Geometrie III (2022)

Roman Hašek

October 2022

1 Úvod

Předmět *Geometrie III* je zaměřen převážně do oblasti *deskriptivní geometrie*. *Deskriptivní geometrie* se věnuje metodám dvojrozměrného znázornění trojrozměrných objektů a zkoumání jejich geometrických vztahů prostřednictvím tohoto znázornění.

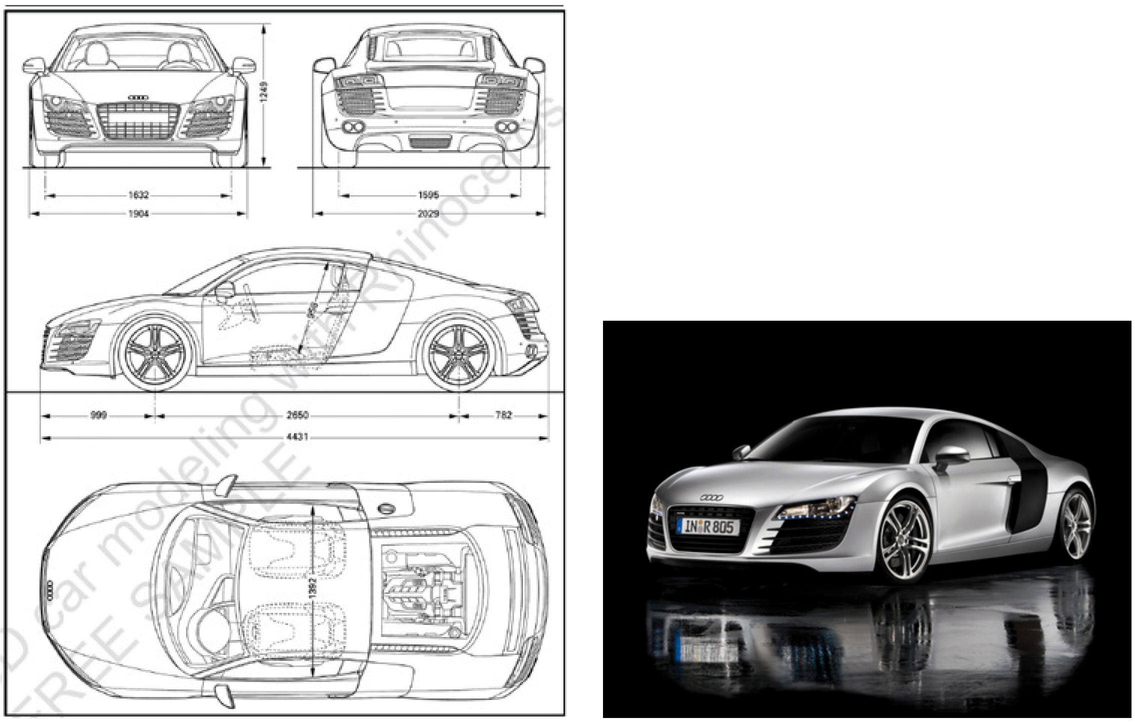


Figure 1: Audi R8 (*www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf*)

Významnou roli při formování základů deskriptivní geometrie hrál francouzský geometr *Gaspard Monge*. Často je nazýván *otcem deskriptivní geometrie*. Název této geometrické disciplíny vzešel z jeho určující publikace *Géométrie Descriptive* vydané v roce 1799.

Gaspard Monge začal pro zobrazení trojrozměrných objektů systematicky využívat sdružení jejich dvou kolmých průmětů, metodu, která začala být nazývána *Mongeova projekce*. Jedná se jenom o jednu, i když notně významnou, metodu pro zobrazení trojrozměrných útvarů do roviny. Zde jsou některé z těch, které se používají v technické praxi:

– *kótované promítání*; rovnoběžné promítání kolmo na jednu průmětnu (*půdorysnu*), viz Obr. 2,

– *Mongeovo promítání*; útvar je promítnut dvěma rovnoběžnými promítáními na dvě vzájemně kolmé průmětny (*nárysnu* a *půdorysnu*), viz Obr. 3,

– *kosoúhlé promítání*; rovnoběžné promítání ve směru kosém na jednu průmětnu, která je totožná s jednou ze souřadnicových rovin, speciálním případem kosoúhlého promítání je *volné rovnoběžné promítání*, viz Obr. 4,

– *axonometrie*; rovnoběžné promítání na rovinu obecně umístěnou vzhledem k souřadnicovým osám, pokud je směr promítání kolmý, hovoříme o *pravoúhlé axonometrii*, viz Obr. 4,

– *perspektiva*; středové promítání, odpovídá našemu zrakovému vjemu, existuje více druhů perspektivy, viz Obr. 4.

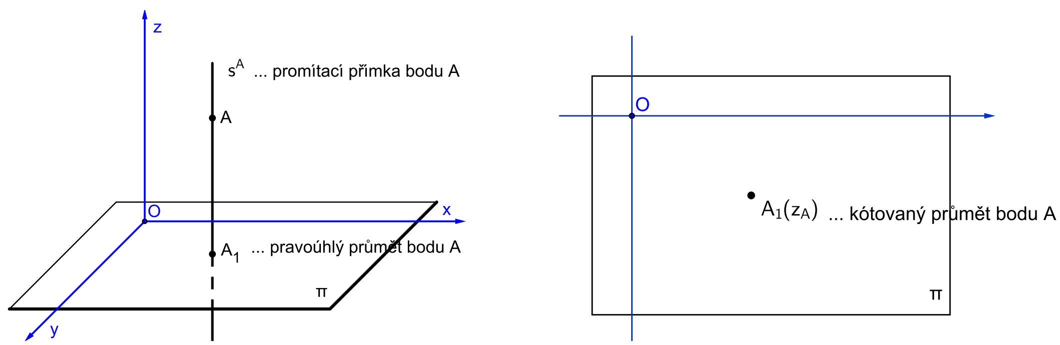


Figure 2: Kótované promítání – zobrazení bodu

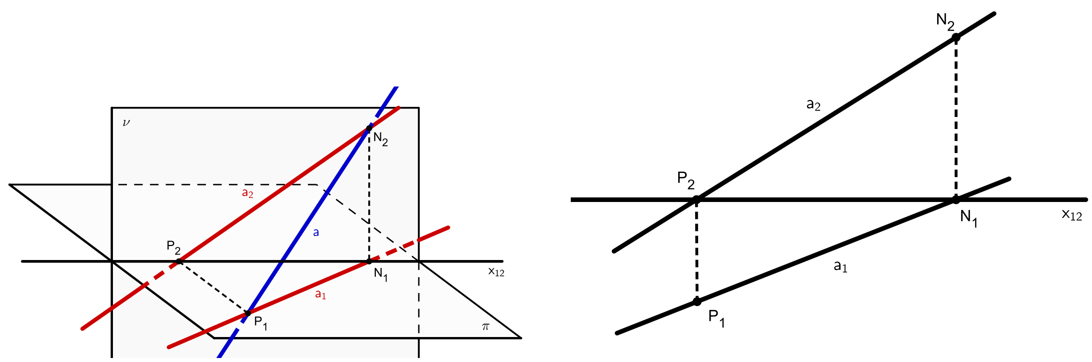


Figure 3: Mongeovo promítání – zobrazení přímky

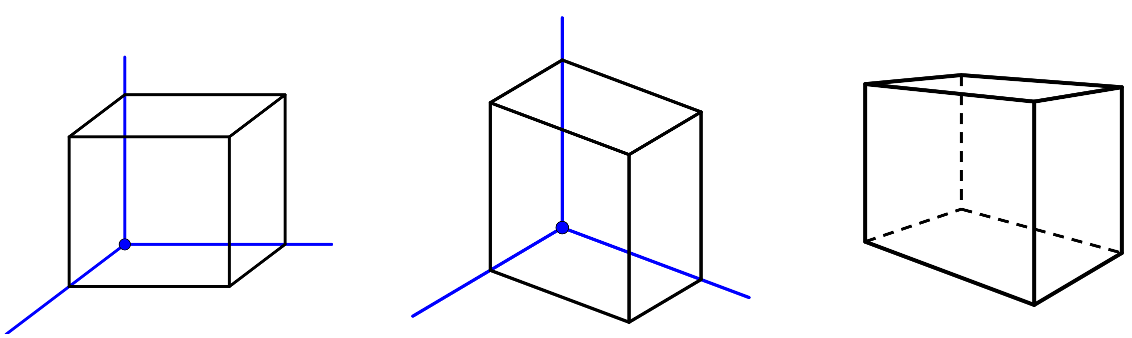


Figure 4: Kosoúhlé promítání (vlevo), pravoúhlá axonometrie (uprostřed), perspektiva (vpravo)

2 Eukleidovský trojrozměrný prostor. Souřadnice bodu.

Pojem *eukleidovský* (též *euklidovský*) bodový prostor byl zaveden a náležitě pojednán v předmětu *Geometrie I* (KMA/7G1). Zde si pouze připomeneme příslušnou definici a uvedeme její alternativní formulaci.

Eukleidovský prostor představuje ideální geometrický model prostoru, který nás obklopuje. Je to prostor školní geometrie, dvojrozměrný (*planimetrie*) a trojrozměrný (*stereometrie*), postupem času zobecněný na n rozměrný.

Pojmenován po *Eukleidovi z Alexandrie*, starověkém řeckém matematikovi, který geometrii trojrozměrného prostoru a tělesům, která jsou v něm usazena, věnoval poslední tři knihy ze svého třináctidílného díla *Základy*. Kompletní český překlad tohoto díla provedený Františkem Servítem v roce 1907 je volně dostupný na adrese `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf`.

Výchozím pojmem zavedení *Eukleidovského prostoru* pro nás byl *afinní bodový prostor*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 126. Použitá definice afinního bodového prostoru nám dovolila zavést *afinní soustavu souřadnic* (též nazývanou *repér*).

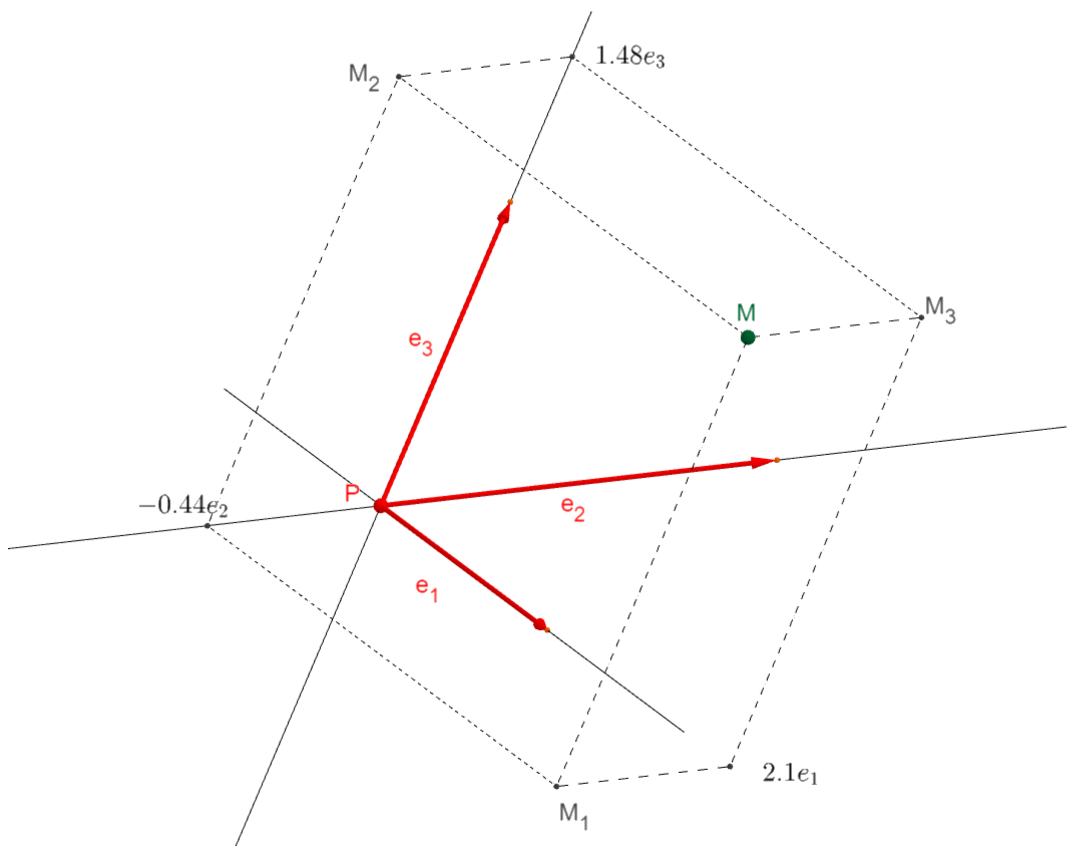


Figure 5: Afinní soustava souřadnic $\varphi = \{P, e_1, e_2, e_3\}$

Abychom soustavu souřadnic v trojrozměrném prostoru, jejíž příklad je na Obr. 5, mohli nazvat *afinní*, stačí, aby splňovala jediný požadavek, aby vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ neležely v jedné rovině. Ekvivalentní podmínkou je požadavek, aby v jedné rovině neležel bod P spolu s koncovými body vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (tyto body ovšem nejsou v obrázku popsány). Zavedení pojmu *afinní* do geometrie je připisováno švýcarskému matematikovi *Leonardu Eulerovi*. *Afinní zobrazení* můžeme stručně charakterizovat jako zobrazení, které přímku zobrazuje opět na přímku nebo na bod, a které střed dvojice bodů–vzorů zobrazí zase na střed odpovídající dvojice bodů–obrazů (přesněji řečeno, zachovává dělící poměr, viz (Hašek: PLA 2020), str. 15). *Afinní geometrií* potom rozumíme geometrii, která zkoumá takové vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich afinních zobrazeních.

Afinní soustavu souřadnic nazýváme:

– *kosoúhlou*, pokud alespoň dvě její souřadnicové osy (tj. jejich směrové vektory) nejsou navzájem kolmé, viz Obr. 5,

– *pravoúhlou* (*ortogonální*), pokud každé dvě její osy (tj. jejich směrové vektory) jsou navzájem kolmé,

– *kartézskou* (*ortonormální*), pokud každé dvě její osy jsou navzájem kolmé (tj. jsou ortogonální) a zároveň jsou jednotky na všech těchto osách stejné.

Ve školní matematice pracujeme s *kartézskou soustavou souřadnic*. Je pojmenována po francouzském matematikovi a filosofovi *René Descartovi*, který se systematickým zavedením metody práce se souřadnicemi bodů v prostoru zasloužil o vznik *analytické geometrie* (tj. analytické metody v geometrii).

Již tedy umíme přiřadit každému bodu prostoru jeho souřadnice, tj. v případě trojrozměrného prostoru uspořádanou trojici reálných čísel. To nám dovoluje zkoumat vzájemné polohy geometrických útvarů v prostoru. Nestačí to ale k určování jejich vzdáleností a odchylek. To nám dovoluje až zavedení *skalárního součinu* na *zaměření* bodového prostoru (zjednodušeně můžeme zaměření charakterizovat jako vektorový prostor všech směrů možných v daném bodovém prostoru).

Jak je uvedeno v (Hašek: LAG 2020) na str. 166:

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy norma vektoru a odchylka vektorů. Ty … využijeme k zavedení pojmů vzdálenost bodů, vzdálenost podprostorů, odchylka podprostorů. Vektorový a vnější součin potom … využijeme k výpočtu obsahů a objemů …

Detailní pojednání pojmu *skalární součin*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 58.

Pojem *eukleidovský prostor* můžeme však zavést i axiomaticky, bez použití vektorového prostoru, jak ilustruje definice uvedená ve *Slovníku školské matematiky* (zprac. česká terminologická komise pro matematiku JČMF, Praha: SPN, 1981):

Euklidovský prostor (n-rozměrný) - množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, přičemž pro každou dvojici $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *je definována vzdálenost d předpisem*

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Například, zavedeme-li v rovině (resp. v trojrozměrném prostoru) kartézskou soustavu souřadnic, dostaneme dvojrozměrný (resp. trojrozměrný) euklidovský prostor, v němž se vzdálenost d shoduje s obvyklou vzdáleností bodů.

Poznámka: Obvyklou vzdáleností bodů můžeme rozumět vzdálenost spočítanou použitím Pythagorovy věty.

Existují i jiné soustavy souřadnic, než jsou kartézské nebo kosoúhlé. Jaké znáte?

Sférické souřadnice, viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

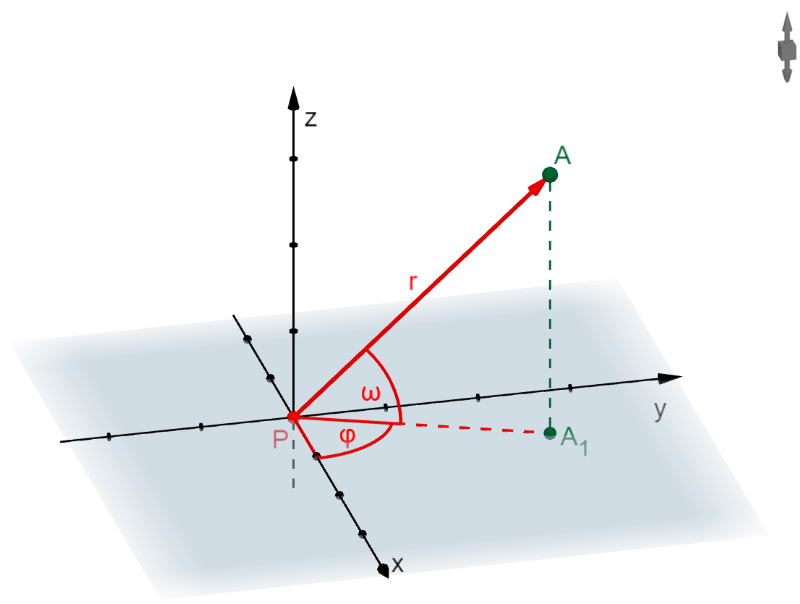


Figure 6: Sférické souřadnice (r, φ, ω)

Cylindrické souřadnice, viz Wikipedia: Cylindrical Coordinate System.

Příklad 2.1. *Využijte princip sférických souřadnic k odvození parametrických rovnic kulové plochy a k jejímu zobrazení v GeoGebře.*

Řešení: Použijeme sférické souřadnice (r, φ, ω) zavedené dle Obr. 6, které se mírně liší od jejich zavedenějšího pojetí (místo našeho úhlu ω se používá $\theta = \pi/2 - \omega$),viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

Potom pro parametrické rovnice kulové plochy platí:

$$x(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos\omega \cdot \cos\varphi, \tag{1}$$
$$y(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos\omega \cdot \sin\varphi, \tag{2}$$
$$z(r, \varphi, \omega) = r \cdot \sin\omega;\ r \geq 0, \varphi \in \langle 0; \pi), \omega \in \langle 0, 2\pi). \tag{3}$$

Po zavedení posuvníku pro hodnoty r a po zadání příkazu `Plocha(`$r \cdot \cos\omega \cdot \cos\varphi$`,` $r{\cdot}\cos\omega{\cdot}\sin\varphi$`,` $r{\cdot}\sin\omega$`,` φ`, 0,` π`,` ω`, 0,` 2π`)` získáme graf kulové plochy zachycený na Obr. 7. Měníme-li posuvníkem hodnotu r, mění se velikost (poloměr) kulové plochy.

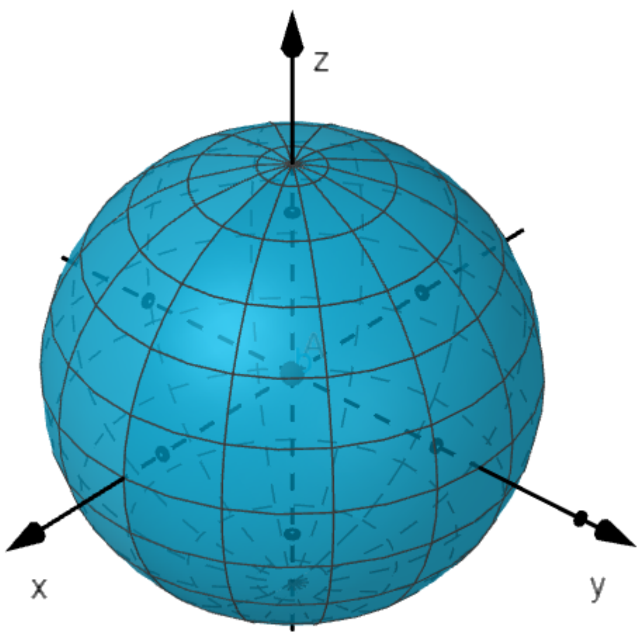


Figure 7: Kulová plocha

Rovinnou analogií sférických souřadnic jsou *polární souřadnice*. Mohou sloužit jako jednodušší předstupeň pro pochopení sférických souřadnic a rovnice pro jejich převedení na kartézské souřadnice, viz (1), (2), (3).

Polární souřadnice (r, φ) bodu X v rovině si zavedeme dle Obr. 8. Polární soustava souřadnic je určena *pólem* P a *polární osou* p. Obrázek nabízí jednoduchý přechod od polárních souřadnic $X = (r, \varphi)$ k souřadnicím kartézským $X = [x; y]$. Pokud ztotožníme pól P s počátkem kartézské soustavy souřadnic a polární osu p s kladnou poloosou x, lze pro bod X psát:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \tag{4}$$

$$y = r \cdot \sin \varphi. \tag{5}$$

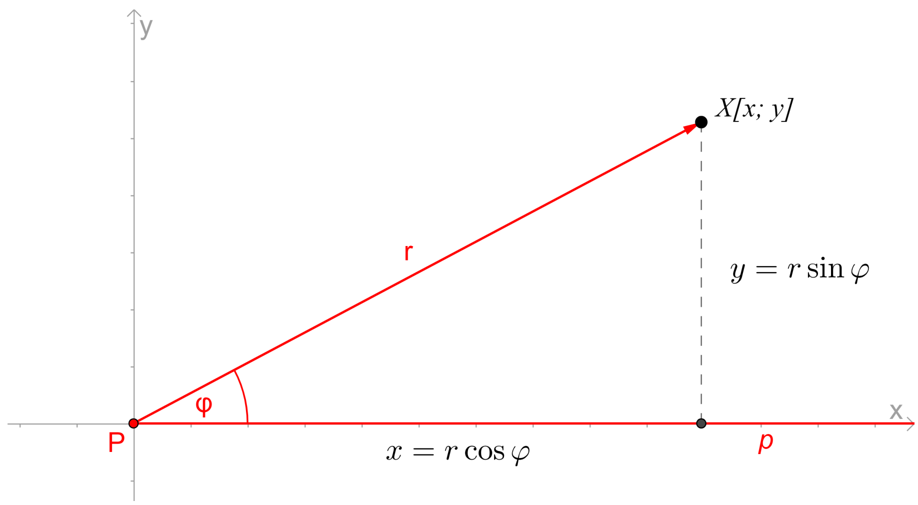


Figure 8: Polární souřadnice

Příklad 2.2. *Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = 5$. Napište rovnici této kružnice v polárních souřadnicích.*

3 Základní geometrická tělesa

Tělesem v geometrii rozumíme uzavřenou omezenou oblast v prostoru. Hranicí tělesa bývá plocha. [1]

Tělesa můžeme rozdělit na *konvexní* a *nekonvexní* [2]. Připomeňme si, že pro *konvexní* útvar platí, že úsečka spojující libovolné dva jeho body náleží celá tomuto útvaru. Naproti tomu pro *nekonvexní* útvar platí, že v něm existují takové dva body, že úsečka jimi určená neleží celá v tomto útvaru.

Tělesa můžeme rozdělit na *mnohostěny* a na *oblá* tělesa [2].

Mnohostěny jsou tělesa, jehož povrch tvoří *mnohoúhelníky*. Tyto mnohostěny tvoří *stěny* mnohostěnu. Společné strany sousedních stěn nazýváme *hrany*. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$s + v = h + 2,$$

kde s je počet jeho stěn, v počet jeho vrcholů a h je počet jeho hran.

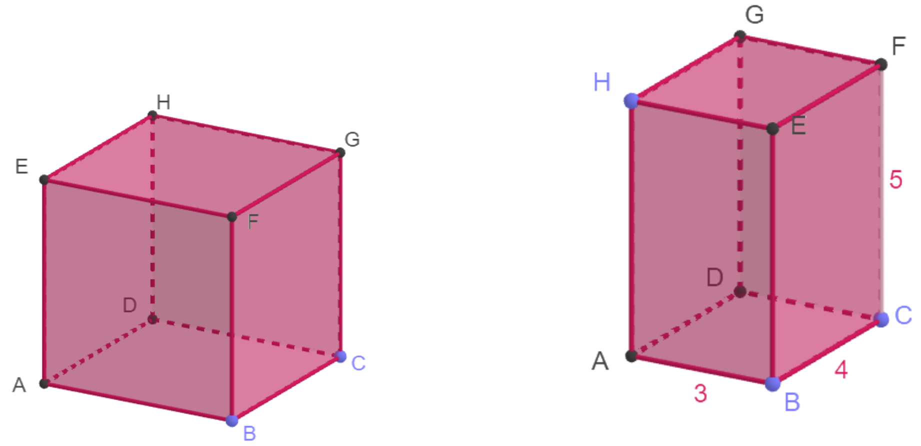
Vybranými mnohostěny, s kterými se budeme postupně seznamovat, jsou:

- krychle, kvádr, rovnoběžnostěn,
- hranoly,
- jehlany,
- pravidelné mnohostěny (zvané též *Platónská tělesa*),
- polopravidelné mnohostěny (konkrétně *Archimédovská tělesa*).

Z oblých těles nás budou zajímat především rotační tělesa:

- válec,
- kužel,
- koule,
- anuloid (též *torus*).

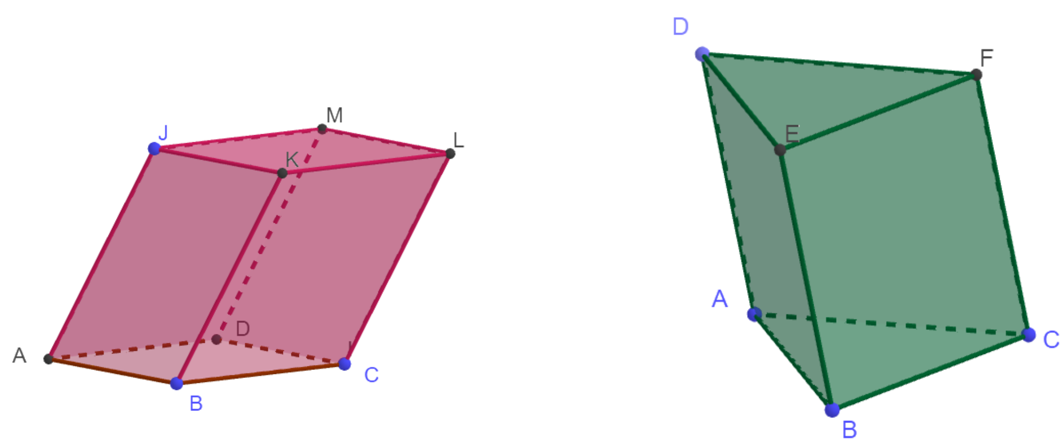
ÚKOL: Zabývejte se tvorbou fyzických i digitálních modelů výše uvedených těles.



`Krychle(A,B,C)` `Hranol(A,B,C,D,H)`

Figure 9: GeoGebra: Krychle a kvádr

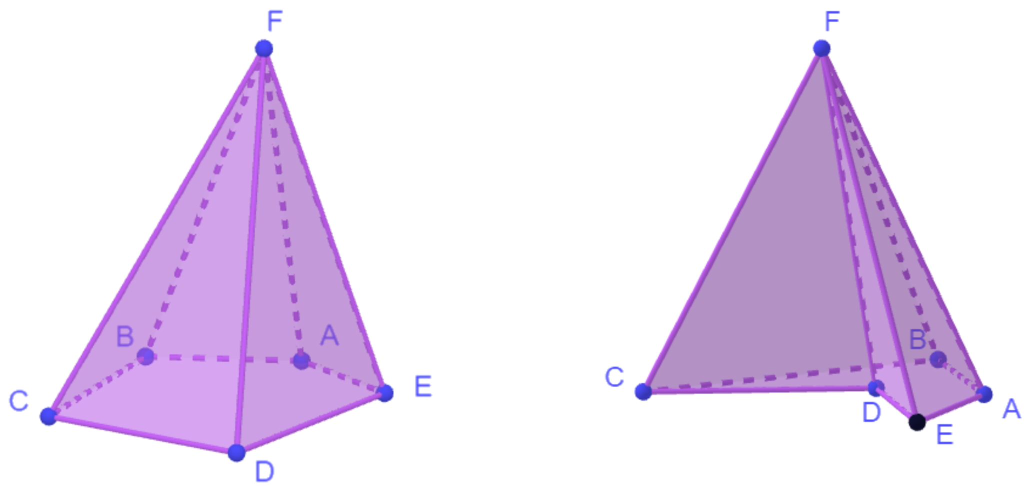
Příklad 3.1. *Pro vykreslení krychle v prostředí Grafický náhled 3D programu GeoGebra stačí příkazu* `Krychle(A,B,C)` *zadat první dva body A, B, třetí bod C si program "domyslí". Přijdete na to, jak? Jaké kritérium takový bod C splňuje?*



`Hranol(podstava,J)` `Hranol(A,B,C,D,H)`

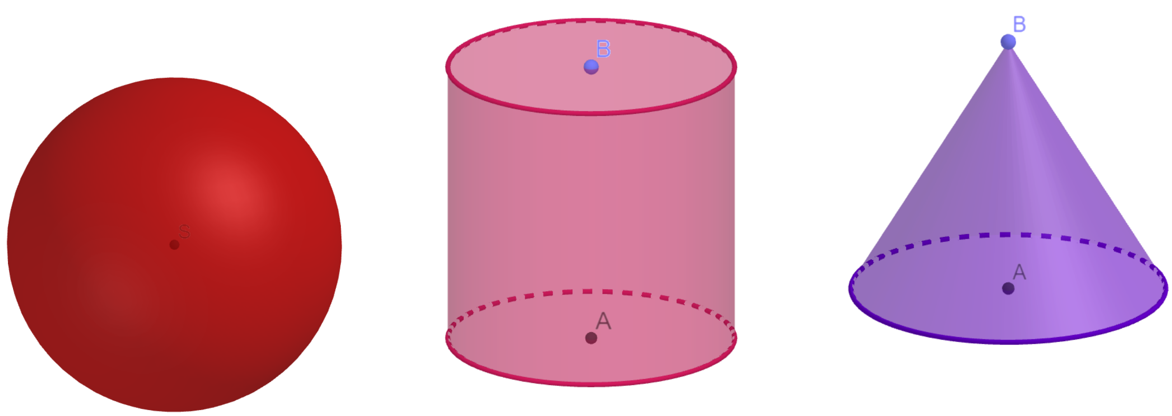
Figure 10: GeoGebra: Rovnoběžnostěn a kosý trojboký hranol

Příklad 3.2. *Sestrojte v GeoGebře dva kolmé pětiboké hranoly, jeden konvexní a druhý nekonvexní.*



`Jehlan(podstava,F)` `Jehlan(podstava,F)`

Figure 11: GeoGebra: Jehlan konvexní a jehlan nekonvexní



`Koule(Bod,Bod)` `Valec(A,B,2)` `Kuzel(A,B,3)`

Figure 12: GeoGebra: Koule, válec a kužel

Příklad 3.3. *Každé z uvedených těles zobrazte v programu GeoGebra. Alespoň pro vybraná z nich potom využijte možnost programu měnit metodu promítání (axonometrie, perspektiva, kosoúhlé promítání) a směr pohledu na zobrazovaný objekt (půdorys, nárys a bokorys) a všemi těmito způsoby si je zobrazte. Pokuste se popsat některé zjevné odlišnosti v zobrazení téhož tělesa různými metodami.*

4 Zobrazení útvarů trojrozměrného prostoru. Promítání.

Promítání (též *projekce*) je zobrazení trojrozměrného prostoru na danou plochu, rovinu, kulovou plochu, válcovou plochu apod. V deskriptivní geometrii uvažujeme vesměs promítání trojrozměrného prostoru na rovinu.

S termínem *promítání*, ve spojení s určitým přívlastkem, se setkáme v označení některých zobrazovacích metod, viz např. *Mongeovo promítání*, *kosoúhlé promítání*, *kótované promítání*, i když se jedná o kombinaci několika promítání. [1]

4.1 Středové a rovnoběžné promítání

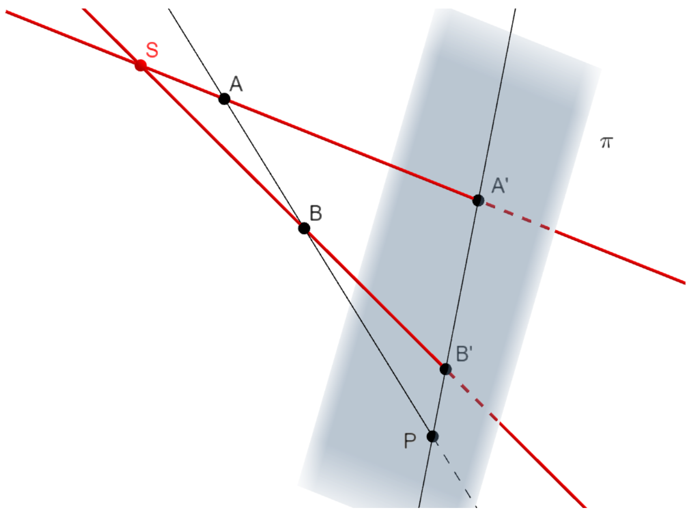


Figure 13: Středové promítání dané středem S a průmětnou π

Středové promítání dané *středem (promítání)* S a *průmětnou* π je zobrazení, které libovolnému bodu A prostoru (s výjimkou samotného bodu S) přiřadí jeho obraz A' jako průsečík přímky SA s rovinou π, viz Obr. 13. Bod A' se nazývá *středový průmět* bodu A, přímka SA se nazývá *promítací přímka bodu* A (též říkáme *promítací paprsek bodu* A).

Rovnoběžné promítání dané *směrem (promítání)* $\vec{s}$ a *průmětnou* π. Pokud je střed promítání S "nekonečně daleko" (hovoříme o tzv. *nevlastních bodech* v *rozšířeném eukleidovském prostoru*, viz později) promítací přímky různých bodů prostoru se stanou rovnoběžné, viz Obr. 14. Hovoříme potom o *rovnoběžném (paralelním) promítání* určeném *směrem promítání* $\vec{s}$ a průmětnou π.

Průmětem útvaru nazýváme množinu průmětů všech jeho bodů, viz Obr. 16, jeho *promítacím útvarem* nazýváme útvar, který vyplní promítací přímky všech bodů útvaru. Promítacím útvarem přímky je *promítací rovina*, viz Obr. 15. Průsečík

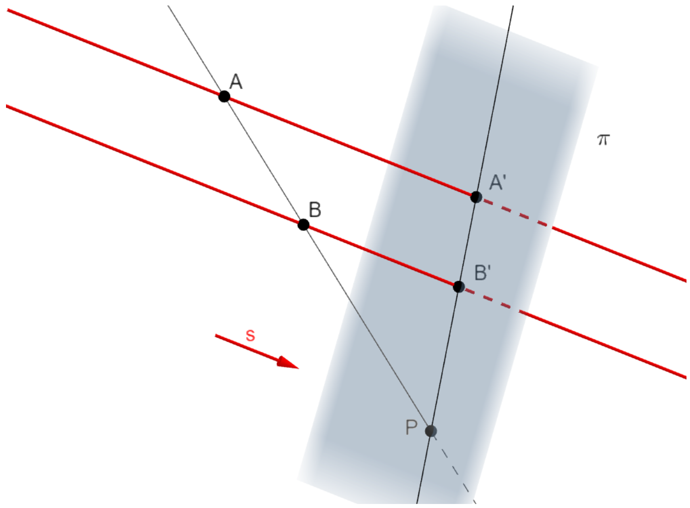


Figure 14: Rovnoběžné promítání dané směrem $\vec{s}$ a průmětnou π

přímky s průmětnou nazýváme *stopník přímky*, viz Obr. 13, 14 nebo 15, kde je zobrazen stopník P přímky $\leftrightarrow AB$.

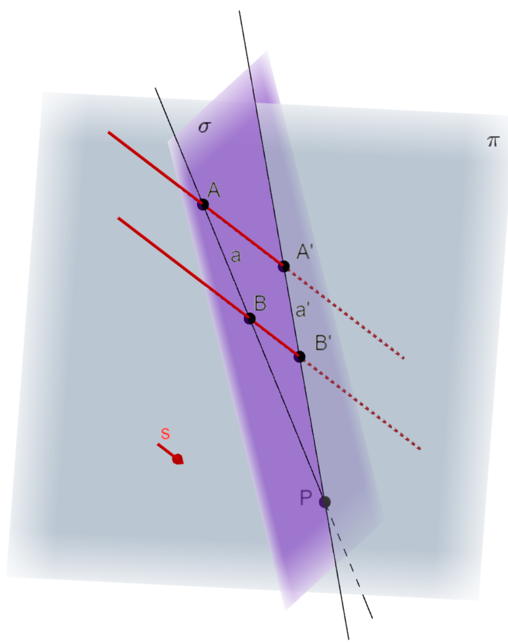


Figure 15: Promítací rovina σ přímky a při rovnoběžném promítání

K výrazům průmět, promítací přímka, apod. se často přidává přívlastek určující druh promítání nebo název průmětny – kosoúhlý průmět, půdorysně promítací přímka.

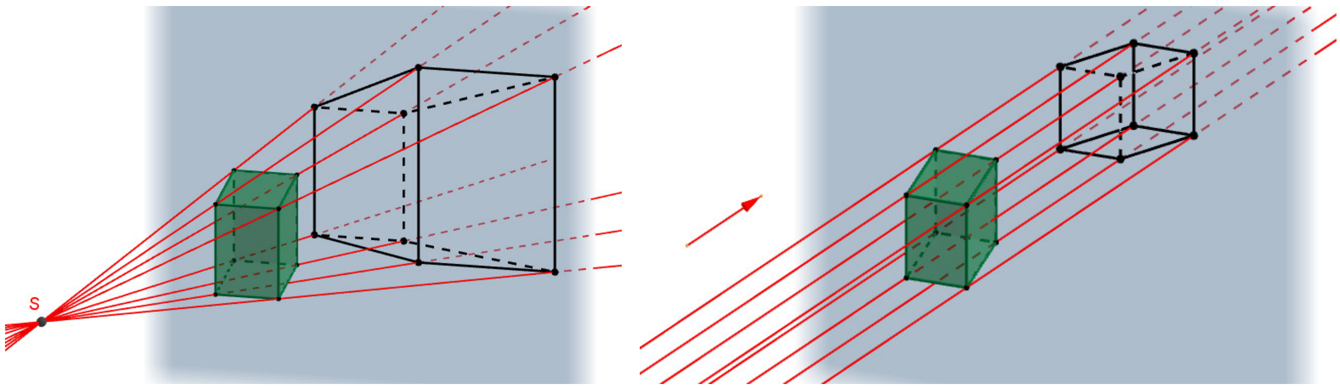


Figure 16: Průmět kvádru ve středovém (vlevo) a rovnoběžném (vpravo) promítání do roviny

4.2 Invarianty středového a rovnoběžného promítání

Příklad 4.1. *U geometrických zobrazení nás zajímají vlastnosti a charakteristiky, které se při nich zachovávají, tj. platí jak pro vzor, tak i pro jeho obraz, říkáme jeim invarianty daného zobrazení. Známe například tvrzení, že se při určitém zobrazení "zachovává incidence". Zjistěte experimentálně, zda se u rovnoběžného a středového promítání zachovává střed úsečky. Své závěry se pokuste dokázat.*

Experimentální řešení příkladu 4.1 můžeme provést v programu GeoGebra, viz Obr. 17 a 18. Využijeme při tom funkci *Vytvořit 2D náhled z* dané roviny. Pro

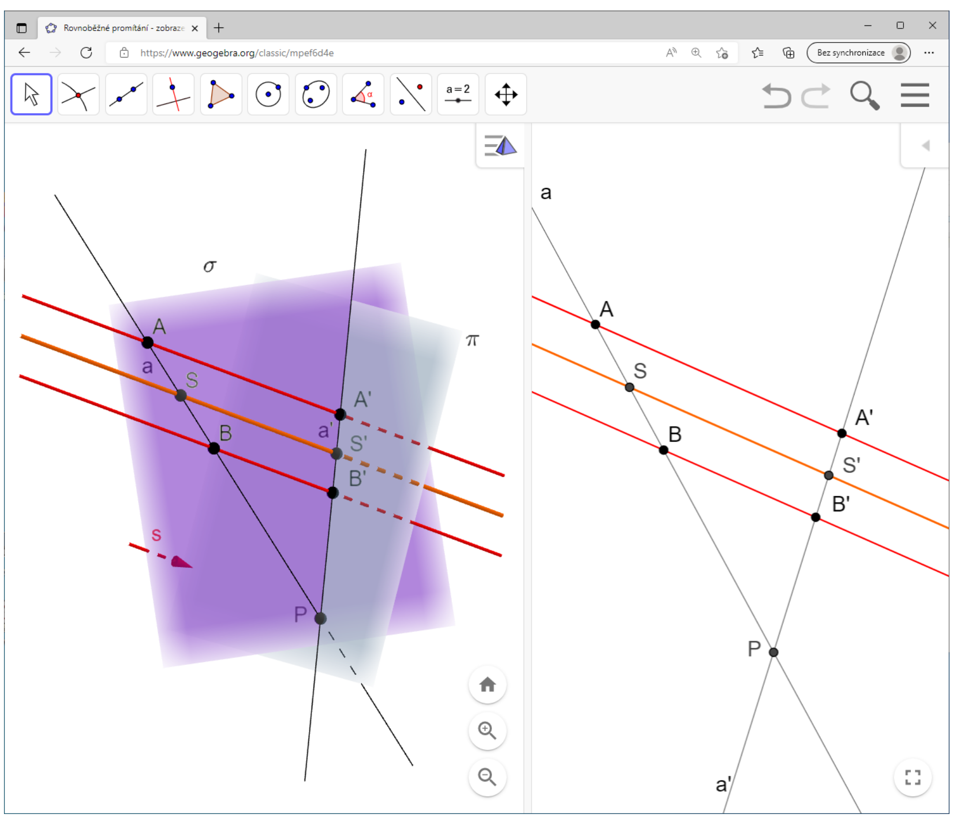


Figure 17: Zobrazení středu úsečky v rovnoběžném promítání (řešeno v programu GeoGebra)

rovnoběžné i středové promítání si nejprve v 3D náhledu zobrazíme promítací rovinu přímky AB, potom použitím uvedené funkce zobrazíme dění v této rovině ve vedlejším okně, jak vidíme na Obr. 17 a 18. Tyto náhledy z perspektivy promítací roviny nám jasně ukazují, jaké bude řešení úkolu stanoveného v příkladu.

V případě rovnoběžného promítání se střed (bod S) úsečky (AB) zobrazí na střed obrazu ($A'B'$) této úsečky. Tvrzení bychom dokázali odkazem na podobnost trojúhelníků, Konkrétně v situaci na Obr. 17 jsou trojúhelníky $PB'B$, $PS'S$ a $PA'A$ vzájemně podobné podle kritéria *uu*. Všechny tři trojúhelníky mají společný vnitřní úhel při vrcholu P. Shoda dalších sobě odpovídajících úhlů, např. u vrcholů B', S' a A', je zajištěna rovnoběžností promítacích přímek.

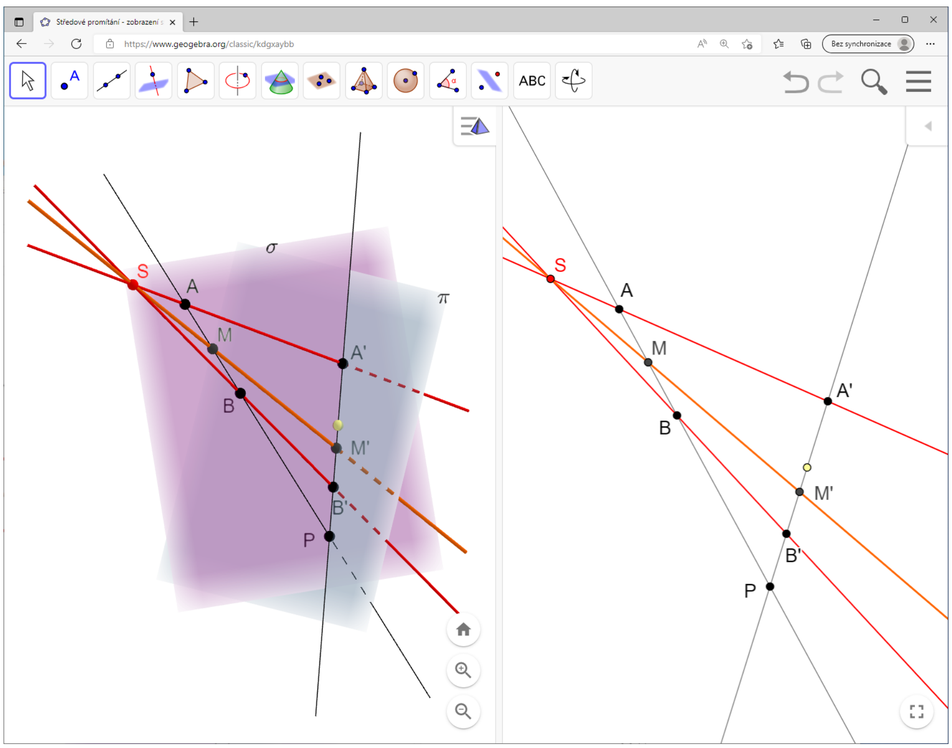


Figure 18: Zobrazení středu úsečky ve středovém promítání (řešeno v programu GeoGebra)

V případě středového promítání, viz Obr. 18, právě tato shoda úhlů při vrcholech B', M' a A' nebo B, M a A neplatí v důsledku různoběžnosti promítacích přímek. Příslušné trojúhelníky tak nejsou podobné, tedy střed (bod M) úsečky (AB) se nezobrazí na střed obrazu ($A'B'$) této úsečky. Pro vizuální evidenci této skutečnosti je střed úsečky $A'B'$ na Obr. 18 vyznačen žlutým bodem.

Zjištěné skutečnosti jsou projevem obecných vlastností rovnoběžného a středového promítání a týkají se jejich *invariant*[1] těchto zobrazení.

[1] *Invariantem* rozumíme vlastnost, která se při aplikaci dané transformace nemění. Více viz např. Wikipedia: Invariant (mathematics)

Invariantem rovnoběžného promítání je dělicí poměr.

Vlastnost *zachování středu* při *rovnoběžném promítání*, tj. zobrazení středu úsečky na střed jejího obrazu, je pouze dílčím projevem obecné vlastnosti tohoto zobrazení, která spočívá v tom, že se zachovává (tj. přenáší ze vzorů na obrazy) jakýkoliv poměr vzdáleností tří bodů. Stručně vyjádřeno, v rovnoběžném promítání se *zachovává dělicí poměr*[2].

Invariantem středového promítání je dvojpoměr.

Jak je zjevné z Obr. 18, ve středovém promítání se dělicí poměr *nezachovává*. Neznamená to ale, že je toto promítání zcela *nevyzpytatelné*. I ono disponuje invariantem. Dokonce takovým, který je spjat s pojmem dělicí poměr. Ten se sice ve středovém promítání nezachovává, zachovává se ale poměr dělicích poměrů pro čtyři body na přímce, tzv. *dvojpoměr*[3]. Tato vlastnost je předmětem *Pappovy věty o invarianci dvojpoměru*. Důkaz je uveden např. v Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 26–27.

4.3 Základní pojmy a vybrané vlastnosti (rovnoběžného) promítání

Hlavní rovina je (každá) rovina rovnoběžná s průmětnou π, viz rovina $\tau \parallel \pi$ na Obr. 19.

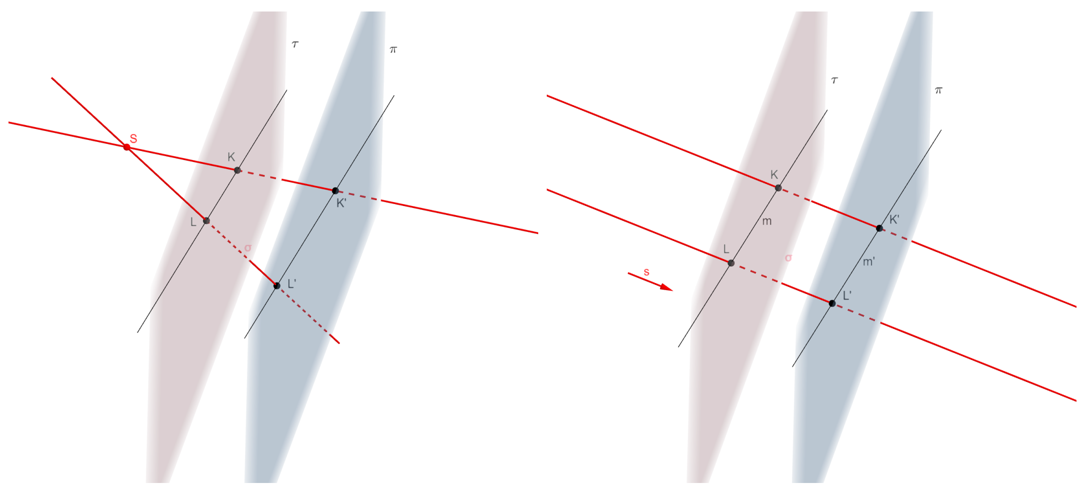


Figure 19: Hlavní rovina τ ve středovém (vlevo) a v rovnoběžném (vpravo) promítání.

[2] *Dělicím poměrem* rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky. Můžeme ho definovat takto: *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.. Více viz Hašek, R. *Planimetrie* (studijní text). 2020, str. 15

[3] *Dvojpoměr* můžeme definovat takto: *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.* Více viz Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 19–30

Z Obr. 19 a s ním spojených online appletů je zřejmé, že *obrazem přímky ležící v hlavní rovině (jinak řečeno, přímky rovnoběžné s průmětnou) je v obou typech promítání přímka, která je s ní rovnoběžná.* V případě rovnoběžného promítání navíc platí, že *průmětem (obrazem) útvaru ležícího v hlavní rovině je útvar s ním shodný.*

Příklad 4.2. *Jak je uvedeno výše, v případě rovnoběžného promítání je průmětem útvaru ležícího v hlavní rovině útvar s ním shodný. Jak je tomu ve středovém promítání? Existuje i zde nějaká souvislost mezi obrazcem ležícím v hlavní rovině a obrazcem, který je jeho obrazem? Vysvětlete!*

Nadále se budeme zabývat výhradně *rovnoběžným promítáním.* Budeme při tom často odkazovat na následující vlastnosti *rovnoběžného promítání*:

1. *Průmětem přímky je přímka nebo bod.*

2. *Průmětem roviny je celá průmětna nebo přímka.*

3. *Průmětem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky nebo dva body.*

Příklad 4.3. *Každou z uvedených vlastností ilustrujte 3D obrázkem nakresleným v prostředí GeoGebra Grafický náhled 3D.*

Příklad 4.4. *Platí výše uvedené vlastnosti 1–3 také pro středové promítání? Pokud ne doslova, platí alespoň nějaké analogie? Vyslovte je!*

Třetím podprostorem trojrozměrného bodového prostoru vedle bodu a přímky je *rovina.* Uvedeme si zde proto ještě klíčové pojmy, s kterými při zobrazování rovin pracujeme, viz Obr. 20. *Stopa roviny* je průsešnice roviny s průmětnou, viz Obr. 20,

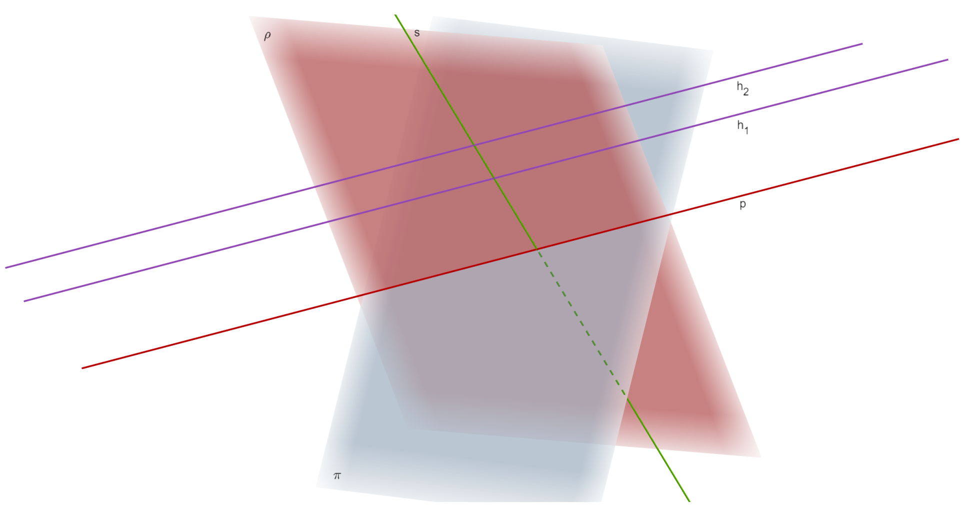


Figure 20: Rovina ρ a její stopa p, hlavní přímky h_1, h_2 a spádová přímka s

přímka $p \equiv \rho \cap \pi$. *Hlavní přímka roviny* je každá přímka, která leží v příslušné rovině a je rovnoběžná s průmětnou, viz Obr. 20, přímky h_1, h_2. *Spádová přímka roviny* je přímka, která leží v příslušné rovině a je kolmá na její hlavní přímky, viz Obr. 20, přímka s. Z uvedeného je patrné, že stopu roviny můžeme považovat za speciální případ hlavní přímky a že spádová přímka je kolmá i ke stopě roviny.

5 Kosoúhlé promítání

Kosoúhlým promítáním rozumíme *rovnoběžné promítání, při němž je směr promítání kosý k průmětně (tzv. průmětně kosoúhlého promítání).* [1] Kosoúhlé promítání je zpravidla určeno průměty os pravoúhlé souřadnicové soustavy, jejíž jedna souřadnicová rovina je totožná (obecně předpokládáme, že rovnoběžná) s průmětnou, viz Obr. 21.

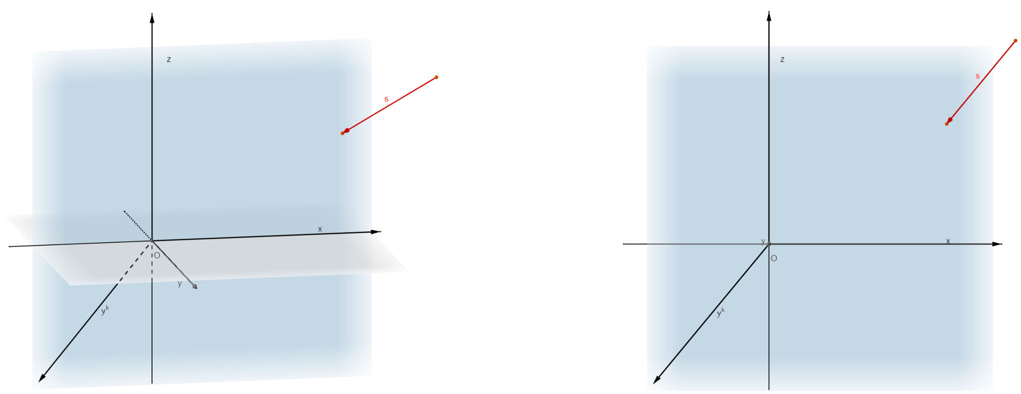


Figure 21: Princip kosoúhlého promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět

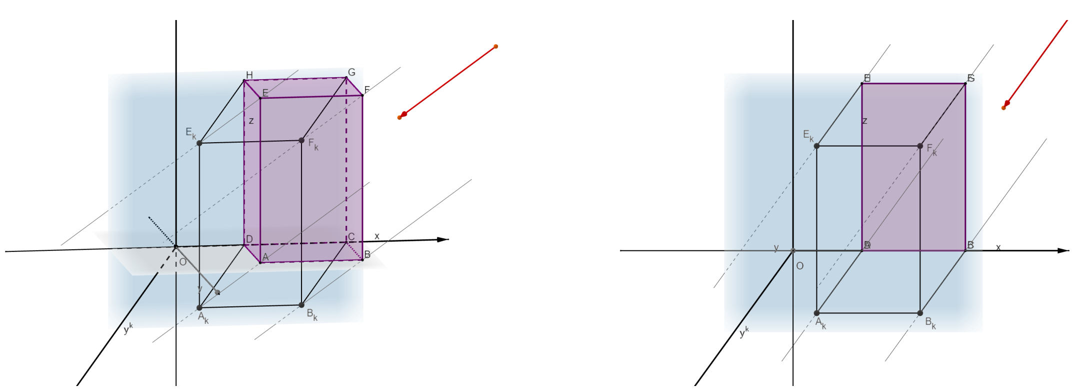


Figure 22: Kvádr v kosoúhlém promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět kvádru

5.1 Zadání kosoúhlého promítání

Kosoúhlé promítání je většinou určeno průměty os pravoúhlé soustavy souřadnic (x, y, z). V literatuře se setkáme s použitím jak pravotočivé, tak i levotočivé soustavy. My budeme používat *levotočivou soustavu souřadnic*, viz Obr. 23 i všechny předchozí ilustrace kosoúhlého promítání, stejně jako v *Mongeově promítání*.

Jak bylo uvedeno dříve, průmětna kosoúhlého promítání je rovnoběžná, většinou přímo totožná, s jednou ze souřadnicových rovin. Na Obr. 23 je to rovina xz. Velikost kosoúhlého průmětu jednotkové úsečky na souřadnicové ose kolmé k průmětně, na Obr. 23 se jedná o kosoúhlý průmět y_k osy y, se nazývá *poměr zkrácení* (též *poměr (kvocient) zkreslení*) a značí se q. Osy x a z jsou totožné se svými kosoúhlými průměty, značíme je tedy x, z. Osa y je orientována "proti nám", kolmo k průmětně. Jejím kolmým průmětem je bod O. Pracujeme tedy s jejím kosoúhlým průmětem y_k, jeho6 jednotky ale vidíme zkreslené koeficientem q, jak bylo uvedeno. Orientovaný úhel kosoúhlých průmětů y_k a x (při "naší" volbě průmětny kosoúhlého promítání rovnoběžné s rovinou xz) se nazývá *úhel kosoúhlého promítání* (též *úhel zkosení*) a značí se ω, mluvíme pak o kosoúhlém promítání (ω, q), viz Obr. 23.

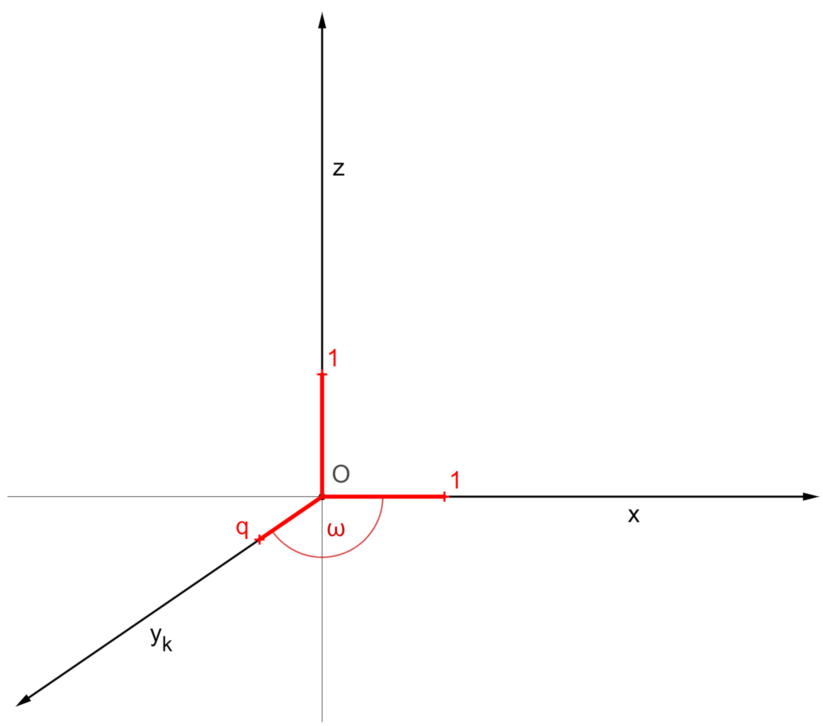


Figure 23: Kosoúhlé promítání (ω, q) - zadání osovým křížem

5.2 Zobrazení bodu v kosoúhlém promítání

Příklad 5.1. *V kosoúhlém promítání, které je zadáno úhlem zkosení* $\omega = 135°$ *a poměrem zkreslení* $q = 3/4$*, sestrojte kosoúhlý průmět bodu* $A = [3, 5, 6]$ *(použijte levotočivou soustavu).*

Pro určení polohy bodu vzhledem k souřadnicovým osám nestačí jenom jeho *kosoúhlý průmět* A^k (nehrozí-li mýlka, značíme jednoduše A) do průmětny ${}^k\pi$ (případně označené pouze π). Je to pouze jeden bod, který nám neposkytne informaci, jak hluboko ve scéně je umístěn. Potřebujeme proto ještě jeden *kolmý* průmět bodu do jedné ze souřadnicových rovin. Používá se *půdorys*, tj. kolmý průmět A_1 do roviny xy. Ten se potom kosoúhle promítá do průmětny ${}^k\pi$ (π) jako *kosoúhlý půdorys* A_1^k.

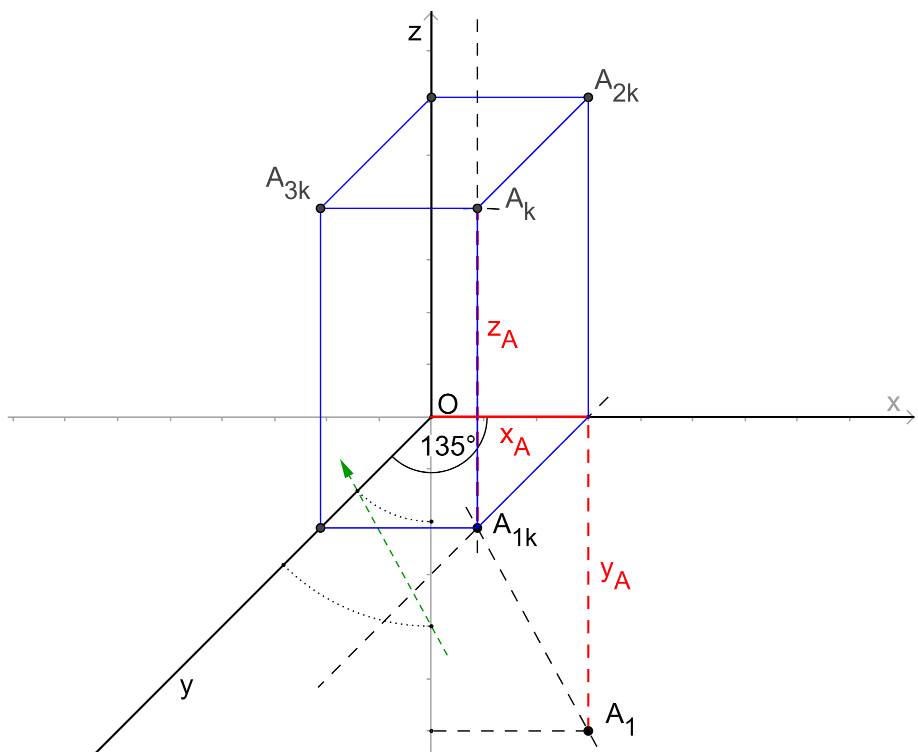


Figure 24: Kosoúhlé promítání (135°, 1/2): Zobrazení bodu $A[3, 5, 6]$

6 Volné rovnoběžné promítání

Volné rovnoběžné promítání – rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, v němž se obraz průmětu útvaru sestrojuje užitím vět platících pro rovnoběžné promítání, a to bez zadání obrazů průmětů os souřadnicové soustavy. [1]

Základní metodou zobrazení trojrozměrných těles používanou ve výuce na základní a střední škole je *volné rovnoběžné promítání.*

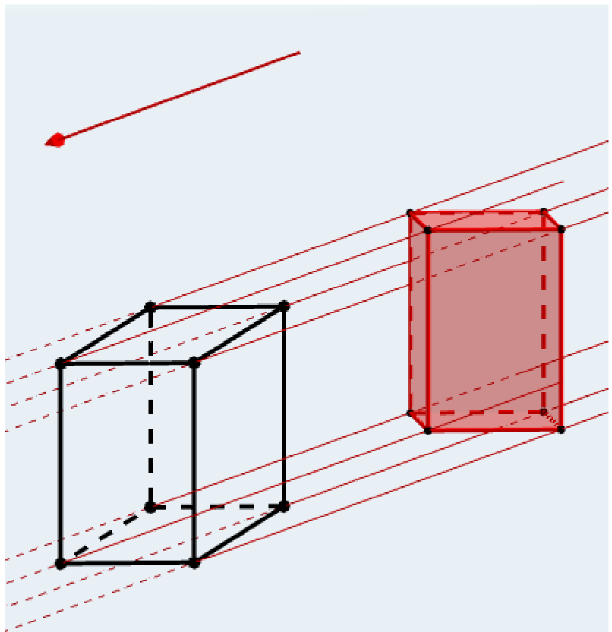


Figure 25: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádru v *průčelné* poloze

Volným rovnoběžným promítáním (nazývá se též zkráceně *Volné promítání*) nazýváme rovnoběžné promítání, u kterého nezadáváme souřadnicové osy (přesněji jejich průměty). Při zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání dbáme na dodržení těchto vlastností (viz Obr. 25):

– Průmětem libovolné přímky je buď přímka nebo bod.

– Průmětem libovolných dvou rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (mohou i splývat) nebo dva body.

– Průmětem každého geometrického útvaru, který leží v průčelné rovině (tj. v rovině rovnoběžné s průmětnou) je útvar s ním shodný.

– Geometrický útvar, který neleží v průčelné rovině se zpravidla zkresluje. Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky AB, CD a jejich obrazy $A'B'$, $C'D'$ platí $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$.

– Obrazy úseček kolmých k průmětně (tj. k jakékoliv průčelné rovině) jsou vzájemně rovnoběžné a s vodorovným směrem (představme si třeba směr kladné poloosy

x) svírají úhel φ (zpravidla volíme $\varphi = 45°$). Velikost obrazu každé takové úsečky je potom q násobkem velikosti původní úsečky, tj. pro každou úsečku KM kolmou k průmětně a její obraz $K'M'$ platí $|K'M'| = q|KM|$ (zpravidla volíme $q = \dfrac{1}{2}$).

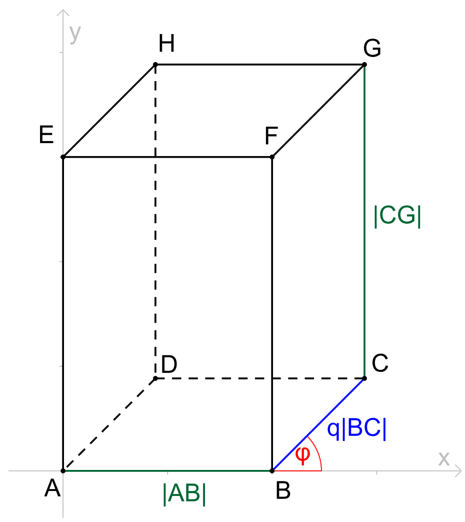


Figure 26: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádru $4 \times 5 \times 6$

Příklad 6.1. *Naučte se načrtnout od ruky krychli, pravidelný čtyřstěn a válec ve volném rovnoběžném promítání ($\varphi = 45°$, $q = 1/2$), viz Obr. 27, 28 a 29.*

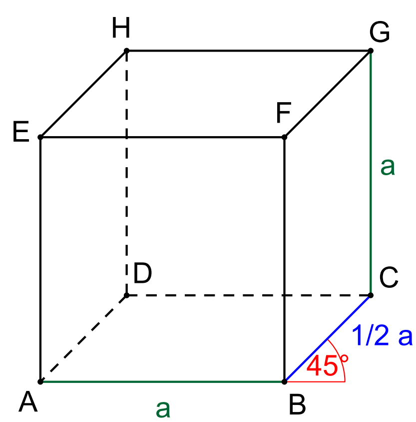


Figure 27: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení krychle $a \times a \times a$

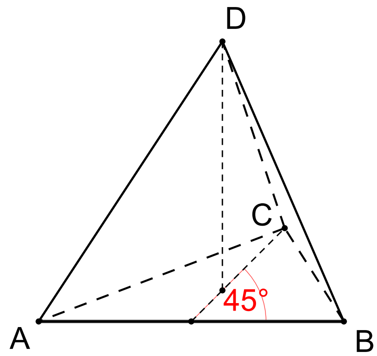


Figure 28: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení pravidelného čtyřstěnu s hranou délky a

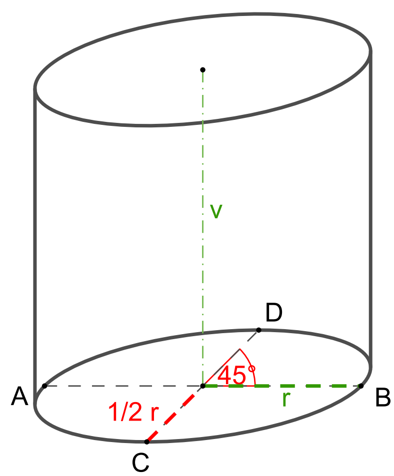


Figure 29: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení válce s poloměrem r a výškou v

References

[1] Sedláček, J. a kol. *Slovník školské matematiky.* Praha: SPN ARGO. 1981.

[2] Voráčová, Š. a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná.* Praha: Academia. 2012.