hráč *B*, ve třech případech vyhraje jednou hráč *A* a dvakrát hráč *B* a konečně v jednom případě vyhraje třikrát hráč *B*. Podobně můžeme uvažovat případ, kdy hráči *A* chybí jedna hra a hráči *B* dvě hry, neboli $m = 1$, $n = 2$, $N = 2$. Potom existují následující možnosti: *AA*, *AB*, *BA* a *BB*, tj. v jednom případě vyhraje dvakrát hráč *A*, ve dvou případech vyhraje jednou hráč *A* a jednou hráč *B* a v jednom případě vyhraje dvakrát hráč *B*.

Podíváme-li se pozorněji na uvedené počty případů pro $N = 2$ a $N = 3$, jistě nám připomenou koeficienty u jednotlivých členů, rozepíšeme-li mocniny $(a + b)^2$ a $(a + b)^3$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Přidejme na začátek ještě samotný výraz $(a + b)$ a rozepišme koeficienty u jednotlivých členů:

$$\begin{array}{c} a + b \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\longleftarrow n \longrightarrow} & \multicolumn{2}{c}{\leftarrow m \rightarrow} \end{array}$$

Všimněme si, že každé číslo v určitém řádku je vždy součtem čísel, která jsou v předchozím řádku nad ním. V rozepisování můžeme pokračovat dále – viz obr. 5.10 vpravo. Získáme tak Pascalův trojúhelník, který se již dříve objevil ve staré Číně a Indii; Pascal sám jej však zapisoval tak, že jedna odvěsna byla svislá – viz obr. 5.10 vlevo:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & & \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & & & \\ 1 & 5 & 15 & 35 & & & & \\ 1 & 6 & 21 & & & & & \\ 1 & 7 & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

Obr. 5.10

V Pascalově trojúhelníku vidíme jednak koeficienty u jednotlivých členů v binomickém rozvoji[1], jednak i řešení různých konkrétních zadání úlohy o rozdělení sázky. Již víme, že

[1] Připomeňme, že obecně platí:

$$(a + b)^k = (a + b)(a + b) \cdots (a + b)$$

$$= a^k + ka^{k-1}b + \binom{k}{2} a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{i} a^{k-i}b^i + \cdots + kab^{k-1} + b^k$$

$$= \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{i} a^{k-i}b^i + \cdots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k,$$

kde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}, \quad \binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}.$$

v případě, kdy hráčům chybí do výhry m (hráči A) a n (hráči B) bodů, je celkový počet nutných her maximálně $m + n - 1$. V trojúhelníku najdeme řádek (v Pascalově orientaci diagonálu) s počtem $m + n$ čísel a sečteme v něm m a n po sobě jdoucích čísel. Poměr dělení sázky je pak roven poměru těchto součtů. Výše uvedený případ $N = 3,\ m = 1,\ n = 3$ tak najdeme na čtvrtém řádku.

Obecně lze poměr dělení sázky, tj. podíl hráče A ku podílu hráče B vyjádřit ve tvaru[2]

$$p_{A:B} = \frac{\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{n}}{\binom{N}{n+1} + \binom{N}{n+2} + \cdots + \binom{N}{N}} = \frac{\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{n}}{\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{m}}, \qquad N = m + n - 1.$$

V dopise z 29. června 1654 nastiňuje Pascal ještě jiný přístup. Začíná úvahou o situaci, kdy k vítězství jsou nutné nejvýše 2 hry, tj. stav $m = 1,\ n = 2$ a hra už dále nebude pokračovat. Pak uvažuje takto: kdyby vyhrál hráč A, připadla by mu celá sázka, v opačném případě se budou hráči dělit napůl. Polovina sázky je tedy hráče A v každém případě a druhou polovinu si rozdělí napůl. Hráč A by měl proto dostat polovinu plus čtvrtinu sázky, tj. tři čtvrtiny sázky, a hráč B jen jednu čtvrtinu. Dělení je proto v poměru 3:1. Případ $m = 1,\ n = 3$ Pascal řeší podobně; kdyby hráč A vyhrál, byla by celá sázka jeho, jinak by se hrálo dál o její polovinu: to by však byl předchozí případ s $m = 1,\ n = 2$ a dělením v poměru 3:1. První hráč by tedy měl dostat polovinu plus tři čtvrtiny ze zbývající poloviny sázky, tj. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ sázky, a druhý jen $\frac{1}{8}$ sázky, což opět dává výsledné dělení v poměru 7:1.

Úloha o rozdělení sázky – starší formulace a pokusy o řešení

Úloha o rozdělení sázky byla známá již dávno před Fermatem a Pascalem. V různých obměnách ji můžeme najít v řadě spisů z 15. až 17. století. Například v rukopisu *Codice*, sepsaném kolem roku 1490, uvažuje Filippo Calandri následující příklady:

1. Dva muži hrají míčovou hru *jeu de paume* (předchůdkyně tenisu s hracím pokynem *tennez!*) na šest vítězných setů a přeruší ji za stavu 4:3.
2. Tři muži střílejí lukem na terč. Vítězí ten, kdo jako první dosáhne tří úspěšných tref. Za stavu 2:1:0 se jim však zlomí luk a nemohou pokračovat dále.

V obou úlohách se předpokládá, že schopnosti obou hráčů jsou vyrovnané a o vítězi v jednotlivých hrách rozhoduje náhoda. Řešení obou úloh jsou nesprávná; Calandri sázku rozděluje nepřímo úměrně počtu bodů, které hráčům chybí k vítězství.

Nesprávné je také například řešení, které popsal Luca Pacioli a které spočívá v tom, že se sázka rozdělí ve stejném poměru, v jakém jsou dosud získané body jednotlivých hráčů – v pozadí tedy není žádná kombinatorika ani pravděpodobnost. V knize *Summa de Arithmetica* z roku 1494 Pacioli uvažuje míčovou hru na 60 vítězných bodů, která je přerušena za stavu 50 : 20, a lukostřelecké závody na šest vítězství, které jsou přerušeny za stavu 4 : 3 : 2.

---

[2] Při úpravě jmenovatele jsme využili vztah $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$ a obrátili jsme pořadí sčítanců.

Lorenzo Forestani se pak v práci *Practica d'Arithmetica* z roku 1603 zabýval následujícími příklady:

1. Šlechtic si pozve dva mládence, aby mu pro zábavu za odměnu zahráli míčovou hru na osm vítězství; za stavu 5:3 však ztratí míč a je třeba vhodně rozdělit odměnu.
2. Tři vojáci hrají o nalezený peníz hru na 14 vítězství a k přerušení dojde za stavu $10:8:5$.

Ani jeho řešení však není správné: rovněž vychází z počtu dosud získaných bodů, část navíc Forestani dělí rovným dílem, aby zohlednil vliv náhody.

Jak jsme se již zmínili v úvodu, dlouho se předpokládalo, že první správné řešení úlohy o rozdělení sázky je obsaženo až ve zmíněné korespondenci Fermata s Pascalem z poloviny 17. století. V roce 1985 však Laura Toti Rigatelli nalezla v Národní knihovně ve Florencii rukopis *Codice Magliabechiano CL.XI.120*, napsaný kolem roku 1420, kde je popsáno správné řešení úlohy o rozdělení sázky pro dva hráče, z nichž jednomu chybí k vítězství jedna a druhému tři vyhrané hry (tj. pro případ $N = 3$, $m = 1$, $n = 3$). Velké překvapení vyvolal také rukopisný nález ve Vatikánské apoštolské knihovně, který se podařil Raffaelle Franci, jež o něm referovala ve dvou článcích z roku 2002. V tomto středověkém spisu je kromě jiného úspěšně vyřešen problém rozdělení sázky mezi tři hráče v případech, kdy jednomu hráči chybí jedna nebo dvě hry, druhému jedna, dvě nebo tři a třetímu dvě nebo tři hry.

Úloha o rozdělení sázky vychází z problematiky dělení podílu při jednostranném porušení dohody, rozvíjené a předávané italskými učiteli „komerční aritmetiky“ ve 13. a 14. století. Bohužel, později tyto spisy upadly v zapomnění dokonce i v Itálii. V druhé polovině 15. a v první polovině 16. století se tak řada matematiků pokoušela o řešení úlohy znovu a neúspěšně; kromě dříve zmíněných například Niccolo Fontana zvaný Tartaglia (1499–1557), Giovanni Francesco Peverone (1509–1559) či Girolamo Cardano (1501–1576).

Skutečnost, že některé výsledky, k nimž dospěli Pascal, Fermat a později také Christian Huygens (1629–1695), lze nalézt již o více než dvě století dříve, však nikterak nesnižuje význam těchto osobností pro formování teorie pravděpodobnosti. Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleae* (*O uvažování v hazardních hrách*) z roku 1657 byl první tištěnou prací v této oblasti a základní publikací zůstal po dobu více než padesáti let. Potom se stal součástí dalšího slavného spisu: byl přetištěn v první části knihy *Ars conjectandi* (*Nauka o domněnce*) Jacoba Bernoulliho (1654–1705), který jej opatřil podrobným komentářem, přibližně čtyřikrát rozsáhlejším než původní text, v němž na mnoha místech vylepšil, doplnil či zobecnil Huygensovy myšlenky a podal nová řešení různých problémů.

Zájemci o podrobnější pohled do historie naleznou více informací například v knize K. Mačáka: *Počátky počtu pravděpodobnosti* (Prometheus, Praha, 1997), která je spolu s dalšími monografiemi věnovanými historii matematiky přístupná na webových stránkách http://www.dml.cz/ (pod odkazem *Dějiny matematiky*).