

Geometrie III

Roman Hašek

October 2022

Contents

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 5 |
| 2 | Eukleidovský trojrozměrný prostor. Souřadnice bodu. | 9 |
| 3 | Základní geometrická tělesa | 15 |
| 4 | Promítání | 19 |
| 4.1 | Středové a rovnoběžné promítání | 19 |
| 4.2 | Invarianty středového a rovnoběžného promítání | 20 |
| 4.3 | Rovnoběžné promítání | 24 |
| 5 | Kosoúhlé promítání | 27 |
| 5.1 | Zadání kosoúhlého promítání | 28 |
| 5.2 | Zobrazení bodu v kosoúhlém promítání | 29 |
| 5.3 | Vybrané druhy kosoúhlého promítání | 30 |
| 5.4 | Volné rovnoběžné promítání | 31 |
| 5.5 | Slabiny kosoúhlého promítání | 34 |
| 6 | Pravoúhlá axonometrie | 35 |
| 6.1 | Zadání axonometrie | 36 |
| 7 | Kolmé promítání | 41 |
| 7.1 | Stavby z krychlí | 42 |
| 7.2 | Kótovaný půdorys | 43 |
| 8 | Kótované promítání | 45 |
| 8.1 | Zobrazení bodu | 45 |
| 8.2 | Zobrazení přímky | 46 |
| 8.3 | Stupňování přímky | 50 |
| 8.4 | Zobrazení roviny | 52 |
| 9 | Mongeovo promítání | 53 |
| 9.1 | Zobrazení přímky | 54 |
| 9.2 | Zobrazení roviny | 55 |
| 9.3 | Zobrazení kružnice | 56 |
| 9.4 | Vybrané úlohy | 57 |
| 10 | Osová afinita | 59 |
| 10.1 | Osová afinita | 59 |
| 10.1.1 | Základní afinity | 60 |
| 10.1.2 | Osová afinita v rovině | 60 |
| 10.1.3 | Cvičení – Osová afinita | 63 |

| | |
|---|-----------|
| 11 Středová kolineace | 65 |
| 11.1 Původ středové kolineace | 65 |
| 11.2 Kolineace kružnice a kuželosečky | 69 |

Kapitola 1

Úvod

Předmět *Geometrie III* je zaměřen převážně do oblasti *deskriptivní geometrie*. *Deskriptivní geometrie* se věnuje metodám dvojrozměrného znázornění trojrozměrných objektů a zkoumání jejich geometrických vztahů prostřednictvím tohoto znázornění.

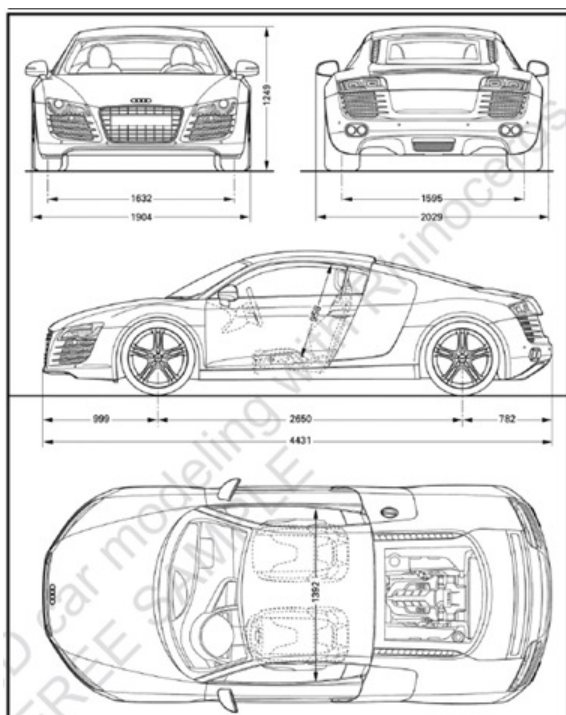


Figure 1.1: Audi R8 (www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf)

Významnou roli při formování základů deskriptivní geometrie hrál francouzský geometr *Gaspard Monge*. Často je nazýván *otcem deskriptivní geometrie*. Název této geometrické disciplíny vzešel z jeho určující publikace *Géométrie Descriptive* vydané v roce 1799.

Gaspard Monge začal pro zobrazení trojrozměrných objektů systemat-

icky využívat sdružení jejich dvou kolmých průmětů, metodu, která začala být nazývána *Mongeova projekce*. Jedná se jenom o jednu, i když notně významnou, metodu pro zobrazení trojrozměrných útvarů do roviny. Zde jsou některé z těch, které se používají v technické praxi:

- *kótované promítání*; rovnoběžné promítání kolmo na jednu průmětnu (*půdorysnu*), viz Obr. 1.2,

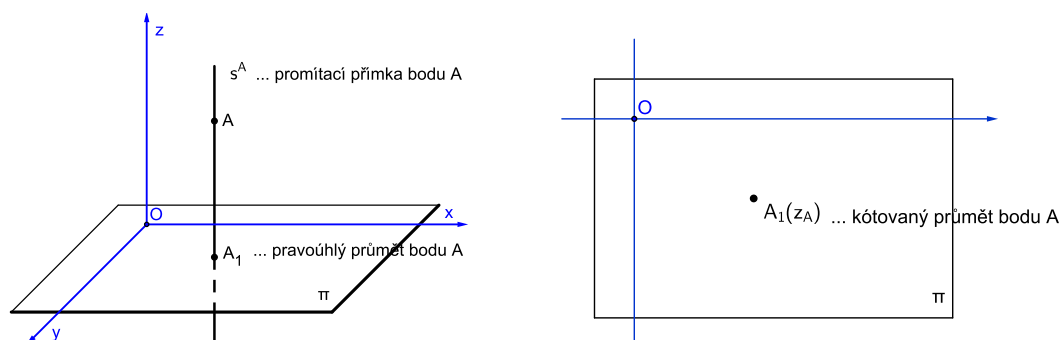


Figure 1.2: Kótované promítání – zobrazení bodu

- *Mongeovo promítání*; útvar je promítnut dvěma rovnoběžnými promítáními na dvě vzájemně kolmé průmětny (*nárysnu* a *půdorysnu*), viz Obr. 1.3,

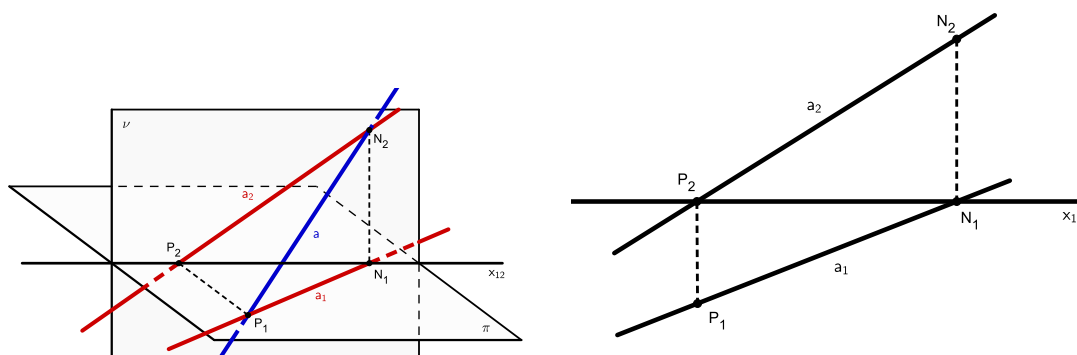


Figure 1.3: Mongeovo promítání – zobrazení přímky

- *kosouhlé promítání*; rovnoběžné promítání ve směru kosém na jednu průmětnu, která je totožná s jednou ze souřadnicových rovin, speciálním případem kosouhlého promítání je *volné rovnoběžné promítání*, viz Obr. 1.4,
- *axonometrie*; rovnoběžné promítání na rovinu obecně umístěnou vzhledem k souřadnicovým osám, pokud je směr promítání kolmý, hovoříme o *pravouhlé axonometrii*, viz Obr. 1.4,

- *perspektiva*; středové promítání, odpovídá našemu zrakovému vjemu, existuje více druhů perspektivy, viz Obr. 1.4.

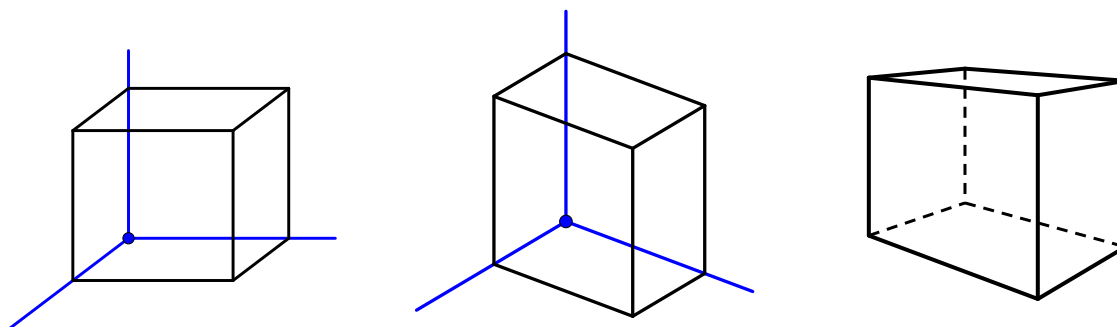


Figure 1.4: Kosoúhlé promítání (vlevo), pravouhlá axonometrie (uprostřed), perspektiva (vpravo)

Kapitola 2

Eukleidovský trojrozměrný prostor. Souřadnice bodu.

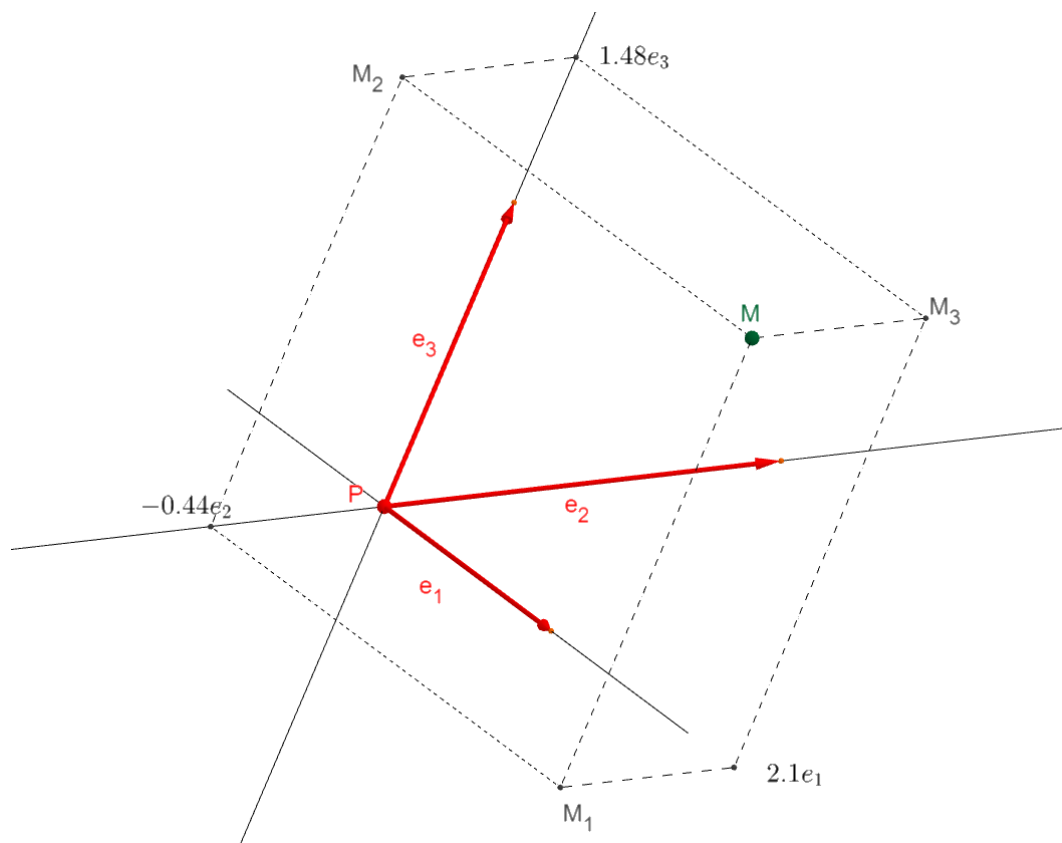
Pojem *eukleidovský* (též *euklidovský*) bodový prostor byl zaveden a náležitě pojednán v předmětu *Geometrie I* (KMA/7G1). Zde si pouze připomeneme příslušnou definici a uvedeme její alternativní formulaci.

Eukleidovský prostor představuje ideální geometrický model prostoru, který nás obklopuje. Je to prostor školní geometrie, dvojrozměrný (*planimetrie*) a trojrozměrný (*stereometrie*), postupem času zobecněný na n rozměrný.

Pojmenován po *Eukleidovi z Alexandrie*, starověkém řeckém matematikovi, který geometrii trojrozměrného prostoru a tělesům, která jsou v něm usazena, věnoval poslední tři knihy ze svého třináctidílného díla *Základy*. Kompletní český překlad tohoto díla provedený Františkem Servítem v roce 1907 je volně dostupný na adrese https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf.

Výchozím pojmem zavedení *Eukleidovského prostoru* pro nás byl *afinní bodový prostor*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 126. Použitá definice afinního bodového prostoru nám dovolila zavést *afinní soustavu souřadnic* (též nazývanou *repér*).

Abychom soustavu souřadnic v trojrozměrném prostoru, jejíž příklad je na Obr. 2.1, mohli nazvat *afinní*, stačí, aby splňovala jediný požadavek, aby vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ neležely v jedné rovině. Ekvivalentní podmínkou je požadavek, aby v jedné rovině neležel bod P spolu s koncovými body vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (tyto body ovšem nejsou v obrázku popsány). Zavedení pojmu *afinní* do geometrie je připisováno švýcarskému matematikovi *Leonardu Eulerovi*. *Afinní zobrazení* můžeme stručně charakterizovat jako

Figure 2.1: Afinní soustava souřadnic $\varphi = \{P, e_1, e_2, e_3\}$

zobrazení, které přímku zobrazuje opět na přímku nebo na bod, a které střed dvojice bodů–vzorů zobrazí zase na střed odpovídající dvojice bodů–obrazů (přesněji řečeno, zachovává dělicí poměr, viz (Hašek: PLA 2020), str. 15). *Afinní geometrií* potom rozumíme geometrii, která zkoumá takové vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich afinních zobrazeních.

Afinní soustavu souřadnic nazýváme:

- *kosouhlou*, pokud alespoň dvě její souřadnicové osy (tj. jejich směrové vektory) nejsou navzájem kolmé, viz Obr. 2.1,
- *pravoúhlou* (*ortogonální*), pokud každé dvě její osy (tj. jejich směrové vektory) jsou navzájem kolmé,
- *kartézskou* (*ortonormální*), pokud každé dvě její osy jsou navzájem kolmé (tj. jsou ortogonální) a zároveň jsou jednotky na všech těchto osách stejné.

Ve školní matematice pracujeme s *kartézskou soustavou souřadnic*. Je pojmenována po francouzském matematikovi a filosofovi *René Descartovi*, který se systematickým zavedením metody práce se souřadnicemi bodů v prostoru zasloužil o vznik *analytické geometrie* (tj. analytické metody v geometrii).

Již tedy umíme přiřadit každému bodu prostoru jeho souřadnice, tj. v případě trojrozměrného prostoru uspořádanou trojici reálných čísel. To nám dovoluje zkoumat vzájemné polohy geometrických útvarů v prostoru. Nestačí to ale k určování jejich vzdáleností a odchylek. To nám dovoluje až zavedení *skalárního součinu* na *zaměření* bodového prostoru (zjednodušeně můžeme zaměření charakterizovat jako vektorový prostor všech směrů možných v daném bodovém prostoru).

Jak je uvedeno v (Hašek: LAG 2020) na str. 166:

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy norma vektoru a odchylka vektorů. Ty ... využijeme k zavedení pojmů vzdálenost bodů, vzdálenost podprostorů, odchylka podprostorů. Vektorový a vnější součin potom ... využijeme k výpočtu obsahů a objemů ...

Detailní pojednání pojmu *skalární součin*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 58.

Pojem *eukleidovský prostor* můžeme však zavést i axiomaticky, bez použití vektorového prostoru, jak ilustruje definice uvedená ve *Slovníku školské matematiky* (zprac. česká terminologická komise pro matematiku JČMF, Praha: SPN, 1981):

Euklidovský prostor (n -rozměrný) - množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel, přičemž pro každou dvojici $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je definována vzdálenost d předpisem

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Například, zavedeme-li v rovině (resp. v trojrozměrném prostoru) kartézskou soustavu souřadnic, dostaneme dvojrozměrný (resp. trojrozměrný) euklidovský prostor, v němž se vzdálenost d shoduje s obvyklou vzdáleností bodů.

Poznámka: Obvyklou vzdáleností bodů můžeme rozumět vzdálenost spočítanou použitím Pythagorovy věty.

Existují i jiné soustavy souřadnic, než jsou kartézské nebo kosoúhlé. Jaké znáte?

Sférické souřadnice, viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

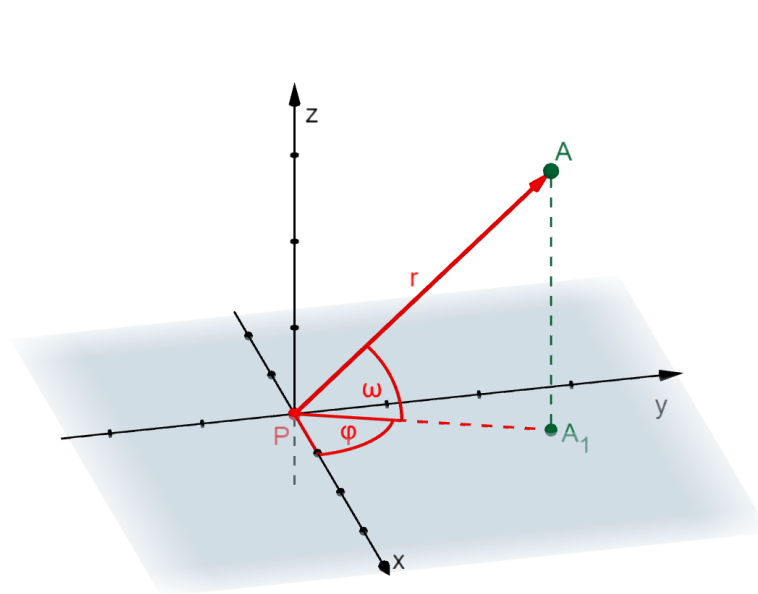


Figure 2.2: Sférické souřadnice (r, φ, ω)

Cylindrické souřadnice, viz Wikipedia: Cylindrical Coordinate System.

Příklad 2.1. *Využijte princip sférických souřadnic k odvození parametrických rovnic kulové plochy a k jejímu zobrazení v GeoGebře.*

Řešení: Použijeme sférické souřadnice (r, φ, ω) zavedené dle Obr. 2.2, které se mírně liší od jejich zavedenějšího pojetí (místo našeho úhlu ω se používá $\theta = \pi/2 - \omega$), viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

Potom pro parametrické rovnice kulové plochy platí:

$$x(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos \omega \cdot \cos \varphi, \quad (2.1)$$

$$y(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos \omega \cdot \sin \varphi, \quad (2.2)$$

$$z(r, \varphi, \omega) = r \cdot \sin \omega; \quad r \geq 0, \varphi \in \langle 0; \pi \rangle, \omega \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (2.3)$$

Po zavedení posuvníku pro hodnoty r a po zadání příkazu `Plocha(r · cos ω · cos φ, r · cos ω · sin φ, r · sin ω, φ, 0, π, ω, 0, 2π)` získáme graf kulové plochy zachycený na Obr. 2.3. Měníme-li posuvníkem hodnotu r , mění se velikost (poloměr) kulové plochy.

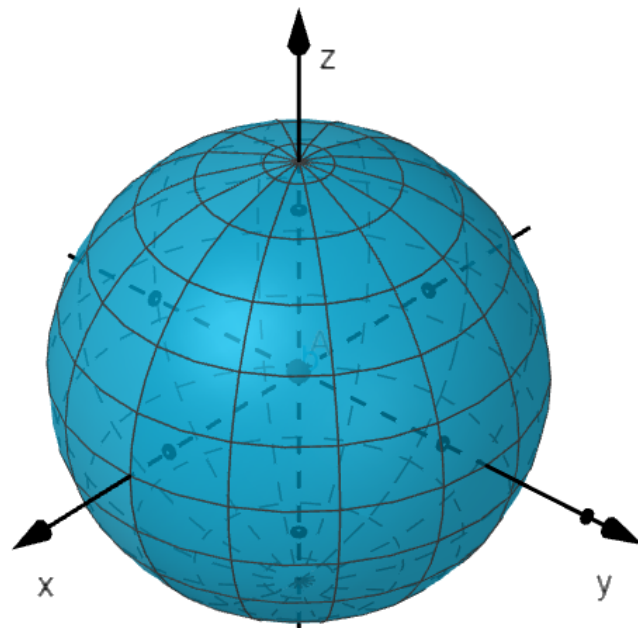


Figure 2.3: Kulová plocha

Rovinnou analogií sférických souřadnic jsou *polární souřadnice*. Mohou sloužit jako jednodušší předstupeň pro pochopení sférických souřadnic a rovnice pro jejich převedení na kartézské souřadnice, viz (2.1), (2.2), (2.3).

Polární souřadnice (r, φ) bodu X v rovině si zavedeme dle Obr. 2.4. Polární soustava souřadnic je určena *pólem* P a *polární osou* p . Obrázek nabízí jednoduchý přechod od polárních souřadnic $X = (r, \varphi)$ k souřadnicím kartézským $X = [x; y]$. Pokud ztotožníme pól P s počátkem kartézské soustavy souřadnic a polární osu p s kladnou poloosou x , lze pro bod X psát:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad (2.4)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi. \quad (2.5)$$

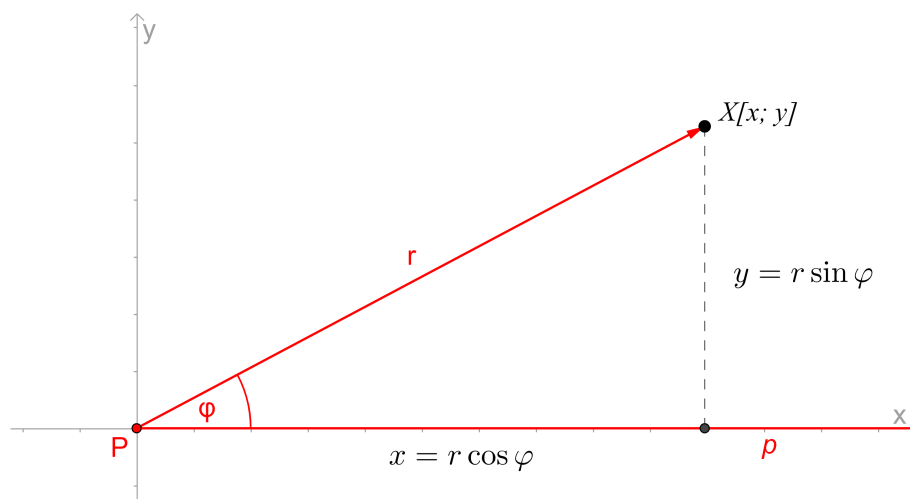


Figure 2.4: Polární souřadnice

Příklad 2.2. *Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = 5$. Napište rovnici této kružnice v polárních souřadnicích.*

Kapitola 3

Základní geometrická tělesa

Tělesem v geometrii rozumíme uzavřenou omezenou oblast v prostoru. Hranicí tělesa bývá plocha. [1]

Tělesa můžeme rozdělit na *konvexní* a *nekonvexní* [2]. Připomeňme si, že pro *konvexní* útvar platí, že úsečka spojující libovolné dva jeho body náleží celá tomuto útvaru. Naproti tomu pro *nekonvexní* útvar platí, že v něm existují takové dva body, že úsečka jimi určená neleží celá v tomto útvaru.

Tělesa můžeme rozdělit na *mnohostěny* a na *oblá tělesa* [2]. *Mnohostěny*

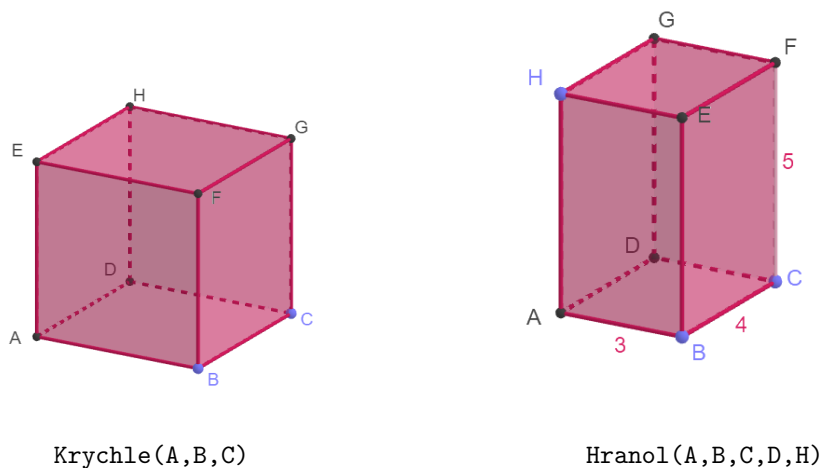
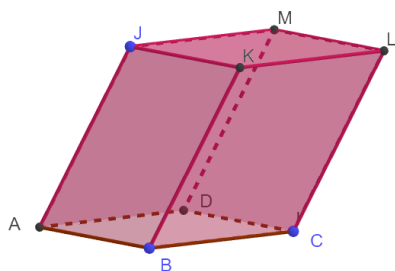


Figure 3.1: GeoGebra: Krychle a kvádr

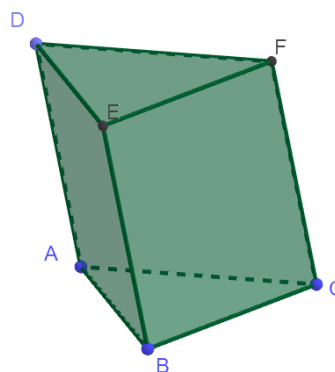
jsou tělesa, jehož povrch tvoří *mnohoúhelníky*. Tyto mnohostěny tvoří *stěny* mnohostěnu. Společné strany sousedních stěn nazýváme *hrany*. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$s + v = h + 2,$$

kde s je počet jeho stěn, v počet jeho vrcholů a h je počet jeho hran.



Hranol (podstava, J)

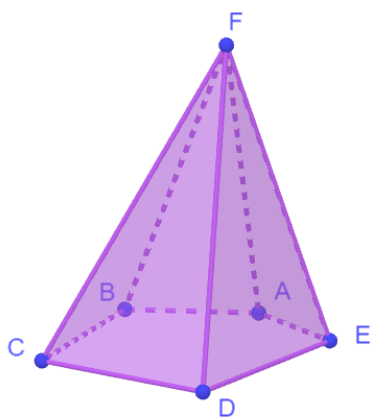


Hranol (A, B, C, D, H)

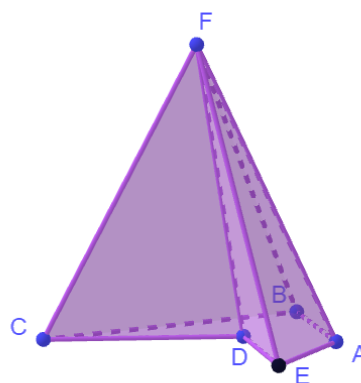
Figure 3.2: GeoGebra: Rovnoběžnostěn a kosý trojboký hranol

Vybranými mnohostěny, s kterými se budeme postupně seznamovat, jsou:

- krychle, kvádr, rovnoběžnostěn,
- hranoly,
- jehlany,
- pravidelné mnohostěny (zvané též *Platónská tělesa*),
- polopravidelné mnohostěny (konkrétně *Archimédovská tělesa*).



Jehlan (podstava, F)



Jehlan (podstava, F)

Figure 3.3: GeoGebra: Jehlan konvexní a jehlan nekonvexní

Z oblých těles nás budou zajímat především rotační tělesa:

- válec,
- kužel,
- koule,
- anuloid (též *torus*).

ÚKOL: Zabývejte se tvorbou fyzických i digitálních modelů výše uvedených těles.

Příklad 3.1. Pro vykreslení krychle v prostředí Grafický náhled 3D programu GeoGebra stačí příkazu `Krychle(A,B,C)` zadat první dva body A , B , třetí bod C si program “domyslí”. Přijďte na to, jak? Jaké kritérium takový bod C splňuje?

Příklad 3.2. Sestrojte v GeoGebře dva kolmé pětiboké hranoly, jeden konvexní a druhý nekonvexní.

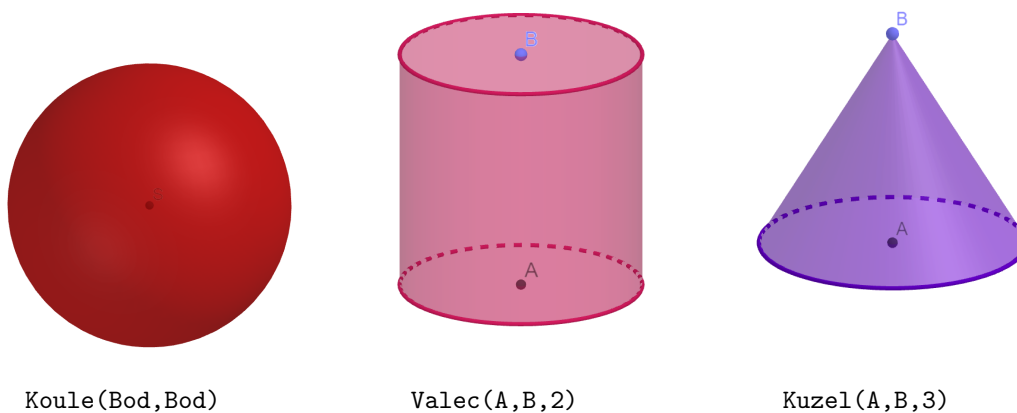


Figure 3.4: GeoGebra: Koule, válec a kužel

Příklad 3.3. Každé z uvedených těles zobrazte v programu GeoGebra. Ale-
sponž pro vybraná z nich potom využijte možnost programu měnit metodu
promítání (axonometrie, perspektiva, kosoúhlé promítání) a směr pohledu
na zobrazovaný objekt (půdorys, nárys a bokorys) a všemi těmito způsoby
si je zobrazte. Pokuste se popsat některé zjevné odlišnosti v zobrazení téhož
tělesa různými metodami.

Kapitola 4

Zobrazení útvarů trojrozměrného prostoru. Promítání.

Promítání (též *projekce*) je zobrazení trojrozměrného prostoru na danou plochu, rovinu, kulovou plochu, válcovou plochu apod. V deskriptivní geometrii uvažujeme vesměs promítání trojrozměrného prostoru na rovinu.

S termínem *promítání*, ve spojení s určitým přívlastkem, se setkáme v označení některých zobrazovacích metod, viz např. *Mongeovo promítání*, *kosoúhlé promítání*, *kótované promítání*, i když se jedná o kombinaci několika promítání. [1]

4.1 Středové a rovnoběžné promítání

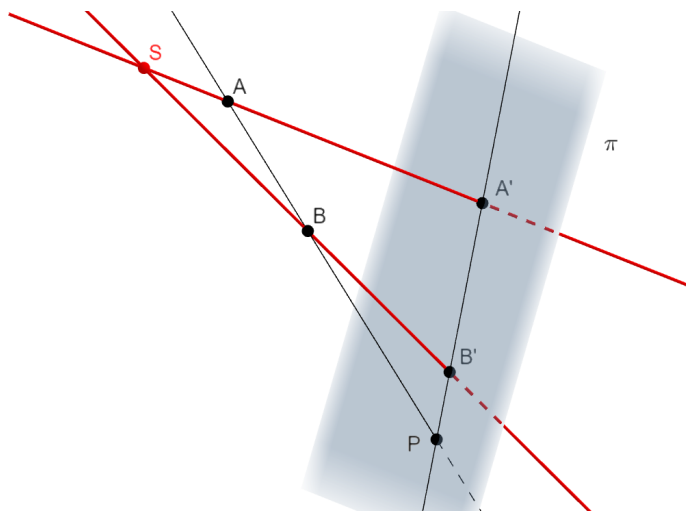


Figure 4.1: Středové promítání dané středem S a průmětnou π

Středové promítání dané *středem* (*promítání*) S a *průmětnou* π je zobrazení, které libovolnému bodu A prostoru (s výjimkou samotného bodu S) přiřadí

jeho obraz A' jako průsečík přímky SA s rovinou π , viz Obr. 4.1. Bod A' se nazývá *středový průmět* bodu A , přímka SA se nazývá *promítací přímka* bodu A (též říkáme *promítací paprsek* bodu A).

Rovnoběžné promítání dané směrem (promítání) \vec{s} a průmětnou π . Pokud je střed promítání S “nekonečně daleko” (hovoříme o tzv. *nevlastních bodech* v rozšířeném eukleidovském prostoru, viz později) promítací přímky různých bodů prostoru se stanou rovnoběžné, viz Obr. 4.2. Hovoříme potom o *rovnoběžném (paralelním) promítání* určeném směrem promítání \vec{s} a průmětnou π .

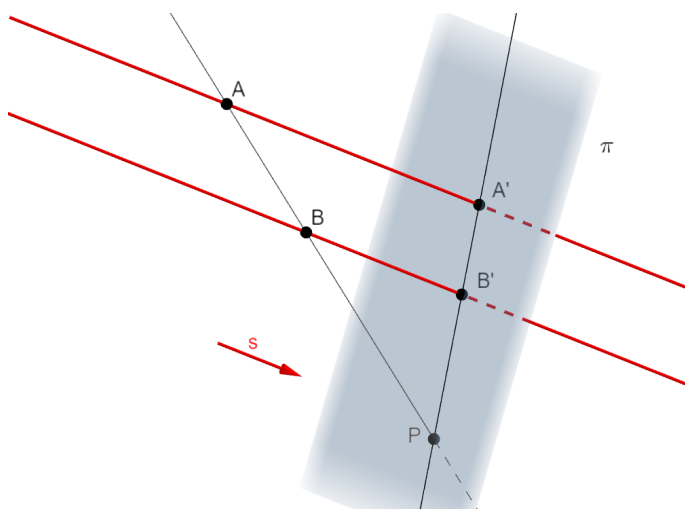


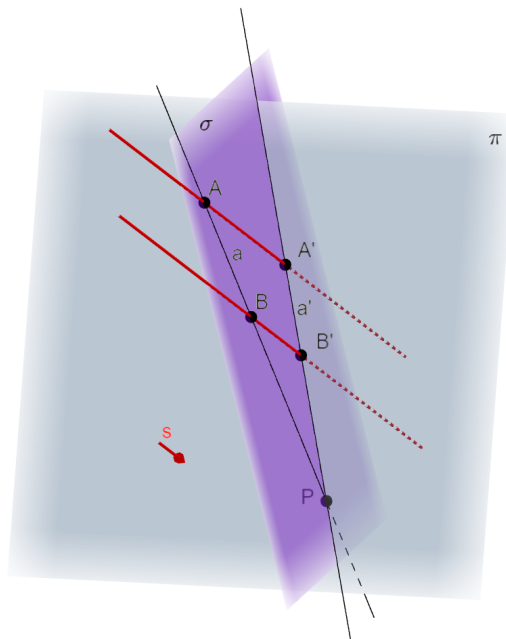
Figure 4.2: Rovnoběžné promítání dané směrem \vec{s} a průmětnou π

Průmětem útvaru nazýváme množinu průmětů všech jeho bodů, viz Obr. 4.4, jeho *promítacím útvarem* nazýváme útvar, který vyplní promítací přímky všech bodů útvaru. Promítacím útvarem přímky je *promítací rovina*, viz Obr. 4.3. Průsečík přímky s průmětnou nazýváme *stopník přímky*, viz Obr. 4.1, 4.2 nebo 4.3, kde je zobrazen stopník P přímky $\leftrightarrow AB$.

K výrazům průmět, promítací přímka, apod. se často přidává přívlastek určující druh promítání nebo název průmětny – kosoúhlý průmět, půdorysně promítací přímka.

4.2 Invarianty středového a rovnoběžného promítání

Příklad 4.1. *U geometrických zobrazení nás zajímají vlastnosti a charakteristiky, které se při nich zachovávají, tj. platí jak pro vzor, tak i pro*

Figure 4.3: Promítací rovina σ přímky a při rovnoběžném promítání

jeho obraz, říkáme jeim invarianty daného zobrazení. Známe například tvrzení, že se při určitém zobrazení “zachovává incidence”. Zjistěte experimentálně, zda se u rovnoběžného a středového promítání zachovává střed úsečky. Své závěry se pokuste dokázat.

Experimentální řešení příkladu 4.1 můžeme provést v programu GeoGebra, viz Obr. 4.5 a 4.6. Využijeme při tom funkci *Vytvořit 2D náhled z dané roviny*. Pro rovnoběžné i středové promítání si nejprve v 3D náhledu zobrazíme promítací rovinu přímky AB , potom použitím uvedené funkce zobrazíme dění v této rovině ve vedleším okně, jak vidíme na Obr. 4.5 a 4.6. Tyto náhledy z perspektivy promítací roviny nám jasně ukazují, jaké bude řešení úkolu stanoveného v příkladu.

V případě rovnoběžného promítání se střed (bod S) úsečky (AB) zobrazí na střed obrazu ($A'B'$) této úsečky. Tvrzení bychom dokázali odkazem na podobnost trojúhelníků, Konkrétně v situaci na Obr. 4.5 jsou trojúhelníky $PB'B$, $PS'S$ a $PA'A$ vzájemně podobné podle kritéria *uu*. Všechny tři trojúhelníky mají společný vnitřní úhel při vrcholu P . Shoda dalších sobě odpovídajících úhlů, např. u vrcholů B' , S' a A' , je zajištěna rovnoběžností promítacích přímek.

V případě středového promítání, viz Obr. 4.6, právě tato shoda úhlů při

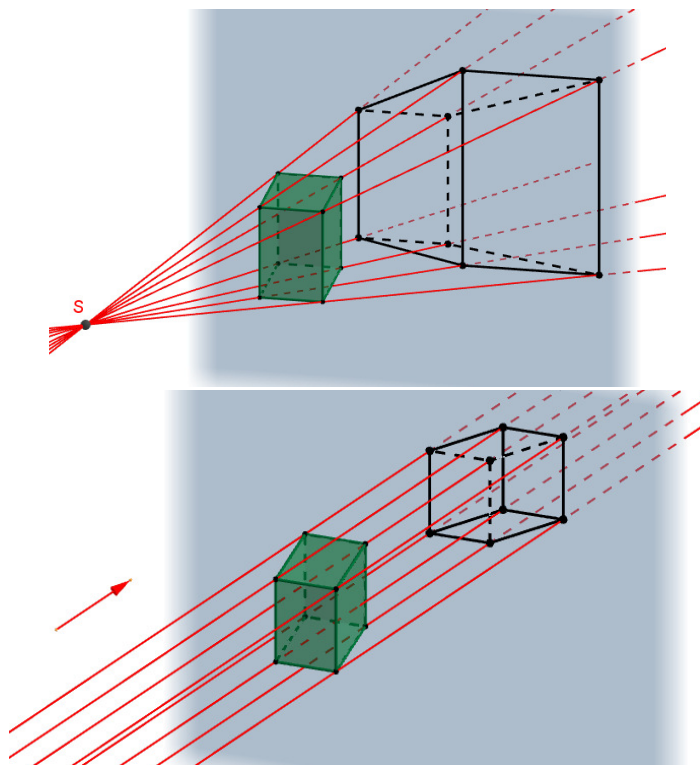


Figure 4.4: Průmět kvádrů ve středovém (vlevo) a rovnoběžném (vpravo) promítání do roviny

vrcholech B' , M' a A' nebo B , M a A neplatí v důsledku různoběžnosti promítacích přímek. Příslušné trojúhelníky tak nejsou podobné, tedy střed (bod M) úsečky (AB) se nezobrazí na střed obrazu $(A'B')$ této úsečky. Pro vizuální evidenci této skutečnosti je střed úsečky $A'B'$ na Obr. 4.6 vyznačen žlutým bodem.

Zjištěné skutečnosti jsou projevem obecných vlastností rovnoběžného a středového promítání a týkají se jejich *invariant*¹ těchto zobrazení.

¹*Invariantem* rozumíme vlastnost, která se při aplikaci dané transformace nemění. Více viz např. Wikipedia: Invariant (mathematics)

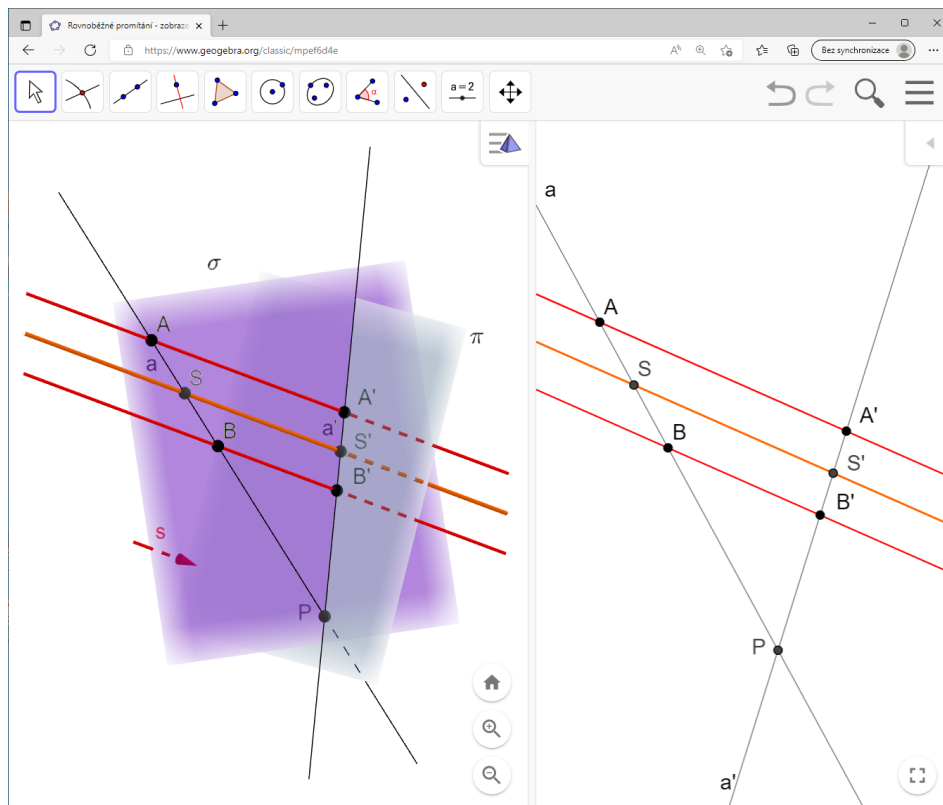


Figure 4.5: Zobrazení středu úsečky v rovnoběžném promítání (řešeno v programu GeoGebra)

Invariantem rovnoběžného promítání je dělicí poměr.

Vlastnost zachování středu při rovnoběžném promítání, tj. zobrazení středu úsečky na střed jejího obrazu, je pouze dílčím projevem obecné vlastnosti tohoto zobrazení, která spočívá v tom, že se zachovává (tj. přenáší ze vzorů na obrazy) jakýkoliv poměr vzdáleností tří bodů. Stručně vyjádřeno, v rovnoběžném promítání se zachovává dělicí poměr².

Invariantem středového promítání je dvojpoměr.

Jak je zjevné z Obr. 4.6, ve středovém promítání se dělicí poměr nezachovává. Neznamená to ale, že je toto promítání zcela nevyzpytatelné. I ono disponuje invariantem. Dokonce takovým, který je spjat s pojmem dělicí poměr. Ten se sice ve středovém promítání nezachovává, zachovává

²Dělicím poměrem rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky. Můžeme ho definovat takto: Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolinéární body). Potom číslo λ definované rovnicí

$$C - A = \lambda(C - B)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B .. Více viz Hašek, R. *Planimetrie* (studijní text). 2020, str. 15

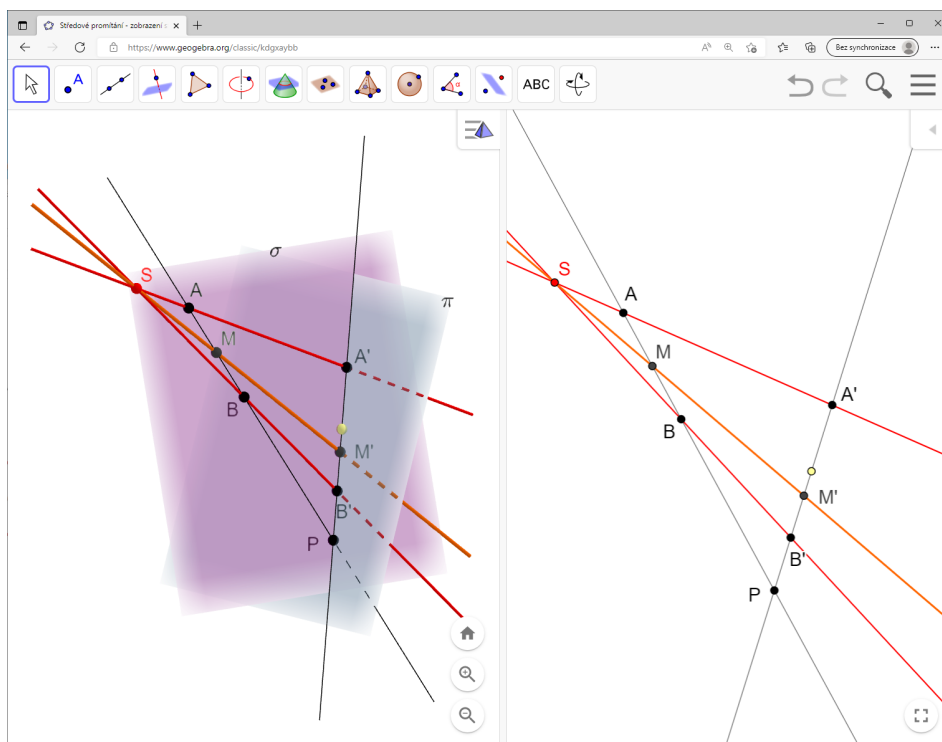


Figure 4.6: Zobrazení středu úsečky ve středovém promítání (řešeno v programu GeoGebra)

se ale poměr dělicích poměrů pro čtyři body na přímce, tzv. *dvojpoměr*³. Tato vlastnost je předmětem *Pappovy věty o invarianci dvojpoměru*. Důkaz je uveden např. v Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 26–27.

4.3 Vybrané pojmy a vlastnosti (rovnoběžného) promítání

Hlavní rovina je (každá) rovina rovnoběžná s průmětnou π , viz rovina $\tau \parallel \pi$ na Obr. 4.7.

Z Obr. 4.7 a s ním spojených online appletů je zřejmé, že *obrazem přímky ležící v hlavní rovině (jinak řečeno, přímky rovnoběžné s průmětnou) je v obou typech promítání přímka, která je s ní rovnoběžná*. V případě rovnoběžného promítání navíc platí, že *průmětem (obrazem) útvaru ležícího v hlavní rovině je útvar s ním shodný*.

³Dvojpoměr můžeme definovat takto: Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$. Více viz Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 19–30

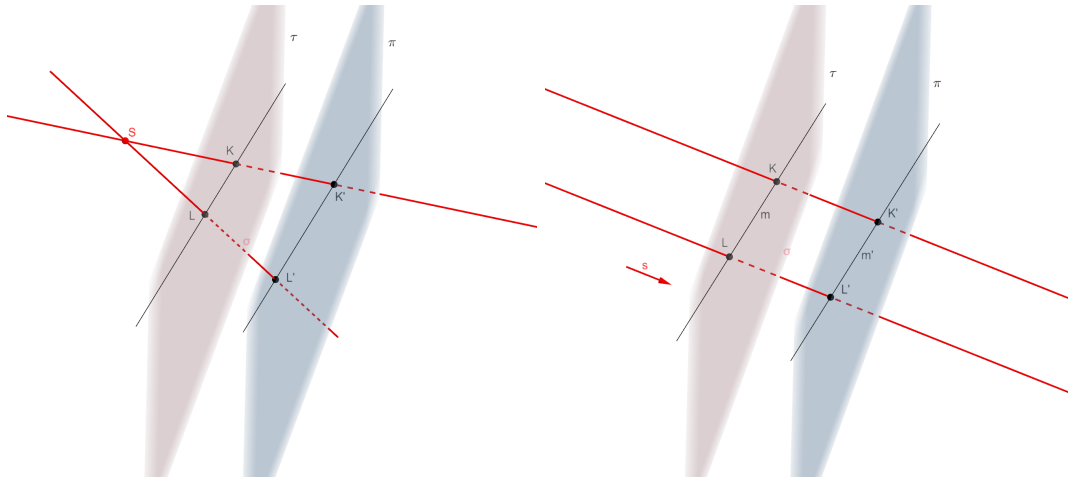


Figure 4.7: Hlavní rovina τ ve středovém (vlevo) a v rovnoběžném (vpravo) promítání.

Příklad 4.2. *Jak je uvedeno výše, v případě rovnoběžného promítání je průmětem útvaru ležícího v hlavní rovině útvar s ním shodný. Jak je tomu ve středovém promítání? Existuje i zde nějaká souvislost mezi obrazem ležícím v hlavní rovině a obrazem, který je jeho obrazem? Vysvětlete!*

Nadále se budeme zabývat výhradně *rovnoběžným promítáním*. Budeme při tom často odkazovat na následující vlastnosti *rovnoběžného promítání*:

1. *Průmětem přímky je přímka nebo bod.*
2. *Průmětem roviny je celá průmětna nebo přímka.*
3. *Průmětem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky nebo dva body.*

Příklad 4.3. *Každou z uvedených vlastností ilustrujte 3D obrázkem nakresleným v prostředí GeoGebra Grafický náhled 3D.*

Příklad 4.4. *Platí výše uvedené vlastnosti 1–3 také pro středové promítání? Pokud ne doslova, platí alespoň nějaké analogie? Vyslovte je!*

Třetím podprostorem trojrozměrného bodového prostoru vedle bodu a přímky je *rovina*. Uvedeme si zde proto ještě klíčové pojmy, s kterými při zobrazování rovin pracujeme, viz Obr. 4.8.

Stopa roviny je průsečnice roviny s průmětnou, viz Obr. 4.8, přímka $p \equiv \rho \cap \pi$. *Hlavní přímka roviny* je každá přímka, která leží v příslušné rovině a je rovnoběžná s průmětnou, viz Obr. 4.8, přímky h_1, h_2 . *Spádová přímka roviny* je přímka, která leží v příslušné rovině a je kolmá na její

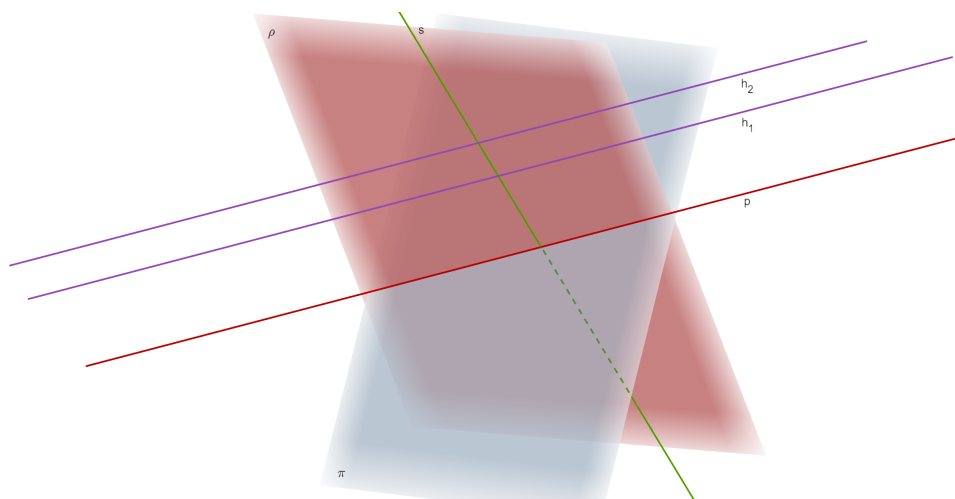


Figure 4.8: Rovina ρ a její stopa p , hlavní přímky h_1 , h_2 a spádová přímka s

hlavní přímky, viz Obr. 4.8, přímka s . Z uvedeného je patrné, že stopu roviny můžeme považovat za speciální případ hlavní přímky a že spádová přímka je kolmá i ke stopě roviny.

Kapitola 5

Kosoúhlé promítání

Kosoúhlým promítáním rozumíme rovnoběžné promítání, při němž je směr

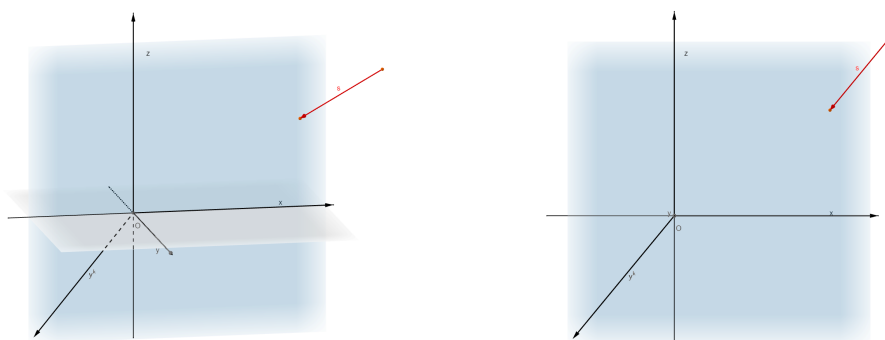


Figure 5.1: Princip kosoúhlého promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět

promítání kosý k průmětně (tzv. průmětně kosoúhlého promítání). [1]
Kosoúhlé promítání je zpravidla určeno průměty os pravoúhlé souřadnicové

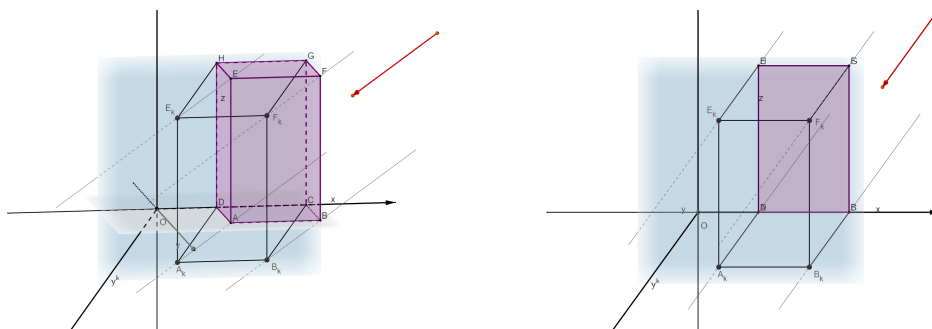


Figure 5.2: Kvádr v kosoúhlém promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět kvádrů

soustavy, jejíž jedna souřadnicová rovina je totožná (obecně předpokládáme,

že rovnoběžná) s průmětnou, viz Obr. 5.1.

5.1 Zadání kosoúhlého promítání

Kosoúhlé promítání je většinou určeno průměty os pravouhlé soustavy souřadnic (x, y, z) . V literatuře se setkáme s použitím jak pravotočivé, tak i levotočivé soustavy. My budeme používat *levotočivou soustavu souřadnic*, viz Obr. 5.3 i všechny předchozí ilustrace kosoúhlého promítání, stejně jako v *Mongeově promítání*.

Jak bylo uvedeno dříve, průmětna kosoúhlého promítání je rovnoběžná, většinou přímo totožná, s jednou ze souřadnicových rovin. Na Obr. 5.3 je to

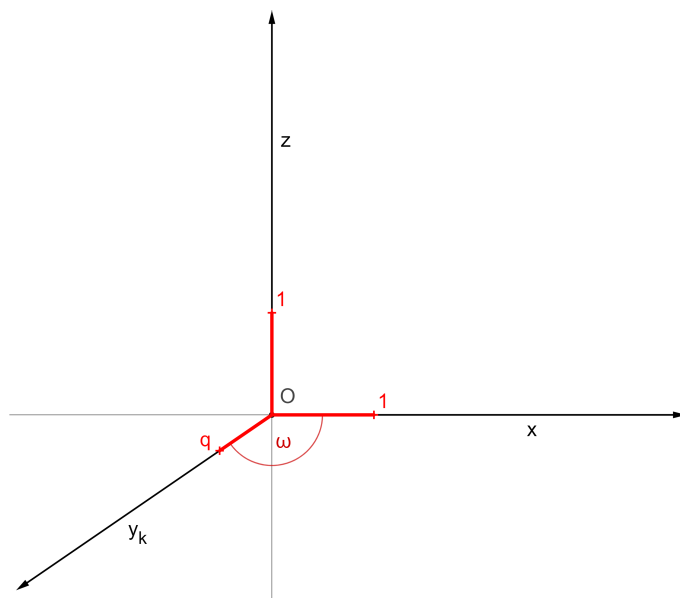


Figure 5.3: Kosoúhlé promítání (ω, q) - zadání osovým křížem

rovina xz . Velikost kosoúhlého průmětu jednotkové úsečky na souřadnicové ose kolmé k průmětně, na Obr. 5.3 se jedná o kosoúhlý průmět y_k osy y , se nazývá *poměr zkrácení* (též *poměr (kvocient) zkreslení*) a značí se q . Osy x a z jsou totožné se svými kosoúhlými průměty, značíme je tedy x, z . Osa y je orientována “proti nám”, kolmo k průmětně. Jejím kolmým průmětem je bod O . Pracujeme tedy s jejím kosoúhlým průmětem y_k , jehož jednotky ale vidíme zkreslené koeficientem q , jak bylo uvedeno. Orientovaný úhel kosoúhlých průmětů y_k a x (při “naší” volbě průmětny kosoúhlého promítání rovnoběžné s rovinou xz) se nazývá *úhel kosoúhlého promítání* (též *úhel zkosení*) a značí se ω , mluvíme pak o kosoúhlém promítání (ω, q) ,

viz Obr. 5.3.

5.2 Zobrazení bodu v kosoúhlém promítání

Příklad 5.1. V kosoúhlém promítání, které je zadáno úhlem zkosení $\omega = 135^\circ$ a poměrem zkreslení $q = 3/4$, sestrojte kosoúhlý průmět bodu $A = [3, 5, 6]$ (použijte levotočivou soustavu).

Pro určení polohy bodu vzhledem k souřadnicovým osám nestačí jenom jeho kosoúhlý průmět A_k (nehrozí-li mýlka, značíme jednoduše A) do průmětny π^k (případně označené pouze π). Je to pouze jeden bod, který nám neposkytne informaci, jak hluboko ve scéně je umístěn. Potřebujeme proto ještě jeden kolmý průmět bodu do jedné ze souřadnicových rovin. Používá se *půdorys*, tj. kolmý průmět A_1 do roviny xy . Ten se potom kosoúhle promítá do průmětny π^k (π) jako kosoúhlý půdorys A_{1k} .

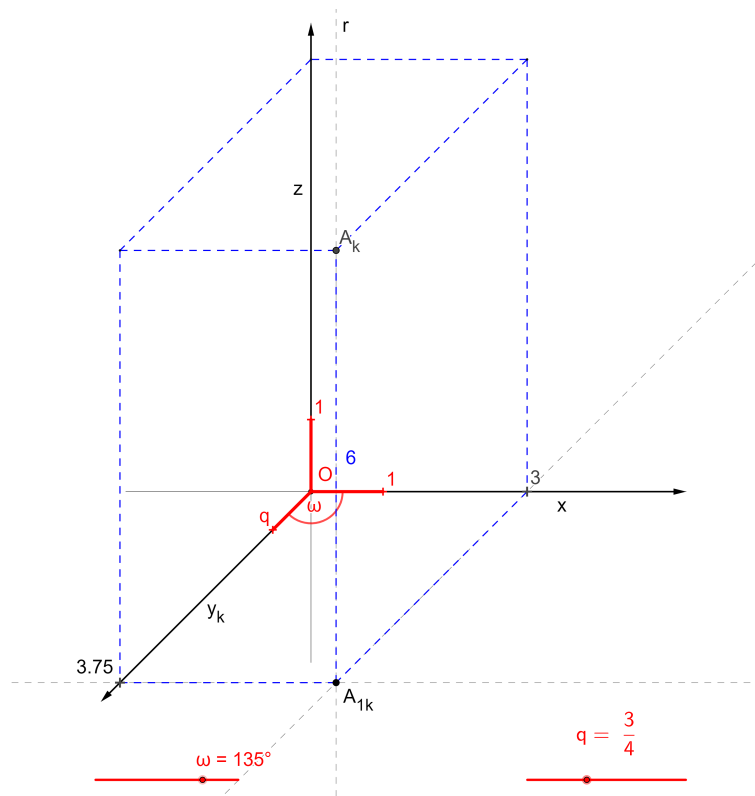


Figure 5.4: Kosoúhlé promítání ($135^\circ, 3/4$): Zobrazení bodu $A[3, 5, 6]$

Příklad 5.2. V kosoúhlém promítání ($120^\circ, 1/2$) zobrazte body $K = [-2, 6, 5]$, $L = [5, -4, 3]$.

5.3 Vybrané druhy kosoúhlého promítání

- **Kavalírní perspektiva**

Průmětnou je $\nu = (xz)$, $\omega = 135^\circ$, $q = 1$ (izometrie)¹

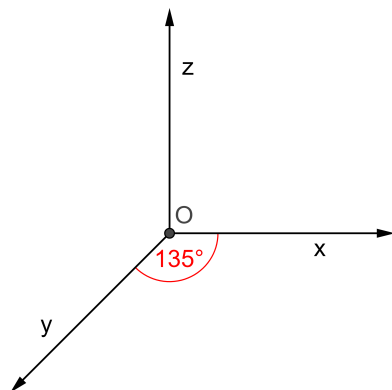


Figure 5.5: Vojenská perspektiva

- **Vojenská perspektiva (plánometrie)**

Průmětnou je $\pi = (xy)$, $\omega = 135^\circ$, $q = 1$ (izometrie)

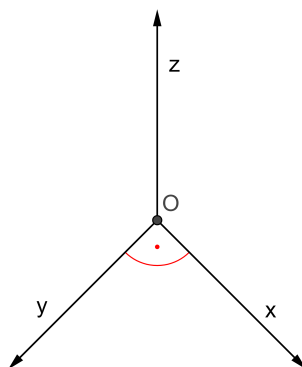


Figure 5.6: Vojenská perspektiva

¹Podle vztahu velikostí jednotek j_x, j_y, j_z (hovoříme o axonometrických jednotkách, viz kapitola **Axonometrie**) na jednotlivých osách soustavy souřadnic $O(xyz)$ označujeme příslušné promítání přívlastkem:

- ISOMETRIE pro $j_x = j_y = j_z$,
- DIMETRIE pro $j_x = j_y \neq j_z$ nebo $j_x \neq j_y = j_z$ nebo $j_z \neq j_x = j_y$,
- TRIMETRIE pro $j_x \neq j_y \neq j_z \neq j_x$.

- **Volné rovnoběžné promítání**

Nejsou zobrazeny osy, $\omega = 135^\circ$, $q = 1/2$

5.4 Volné rovnoběžné promítání

Volné rovnoběžné promítání je rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, v němž se obraz průmětu útvaru sestavuje užitím vět platících pro rovnoběžné promítání, viz str. 25, a to bez zadání obrazů průmětů os souřadnicové soustavy. [1]

Volné rovnoběžné promítání je základní metodou zobrazení trojrozměrných těles používanou ve výuce na základní a střední škole.

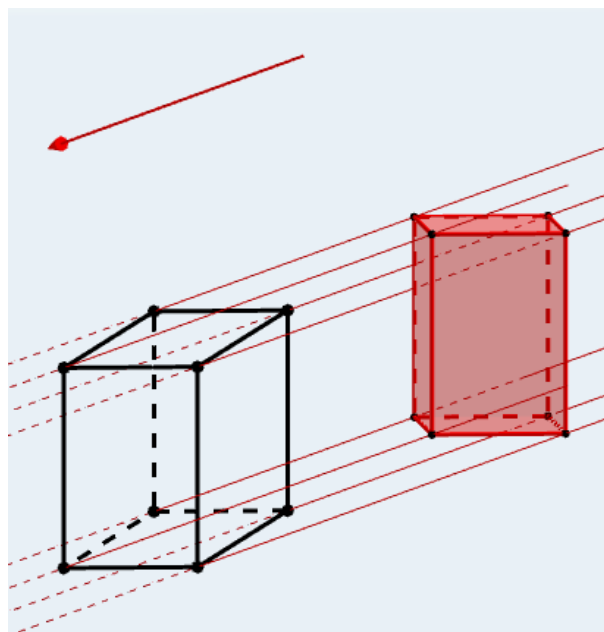


Figure 5.7: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kváдру v *průčelné* poloze

*Volným rovnoběžným promítáním (nazývá se též zkráceně *Volné promítání*) nazýváme rovnoběžné promítání, u kterého nezadáváme souřadnicové osy (přesněji jejich průměty). Při zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání dbáme na dodržení těchto vlastností (viz Obr. 5.7):*

- * *Průmětem libovolné přímky je buď přímka nebo bod.*
- * *Průmětem libovolných dvou rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (mohou i splývat) nebo dva body.*
- * *Průmětem každého geometrického útvaru, který leží v průčelné rovině (tj. v rovině rovnoběžné s průmětnou) je útvar s ním shodný.*

- * Geometrický útvar, který neleží v průřelné rovině se zpravidla zkresluje. Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky AB , CD a jejich obrazy $A'B'$, $C'D'$ platí $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$.
- * Obrazy úseček kolmých k průmětně (tj. k jakékoliv průřelné rovině) jsou vzájemně rovnoběžné a s vodorovným směrem (představme si třeba směr kladné poloosy x) svírají úhel φ (zpravidla volíme $\varphi = 45^\circ$). Velikost obrazu každé takové úsečky je potom q násobkem velikosti původní úsečky, tj. pro každou úsečku KM kolmou k průmětně a její obraz $K'M'$ platí $|K'M'| = q|KM|$ (zpravidla volíme $q = \frac{1}{2}$).

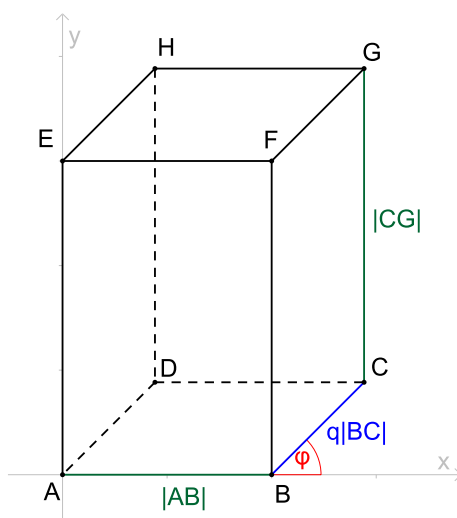
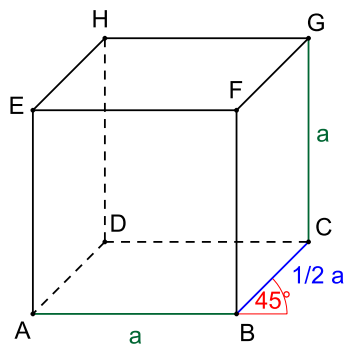
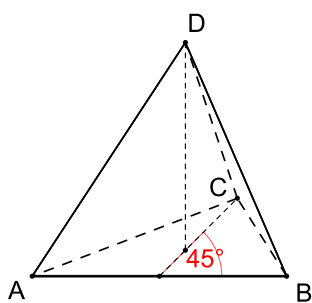
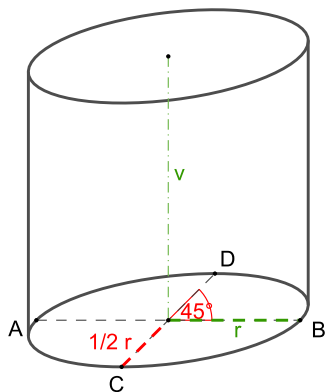


Figure 5.8: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádrů $4 \times 5 \times 6$

Příklad 5.3. *Výše uvedené tvrzení “Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky AB , CD a jejich obrazy $A'B'$, $C'D'$ platí $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$ ” je důsledkem invariantnosti dělicího poměru v rovnoběžném promítání. Vysvětlete!*

Příklad 5.4. *Naučte se načrtnout od ruky krychli, pravidelný čtyřstěn a válec ve volném rovnoběžném promítání ($\varphi = 45^\circ$, $q = 1/2$), viz Obr. 5.9, 5.10 a 5.11.*

Figure 5.9: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení krychle $a \times a \times a$ Figure 5.10: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení pravidelného čtyřstěnu s hranou délky a Figure 5.11: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení válce s poloměrem r a výškou v

Elipsa kosoúhlého průmětu podstavy válce je určena svými *sdrúženými průměry* AB , CD , viz Obr. 5.11. Pro nalezení jejich os a vrcholů použijeme *Rytzovu konstrukci*.

5.5 Slabiny kosoúhlého promítání

Výsledek kosoúhlého promítání je názorný, ale neodpovídá realitě. Evidentní je to v případě zobrazení koule, viz Obr. 5.12, jejímž průmětem je

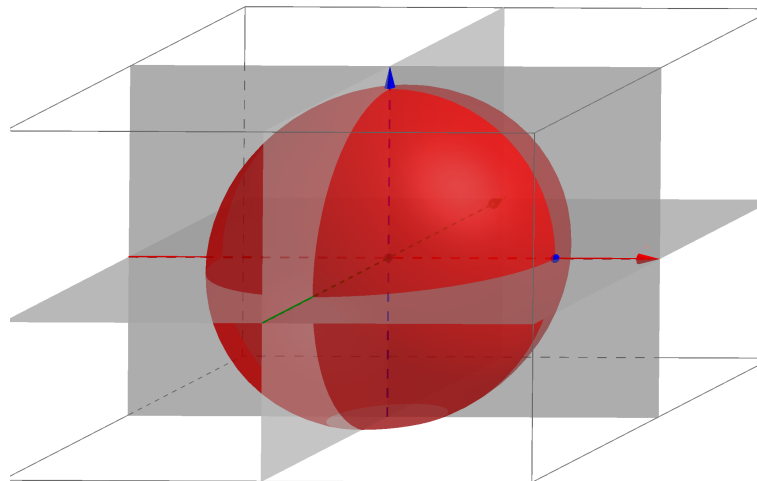


Figure 5.12: Koule v kosoúhlém promítání; provedeno v programu GeoGebra

elipsa. Podobný efekt, i když méně patrný, se projevuje i při zobrazení válce nebo kužele, kdy délka hlavní poloosy elipsy podstavy je větší než poloměr příslušného kruhu. Při zobrazení kvádru nebo krychle (ale platí to samozřejmě naprosto obecně) se zase dobře projevuje absence zohlednění hloubky scény, kdy není rozdíl v zobrazení stejně vysokých hran, které jsou od pozorovatele různě daleko (jak známe z reálného světa a jak je uplatněno při perspektivním zobrazení). Nejedná se o nedostatky či chyby, jedná se o přirozený důsledek skutečnosti, že se jedná o rovnoběžné promítání ve směru kosém vzhledem k průmětně.

Kapitola 6

Pravouhlá axonometrie

Axonometrie je rovnoběžné promítání, pravouhlé (kolmé) nebo kosoúhlé, na tzv. *axonometrickou průmětnu* ρ , která je různoběžná se všemi třemi souřadnicovými rovinami $\pi = (x, y)$, $\nu = (y, z)$ ($\nu = (x, z)$, pro levotočivou soustavu), $\mu = (x, z)$ ($\mu = (y, z)$, pro levotočivou soustavu), viz Obr. 6.1. My se budeme nadále zabývat výhradně *pravouhlou axonometrií*, tj. kolmým rovnoběžným promítáním na axonometrickou průmětnu ρ . Protože to je jediná axonometrie, které se budeme věnovat, a nehrozí tak záměna s jiným typem tohoto zobrazení, budeme v tomto textu pro pravouhlou axonometrii pro jednoduchost používat termín *axonometrie*.

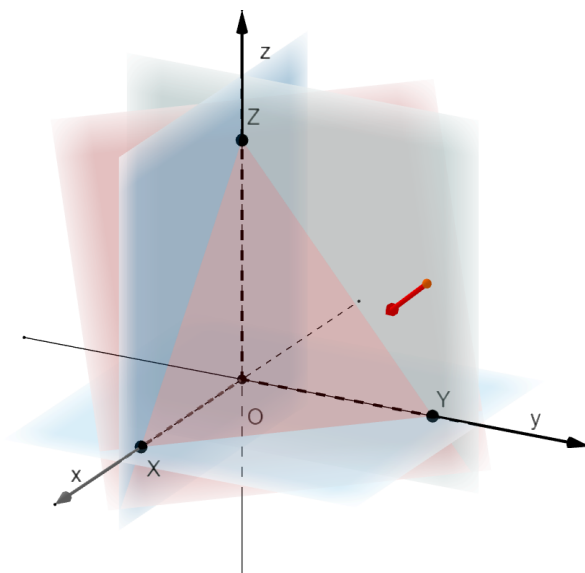


Figure 6.1: Podstata pravouhlé axonometrie, názorný pohled

6.1 Zadání axonometrie

Osy x, y, z soustavy souřadnic se v axonometrii promítají do tří různých přímek, s různě velkými průměty jednotek, viz Obr. 6.3. Axonometrie je obecně *trimetrií*.

Věta 6.1 (Pohlkeova věta). *Tři úsečky v rovině se společným koncovým bodem a neležící na jedné přímce můžeme považovat za rovnoběžný průmět tří navzájem kolmých, shodných úseček se společným koncovým bodem v prostoru (viz Obr. 6.2).*

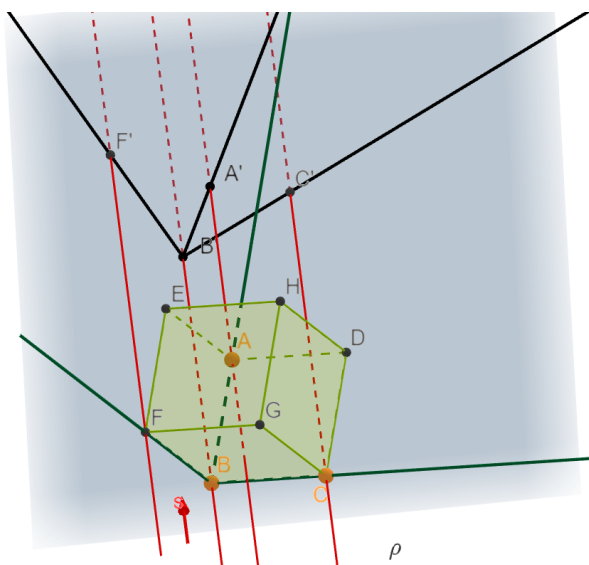


Figure 6.2: Pohlkeova věta, ilustrace

Pravoúhlý trojhran

Axonometrii můžeme zadat *axonometrickým osovým křížem* spolu s *axonometrickými jednotkami*, hovoříme o tzv. *pravoúhlém trojhranu*, viz Obr. 6.3. Výše uvedená Pohlkeova věta poukazuje na skutečnost, že každé tři polopřímky neležící v přímce mohou být rovnoběžným průmětem osového kříže xyz kartézské soustavy souřadnic.

Axonometrický trojúhelník

Většinou však axonometrii zadáváme prostřednictvím tzv. *axonometrického trojúhelníku* XYZ . Jeho vznik je patrný z Obr. 6.4, strany axonometrického trojúhelníku jsou tvořeny průsečnicemi axonometrické průmětny se souřadnicovými rovinami. Je třeba mít na paměti, že na Obr. 6.4 je názorný průmět na situaci vzniku axonometrického trojúhelníku. Samotný

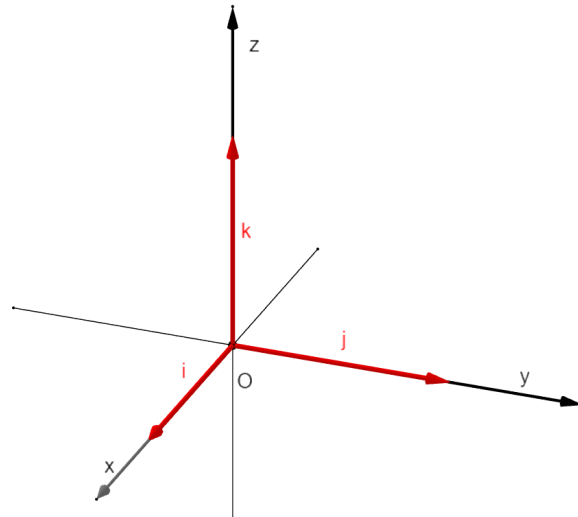


Figure 6.3: Pravoúhlý trojhran

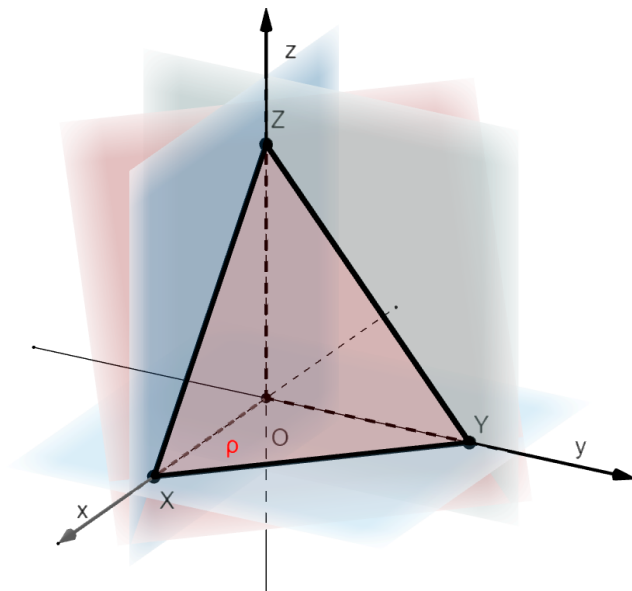


Figure 6.4: Původ astronomického trojúhelníku

axonometrický průmět uživatel nahlíží z perspektivy axonometrické průmětny na kterou hledí kolmo! Zadání axonometrie pomocí axonometrického trojúhelníku proto vypadá jako na Obr. 6.5. Použití axonometrického trojúhelníku pro zadání axonometrie je umožněno jeho následujícími vlastnostmi.

Axonometrický trojúhelník

- se zobrazuje ve skutečné velikosti,
- je vždy ostroúhlý a

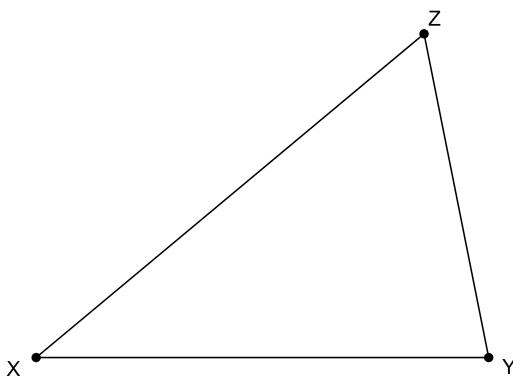


Figure 6.5: Axonometrický trojúhelník

- souřadnicové osy se promítají do jeho výšek.

Příklad 6.1. V axonometrii, která je zadána axonometrickým trojúhelníkem XYZ o stranách 5, 4, 5 (v pořadí stran x, y, z), sestrojte axonometrický průmět bodu $A = [3, 5, 6]$ spolu s jeho souřadnicovým kvádrem.

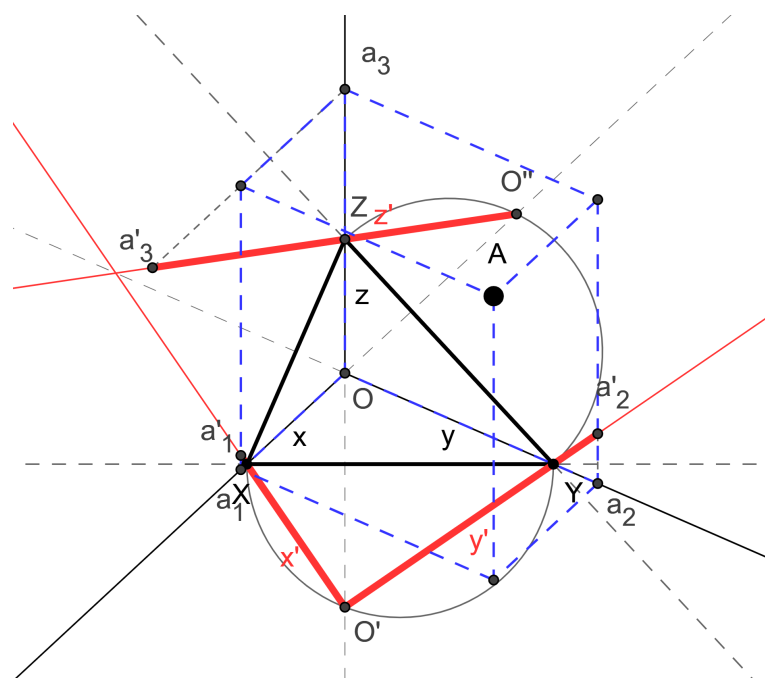


Figure 6.6: Axonometrie; řešení příkladu 6.1

Poznámka. Axonometrie v širším smyslu tohoto pojmu, tj. kosoúhlá i pravoúhlá, je obecným označením rovnoběžného promítání na jednu průmětnu. Kosoúhlé promítání, pojednávané v kapitole 5 je tak speciálním případem axonometrie. Slovo *axonometrie* je řeckého původu (*aksonometria*), složené z *axon* (osa) a *metria* (míra).

Kapitola 7

Kolmé promítání

Kromě metod názorného promítání, z nichž s některými jsme se seznámili v předcházejících kapitolách, používáme pro zachycení informací o prostorovém útvaru také jeho *kolmé* (též *pravoúhlé*) průměty do jedné, dvou i více průměten. Je-li průměten více, jsou na sebe kolmé a podle jejich orientace vzhledem k zobrazovanému objektu je označujeme jako *nárysnu* (průmětna rovnoběžná s frontální rovinou), *půdorysnu* (vodorovná průmětna) a *bokorysnu* (kolmá na nárysnu i půdorysnu). Příslušné průměty potom nazýváme *nárys*, *půdorys* a *bokorys*. Role uvedených tří rovin překračuje hranice deskriptivní geometrie, analogické roviny například určují tzv. *anatomické směry*, viz Obr. 7.1.

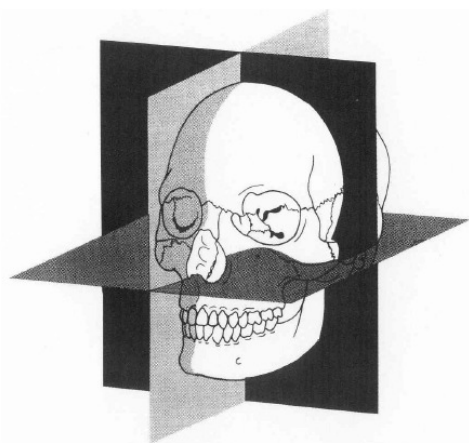


Figure 7.1: Nárys, půdorys a bokorys (H. Stachell: *The status of today's descriptive geometry related education in Europe*)

S *nárysem*, *půdorysem* a *bokorysem* se samozřejmě setkáme v grafických 3D softwarech, kde jsou tyto kolmé průměty často kombinovány s názorným průmětem útvaru, viz Obr. 7.2

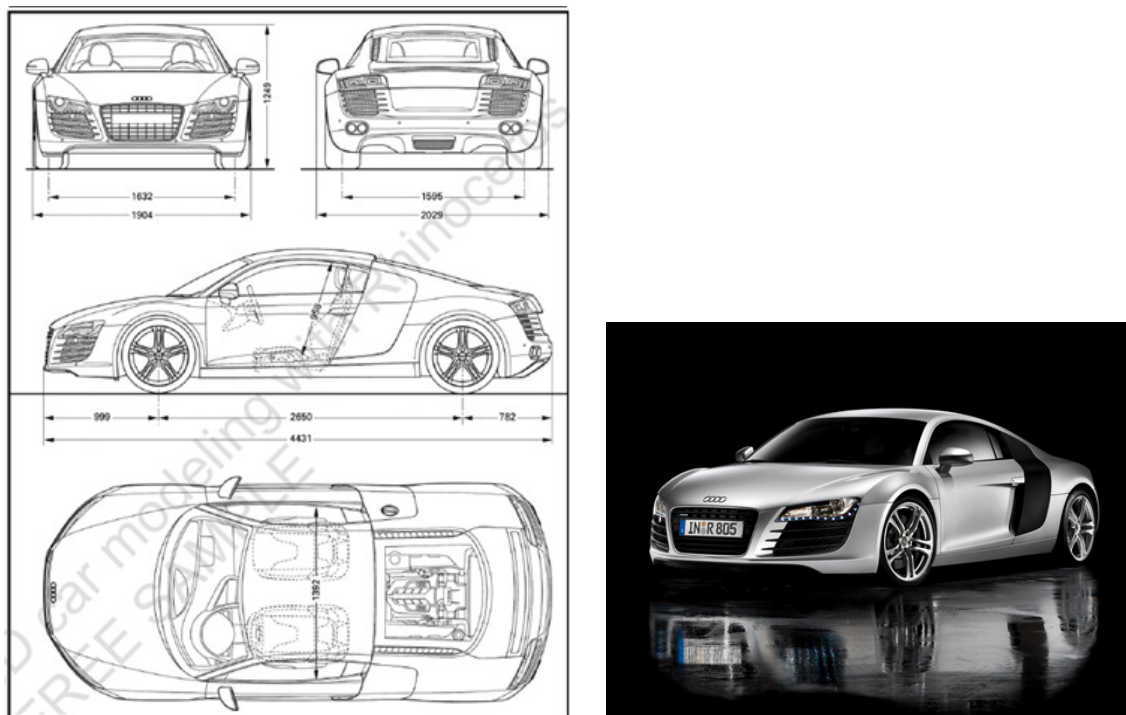


Figure 7.2: Audi R8 (www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf)

7.1 Stavby z krychlí

Stavbou z krychlí (říkáme též *stavba z kostek* nebo *krychlová stavba*) rozumíme na podložce volně stojící mnohostěn, který vznikne složením několika krychlí stejných rozměrů tak, že sousední dvě krychle k sobě přiléhají vždy celými stěnami.

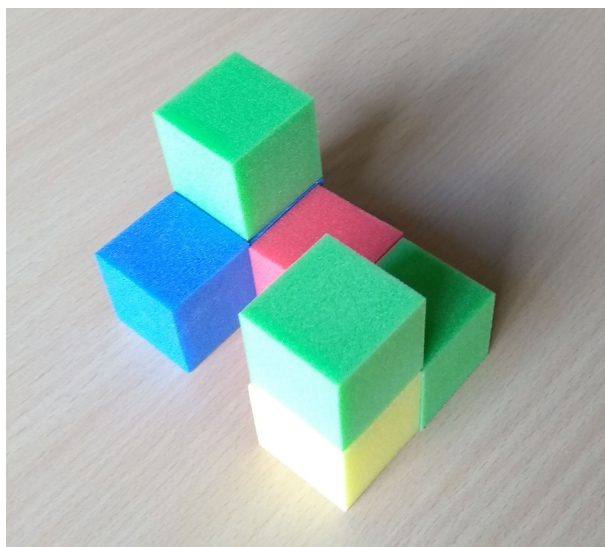


Figure 7.3: Stavba z kostek

Příklad 7.1. *Zobrazte nárys, půdorys a bokorys stavby z kostek uvedené na Obr. 7.3. Představte si, že stavbu rozeberete a potom ji chcete zrekonstruovat z těchto průmětů. Je jimi její tvar určen jednoznačně?*

Řešení: Nárys, půdorys a bokorys tělesa z Obr. 7.3 vidíme na Obr. 7.4. Je zřejmé, že těmito třemi průměty není daná stavba jednoznačně určena.

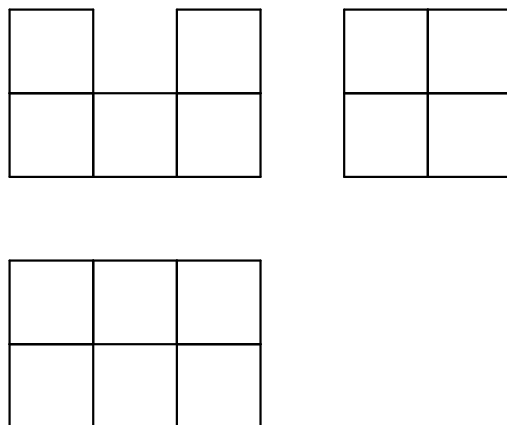


Figure 7.4: Stavba z Obr. 7.3 – nárys, půdorys a bokorys

Existuje více různých těles postavených z kostek, které mají stejné průměty. Zkuste nějaké takové těleso načrtnout ve volném rovnoběžném promítání.

7.2 Kótovaný půdorys

Přesto existuje možnost, jak stavbu z krychlí jednoznačně určit jenom jedním průmětem! Jedná se o tzv. *kótovaný půdorys*, tj. půdorys, v němž

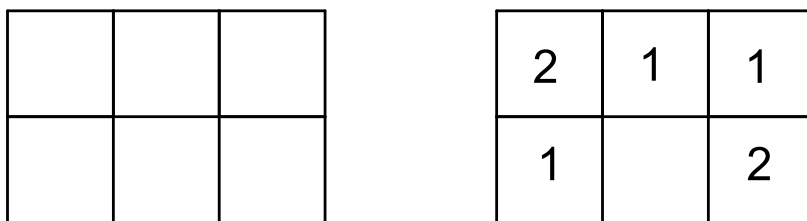


Figure 7.5: Půdorysy stavby z kostek – běžný (vlevo) a kótovaný (vpravo)

je v každém čtverečku představujícím sloupec kostek uvedeno číslo odpovídající

počtu kostek v tomto sloupci. Srovnání běžného a kótovaného půdorysu tělesa z Obr. 7.3 vidíme na Obr. 7.5.

Kapitola 8

Kótované promítání

Kótované promítání je pravoúhlé (kolmé) promítání na jednu (vodorovnou) průmětnu. Této průmětně říkáme *půdorysna* a obvykle jí značíme π . Průmět bodu do této průmětny nazýváme *kótovaný průmět*. Přívlastkem *kótované/kótovaný* vyjadřujeme skutečnost, že u průmětu bodu je v závorce uvedena orientovaná vzdálenost bodu od průmětny (tj. jeho z -ová souřadnice), které říkáme *kóta*.

8.1 Zobrazení bodu

Podstata kótovaného promítání je na jednoduchém příkladu zobrazení bodu ilustrována Obr. 8.1. Uvažujme bod $A = [5, 3, 7]$. Vlevo na obrázku je

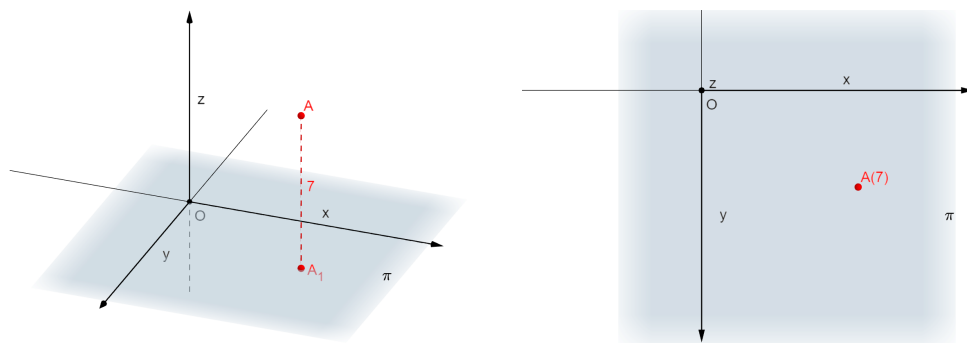


Figure 8.1: Bod A v prostoru 3D; vlevo názorný průmět vpravo kótovaný průmět

zachycen *názorný průmět* (konkrétně se jedná o axonometrický průmět) jeho umístění vzhledem k souřadnicovým osám (pracujeme s levotočivou soustavou) a speciálně vzhledem k rovině (x, y) , která hraje roli průmětny π . Vpravo je potom zobrazen *kótovaný průmět* bodu A , tj. jeho kolmý (pravoúhlý) průmět do roviny π s vyznačenou kótou (z -ovou souřadnicí). Nutno dodat, že se jedná o ilustrační obrázek. V praxi samozřejmě nevy-

barvujeme průmětnu, souřadnicové osy rýsujeme co nejméně nápadně (osu y ani rýsovat nemusíme) a kótovaný průmět bodu vyznačíme křížkem a pro zápis jeho označení a kóty použijeme černou barvu, viz Obr. 8.2. Kótovaný průmět bodu navíc značíme dolním indexem $_1$, jedná se totiž vlastně o *kótovaný půdorys* bodu. Kótovaný průmět bodu A na Obr. 8.1 vpravo by tak měl být zapsán jako $A_1(7)$. Nutno ovšem dodat, že je-li z kontextu úlohy zřejmé, že se jedná o kótovaný půdorys, index $_1$ můžeme beztrestně vynechat.

Příklad 8.1. V kótovaném promítání zobrazte průměty bodů $K = [3, 5, -4]$, $L = [-2, 0, 2]$.

Řešení:

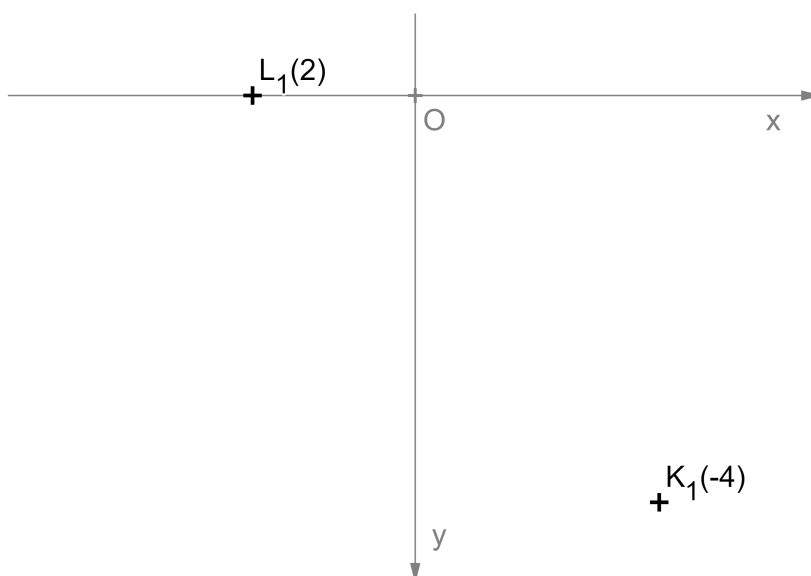


Figure 8.2: Zobrazení bodů K, L v kótovaném promítání

8.2 Zobrazení přímky

Průmětem přímky je *přímka* nebo *bod*. Bod $P \equiv a_1$ je kolmým průmětem přímky a , která je kolmá k průmětně, tj. $a \perp \pi$. Přímka a_1 je kolmým průmětem přímky a , která není kolmá k průmětně, tj. $a \not\perp \pi$. Průmětem přímky je v tomto případě průsečnice a_1 kolmé promítací roviny κ s průmětnou π , viz Obr. 8.3, vpravo.

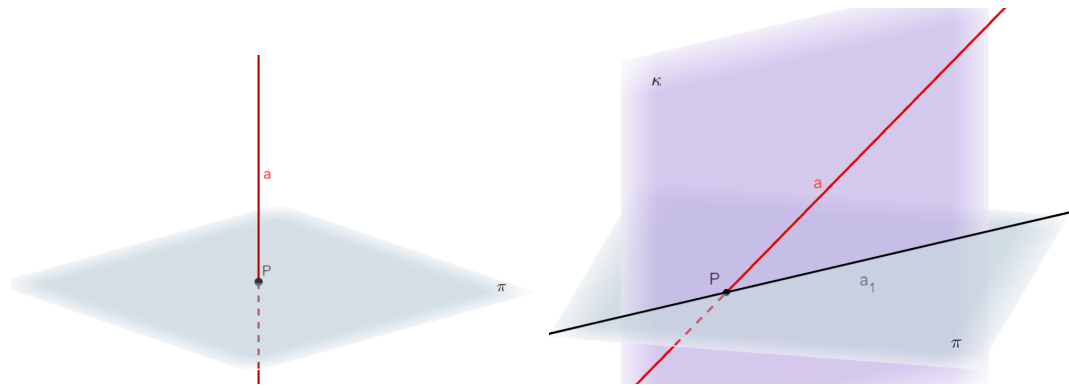


Figure 8.3: Přímka v kolmém promítání; vlevo kolmým průmětem přímky kolmé k průmětně je bod, vpravo kolmý průmět přímky jako průsečík kolmé promítací roviny s průmětnou

Zobrazení přímky v kótovaném promítání vidíme na Obr. 8.4 vpravo. Průmět přímky v kótovaném promítání je určen průměty dvou jejích bodů. Zajímá nás, jak lze z takto zobrazené přímky, bez jakéhokoliv názorného průmětu, zjistit průsečík této přímky s průmětnou (říkáme mu *stopník*), její *odchylku od průmětny* a *skutečnou vzdálenost* dvou jejích bodů (hovoříme o *skutečné velikosti úsečky*).

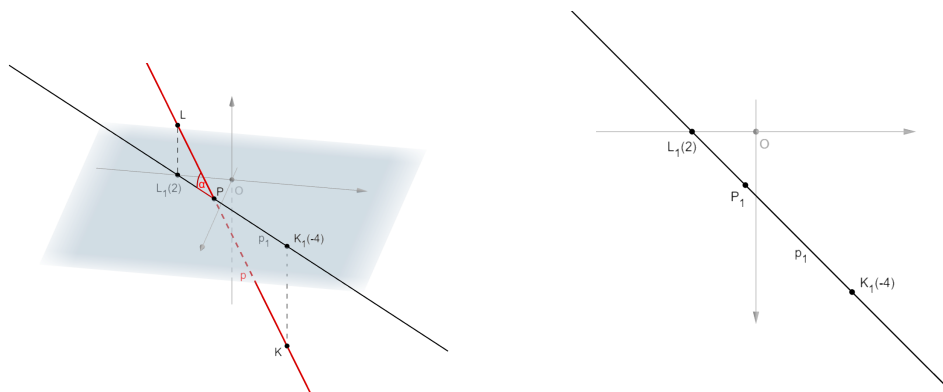


Figure 8.4: Přímka KL v prostoru 3D; vlevo názorný průmět vpravo kótovaný průmět

Příklad 8.2. V kótovaném promítání zobrazte přímku p , která je určena body A, B ; $A[-2, 3, -4]$, $B[3, -1, 2]$. Určete její průsečík s průmětnou, tj. stopník P , a její odchylku od průmětny α .

Řešení: Úlohu řešíme *sklopením promítací roviny* přímky p . V názorném promítání je postup řešení příkladu naznačen na Obr. 8.5. Přímku p vedeme promítací rovinu, kterou následně sklopíme, abychom celou situaci viděli z jiného úhlu pohledu, konkrétně ze směru kolmého na promítací rovinu. Je potom jasné, že stopník P je průsečíkem kolmého průmětu

p_1 přímky p a obrazu (p) přímky p ve sklopení. Stejně tak odchylna přímky p od průmětny je stejná, jako odchylna sklopené přímky (p) od kolmého průmětu p_1 přímky p . Toto vše je zřejmé z názorného zobrazení

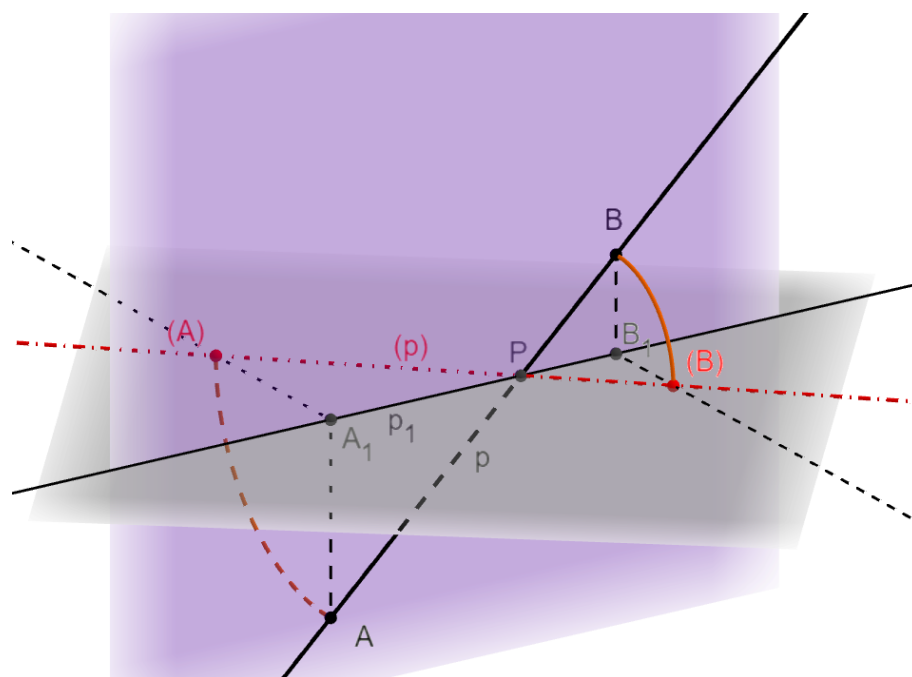


Figure 8.5: Názorné zobrazení řešení příkladu 8.2

celé situace příkladu 8.2. Jak ale příslušné řešení provedeme v kótovaném promítání, tj. v situaci, kdy je přímka určena průměty dvou svých bodů a my jsme omezeni pouze na kolmé promítání do průmětny π ? Postup řešení

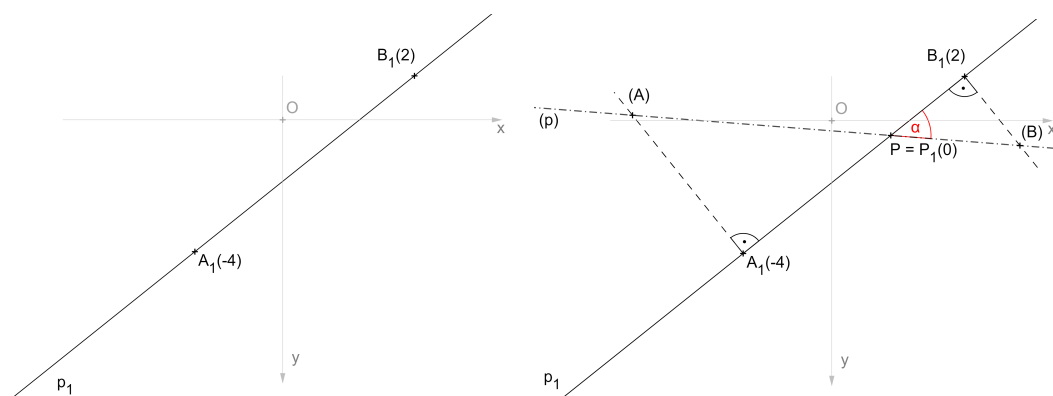


Figure 8.6:

je naznačen na Obr. 8.6, kde vlevo vidíme zadání, vpravo potom výsledek. Konkrétní kroky postupu řešení jsou zřejmé. Řešíme sklopením promítací roviny přímky p do průmětny. Jak je naznačeno na Obr. 8.5, v pravouhlém

Příklad 8.4. Jak z kótovaných průmětů bodů A, B poznáme, že přímka AB je

- rovnoběžná s průmětnou,
- kolmá k průmětně,
- incidentní s průmětnou,
- různoběžná s průmětnou?

Jednotlivé polohy přímka AB ilustруйте konkrétními příklady

8.3 Stupňování přímky

Stupňování přímky je vyznačení bodů s celočíselnými kótami na přímce. Říkáme, že přímku *stupňujeme*, a že je tím na ní dána *stupnice*. Názorný

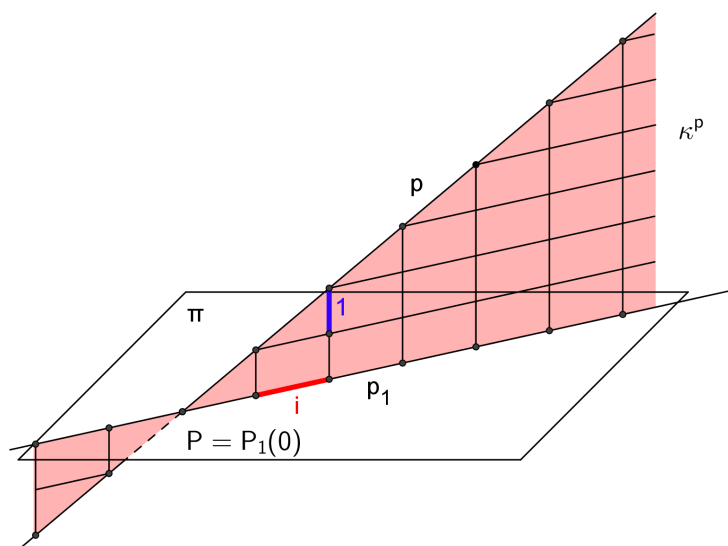


Figure 8.8: Princip stupňování přímky

průmět přímky p se stupnicí, spolu s její kolmou promítací rovinou κ , je zachycen na Obr. 8.8. Výškový rozdíl dvou sousedních bodů stupnice přímky je roven 1, viz modrá úsečka, vzdálenost jejich půdorysů nazýváme *interval* přímky p , značíme ho i . Body stupnice přímky jsou analogií vrstevnic, které známe z map. Víme, že když jsou vrstevnice blízko u sebe, stoupání či klesání je v daném místě strmé. Zajímá nás, zda lze z hodnoty intervalu zjistit "strmost" příslušné přímky. Nejprve si ale zavedeme několik pojmů v této souvislosti používaných.

Na Obr. 8.9 vidíme uplatnění obecné metody stupňování přímky, která pracuje s rovnoběžkami s p_1 vedenými ve vzájemných vzdálenostech 1 (fialové přímky), jejichž průsečíky se sklopenou přímkou (p) jsou promítnuty (zelené přímky) na p_1 , aby tam vytvořily stupnici. Jedná se o robustní metodu, která nijak nezohledňuje specifika úlohy. Samozřejmě je možné uplatnit i jiné metody, citlivější k zadání, které jsou založeny na dělení úsečky na daný počet dílů, případně k rozvinutí stupnice využívají délku intervalu.

8.4 Zobrazení roviny

Průmětem roviny je celá průmětna nebo přímka. Na Obr. 8.10 vidíme situaci, kdy je rovina ρ různoběžná s průmětnou π . V takovém případě je průmětem roviny celá průmětna. Abychom s rovinou mohli v kótovaném promítání pracovat, a abychom mohli rozlišovat mezi různými rovinami různoběžnými s průmětnou, využíváme významné přímky roviny, kterými jsou stopa roviny p^ρ , tj. průsečnice roviny s průmětnou, hlavní přímky, viz např. h^ρ , tj. přímky rovnoběžné s průmětnou, a spádové přímky, viz např. s^ρ , tj. přímky roviny, které jsou kolmé na hlavní přímky a samozřejmě také na stopu roviny (která je vlastně speciálním případem hlavní přímky).

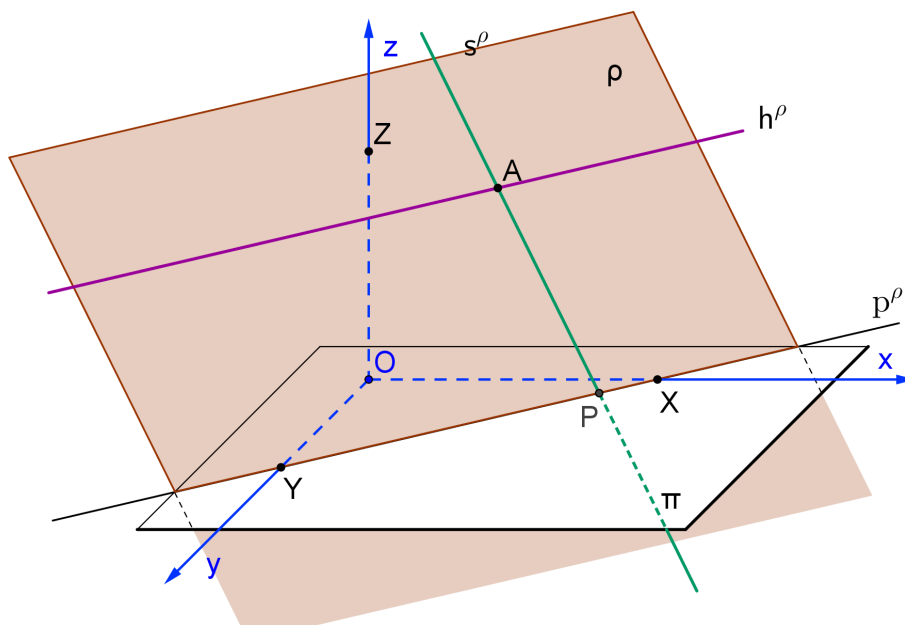


Figure 8.10: Názorné zobrazení principu zobrazení roviny v kótovaném promítání; rovina různoběžná s průmětnou

Kapitola 9

Mongeovo promítání

Výsledkem Mongeova promítání (M. p.)¹ jsou dva *sdužené průměty* zobrazeného objektu. Jedná se o kolmé průměty objektu do dvou navzájem kolmých průmětů, půdorysny π a nárysny ν , které jsou zobrazeny společně v důsledku sklopení půdorysny do nárysny, jak na příkladu zobrazení bodu X ilustruje Obr. 9.1.

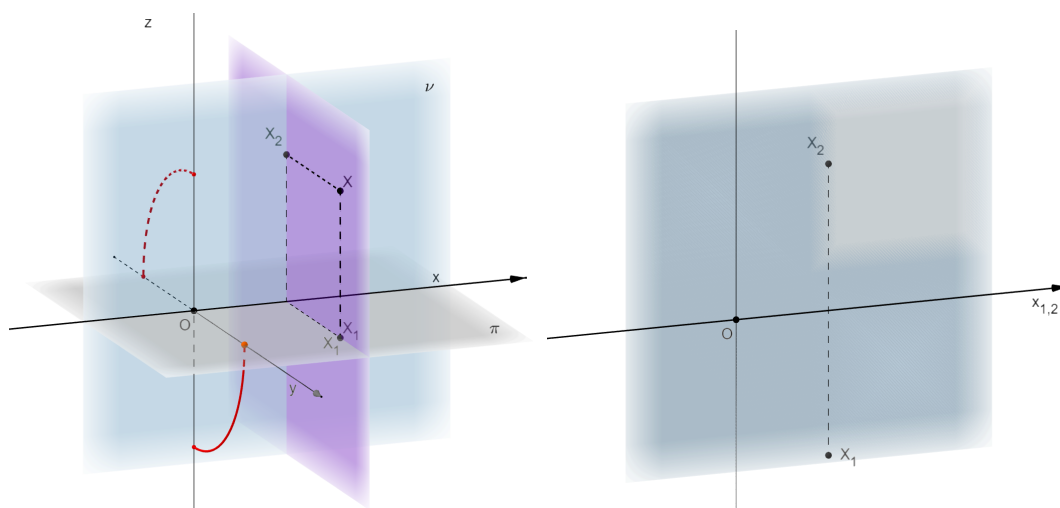


Figure 9.1: Mongeovo promítání; zobrazení bodu

Základní pojmy:

π ... půdorysna; ν ... nárysna; $x_{1,2}$... základnice; X_1, X_2 ... sdužené průměty; X_1 ... půdorys bodu X ; X_2 ... nárys bodu X ; X_1X_2 ... ordinála bodu X .

Příklad 9.1. V Mongeově promítání zobrazte sdužené průměty bodů $K = [2; 3; 4]$, $L = [-5; 4; 0]$, $M = [4; -5; -8]$.

¹Gaspard Monge, 1746–1818

9.1 Zobrazení přímky

Sdruženými průměty přímky a v obecné poloze vůči průmětnám jsou přímky a_1, a_2 , viz Obr. 9.2. Při zvláštních polohách přímky vůči průmětnám (Jaké to jsou?) může být jedním z průmětů bod.

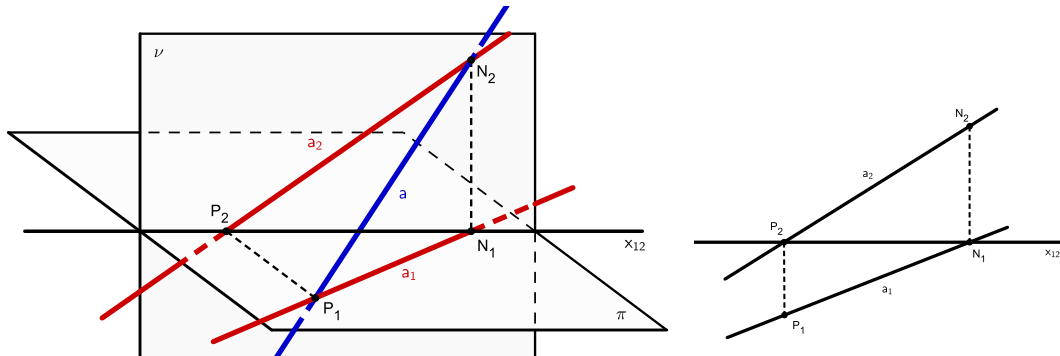


Figure 9.2: Mongeovo promítání; zobrazení přímky, vlevo názorný pohled, vpravo samotné Mongeovo promítání

Základní pojmy:

$a_1, a_2 \dots$ sdružené průměty přímky a ; $P \dots$ půdorysný stopník; $N \dots$ nárysný stopník.

Příklad 9.2. Sestrojte stopníky (jejich sdružené průměty) přímky a .

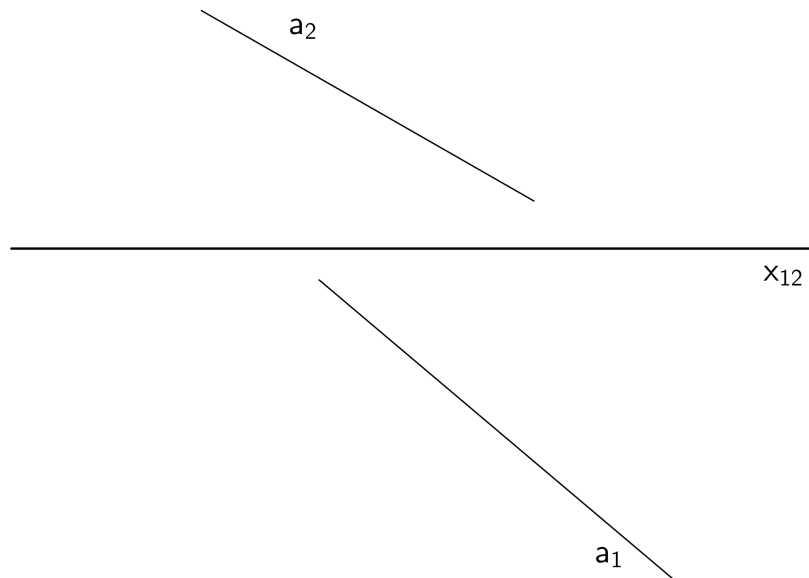


Figure 9.3: Sestrojte sdružené průměty stopníků přímky a

Na Obr. 9.2 je ilustrováno zobrazení přímky různoběžně s průmětnami

v Mongeově promítání. Promyslete si a načrtněte, jak budou vypadat sdružené průměty přímek, které vůči průmětnám zaujímají následující zvláštní polohy:

- přímka kolmá k průmětně,
- přímka kolmá k základnici,
- přímka rovnoběžná s půdorysnou; nazýváme jí *horizontální hlavní přímka* (též *hlavní přímka první osnovy*) h, h^I ,
- přímka rovnoběžná s nárysnou; nazýváme jí *frontální hlavní přímka* (též *hlavní přímka druhé osnovy*) f, f^{II} .

Příklad 9.3. Sestrojte sdružené průměty přímek v uvedených polohách.

Příklad 9.4. Sestrojte postupně sdružené průměty dvou rovnoběžných, různoběžných a mimoběžných přímek.

9.2 Zobrazení roviny

Rovina se v Mongeově promítání zobrazuje pomocí svých průsečnic s průmětnami, kterým říkáme *stopy roviny*. Rozlišujeme půdorysnou a nárysnou stopu, v případě roviny ρ je značíme p^ρ a n^ρ . Přitom vždy jeden ze sdružených průmětů každé stopy splývá se základnicí. Proto je rovina ρ (i každá jiná) zobrazena pomocí (půdorysu) půdorysné stopy p_1^ρ a (nárysu) nárysné stopy n_2^ρ , viz Obr. 9.4.

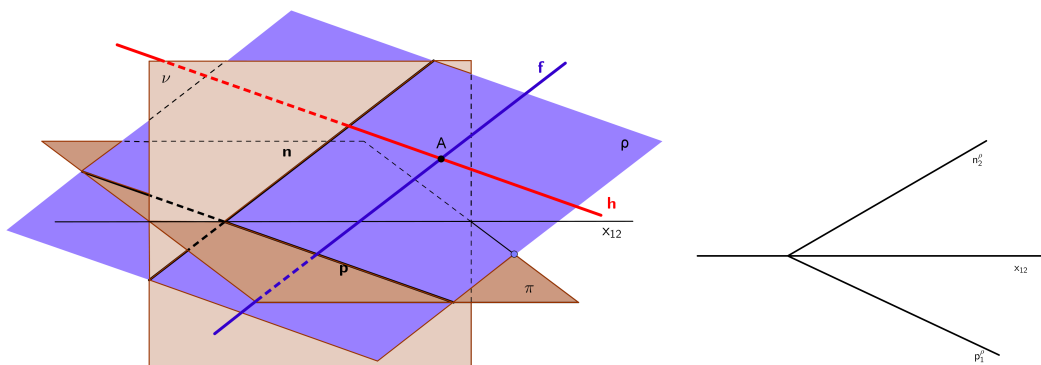


Figure 9.4: Mongeovo promítání; zobrazení roviny, vlevo názorný pohled, vpravo samotné Mongeovo promítání

Základní pojmy:

p_1^ρ, n_2^ρ ... půdorysná a nárysná stopa roviny ρ (přesněji půdorys půdorysné a nárys nárysné stopy ...), h^ρ ... horizontální hlavní přímka roviny ρ , f^ρ ... frontální hlavní přímka roviny ρ .

Specifické polohy hlavních přímek konkrétní roviny se projevují typickými vlastnostmi jejich sdružených průmětů, viz Obr. 9.5; nárys h_2 horizontální hlavní přímky je vždy rovnoběžný se základnicí, zatímco její půdorys h_1 je rovnoběžný s půdorysnou stopou p_1 , a naopak, půdorys f_1 frontální hlavní přímky je rovnoběžný se základnicí, zatímco její nárys f_2 je rovnoběžný s nárysnou stopou n_2 .

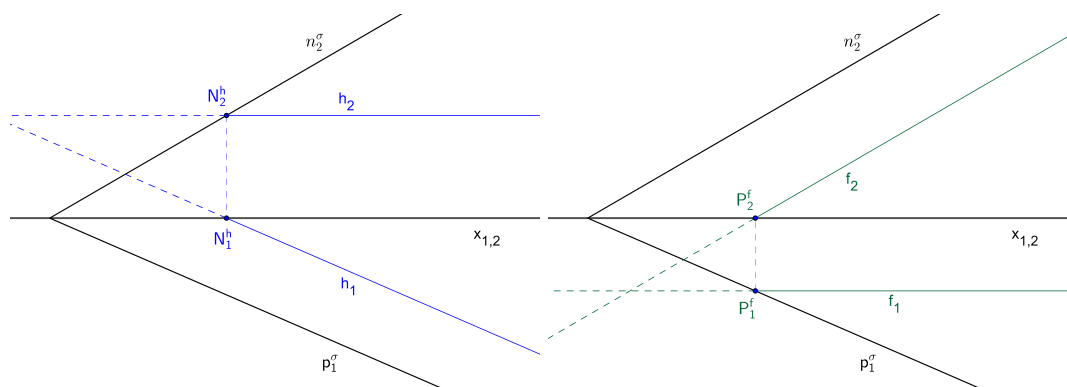


Figure 9.5: Mongeovo promítání; sdružené průměty horizontální a frontální hlavní přímky dané roviny

9.3 Zobrazení kružnice

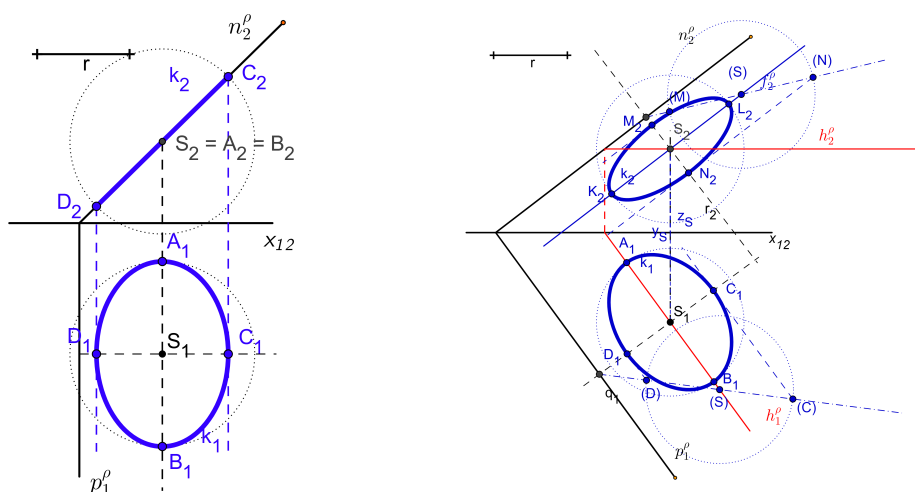


Figure 9.6: Mongeovo promítání; sdružené průměty kružnice, v rovině kolmé k nárysně, vlevo, a v rovině různoběžné s průmětnami, vpravo

Na Obr. 9.6 vidíme, jak vypadají sdružené průměty kružnice, která leží v rovině různoběžné s průmětnami. Nejprve je uvažována rovina kolmá k jedné z průměten, v případě obrázku se jedná o kolmost k nárysně, potom obecně umístěná rovina. Text popisku obrázku je prostřednictvím odkazů propojen s applety, v nichž lze každou ze zobrazených konstrukcí přehrávat krok za krokem. Součástí zobrazení sdružených průmětů kružnice ležící v obecné rovině je úloha *určení chybějícího průmětu bodu roviny (dané stopami)*, konkrétně se jedná o určení chybějícího nárysu S_2 středu kružnice S .

9.4 Vybrané úlohy

Příklad 9.5. *V Mongeově promítání je rovina ρ dána svými stopami. Mimo tuto rovinu leží bod A . Sestrojte patu Q kolmice spuštěné z bodu A do roviny ρ .*

Příklad 9.6. *V Mongeově promítání je dána rovina α svými stopami a přímka q svými sdruženými průměty. Sestrojte sdružené průměty průsečíku přímky q s rovinou α . Řešení načrtněte*

Řešení: Postupujte dle appletu, v němž je krok za krokem zachycen postup řešení analogické úlohy: <https://www.geogebra.org/m/WbD1Y95d>.

Kapitola 10

Osová afinita

Osová afinita, viz Obr. 10.1.

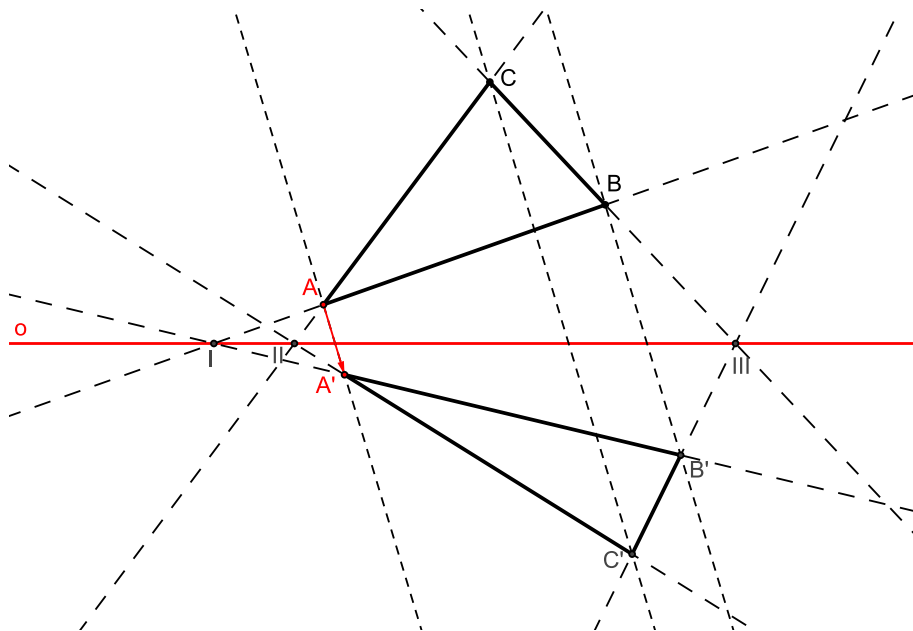


Figure 10.1: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

Osová afinita

10.1 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

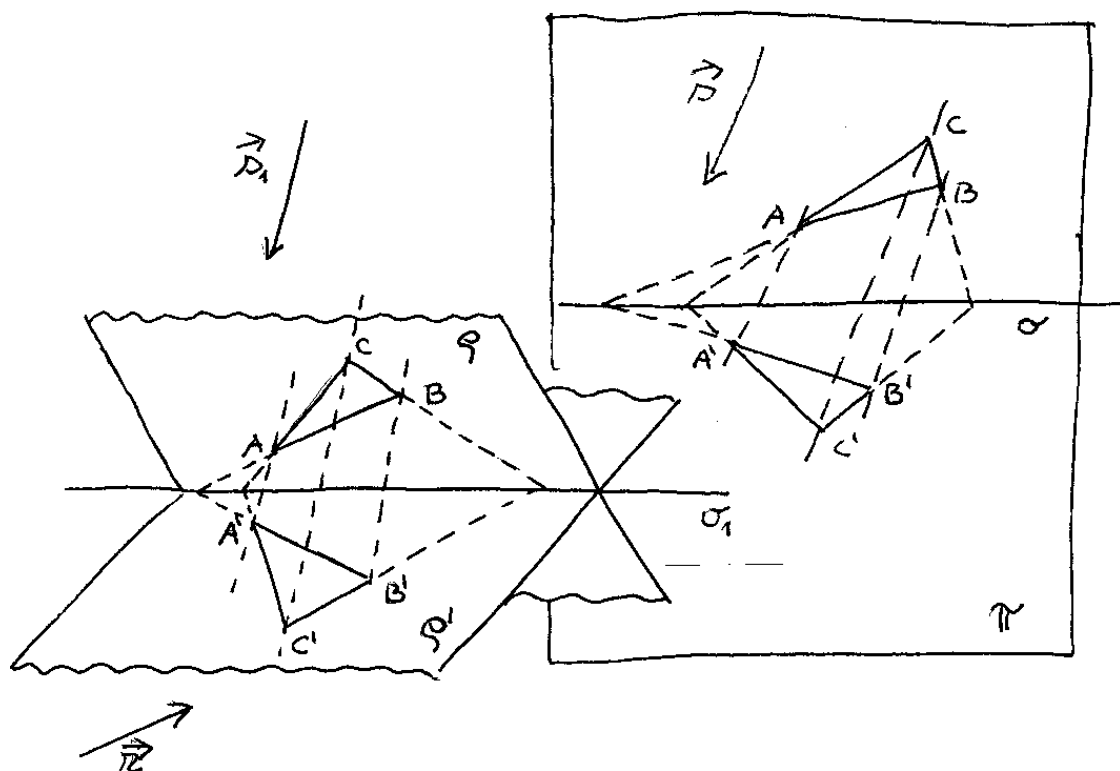


Figure 10.2: Vznik osové afinity

10.1.1 Základní afinity

Základními afinitami nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n . Příklady základních afinit jsou osová afinita v A_2 , osová souměrnost v E_2 nebo rovinová souměrnost v E_3 .

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá elace.

10.1.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou o , směrem s a charakteristikou κ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' .

Příklad 10.1. V osové afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p .

Řešení: Viz Obr. 10.4. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

Vlastnosti osové afinity

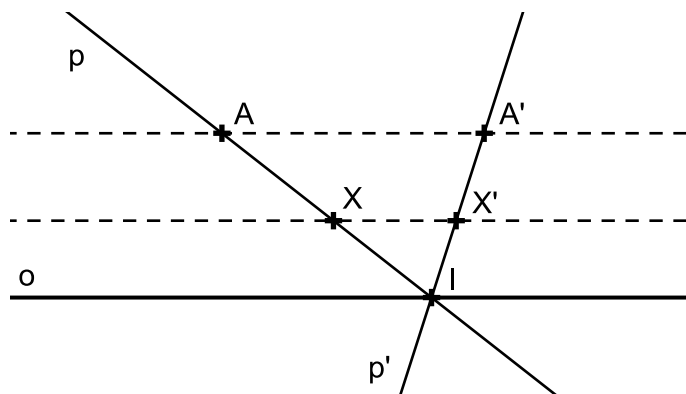


Figure 10.3: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.
- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.

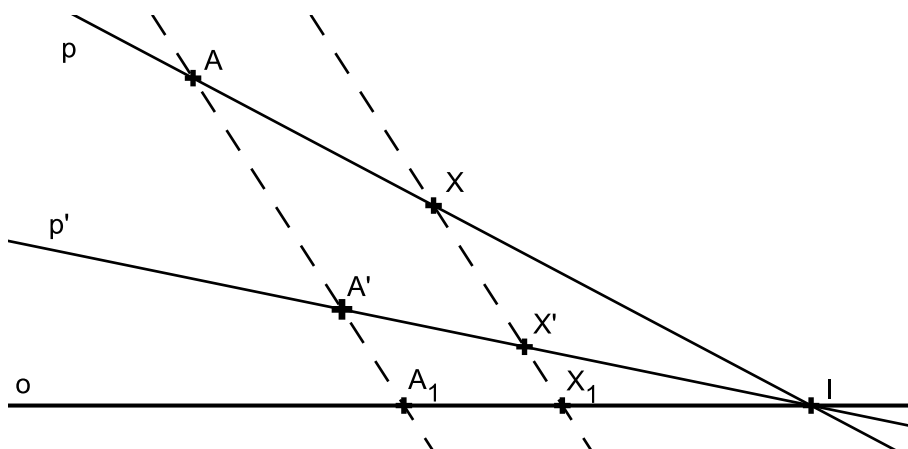


Figure 10.4: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 10.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka p' , která je obrazem přímky p , také prochází bodem I . Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A' . Sestrojíme tedy přímku $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X , bod X' , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osově afinity

Charakteristikou osově afinity κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body A, A' jsou ve vztahu vzor a obraz a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o , viz Obr. 10.4. Charakteristika osově afinity je rovna jejímu modulu, proto se κ nazývá také modul osově afinity.

Poznámka. Osová souměrnost v rovině je zvláštním případem osově afinity, jejíž směr \vec{s} je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$).

Příklad 10.2. Je dána přímka o , trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X' . Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osově afinitě s osou o , v níž je obrazem bodu X bod X' .

Věta 10.1. *Rovnoběžné přímky $a \parallel b$ se v osově afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a' \parallel b'$.*

Proof. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. \square

Věta 10.2. *Dělicí poměr se v osově afinitě zachovává, tj. $(ABC) = (A'B'C')$.*

Důsledky věty 10.2:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

Příklad 10.3. Je dána přímka o a trojúhelník ABC . Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osově afinitě s osou o , aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.

(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)

Věta 10.3. *Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osově afinitě s charakteristikou κ . Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.*

Z výše uvedených vět 10.1, 10.2, 10.3 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osově afinity

- (1) Rovnoběžnost přímk.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'X X_1),$$

kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

Základní afinita jako involuce

Involutorní zobrazení, též involuce, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1 .

10.1.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 10.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*
2. Dokažte Větu 10.3.

Kapitola 11

Středová kolineace

11.1 Původ středové kolineace

Jak naznačuje Obr. 11.1, středová kolineace (se středem S), jako vzájemně jednoznačné zobrazení \bar{E}_2 na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem S') středového promítání (se středem S_1) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 .

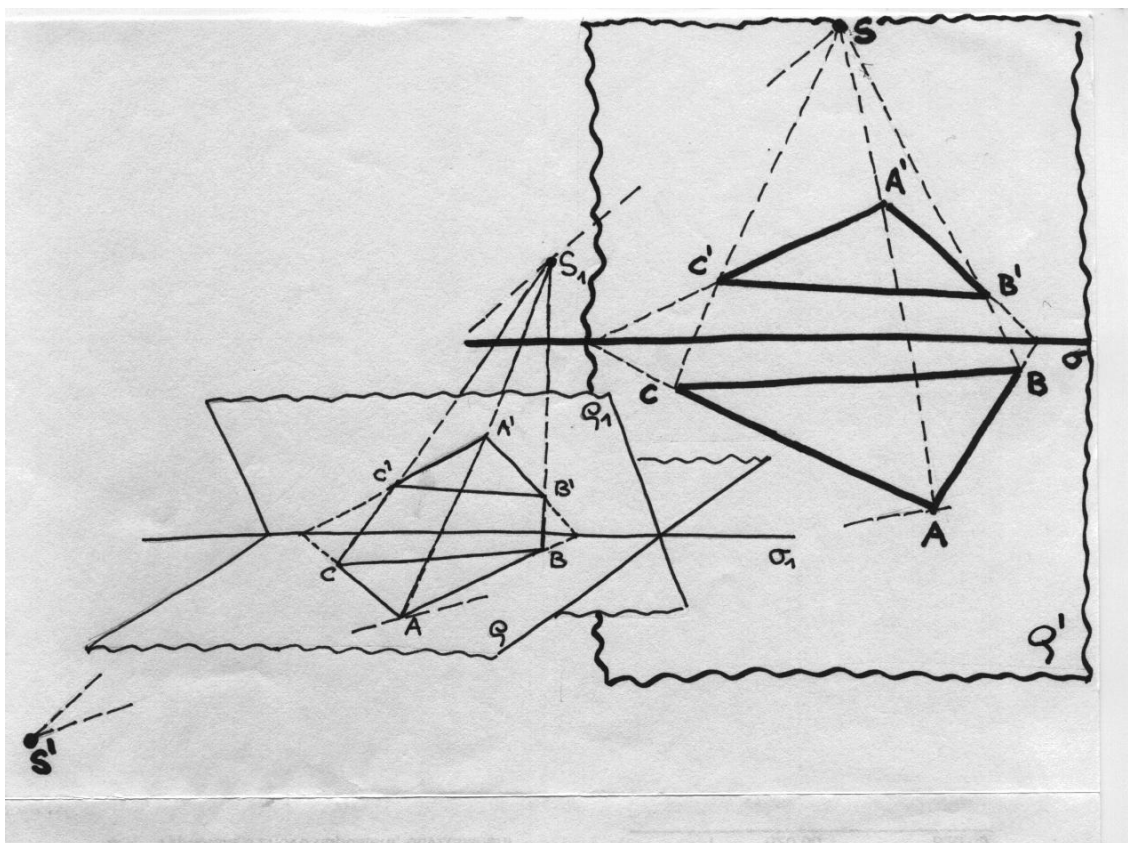


Figure 11.1: Vznik středové kolineace

Definice 11.1 (Středová kolineace). Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny \bar{E}_2 těchto vlastností (viz Obr. 11.2):

1. Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - **středem kolineace**.
2. Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - **ose kolineace**.
3. Incidence se zachovává.

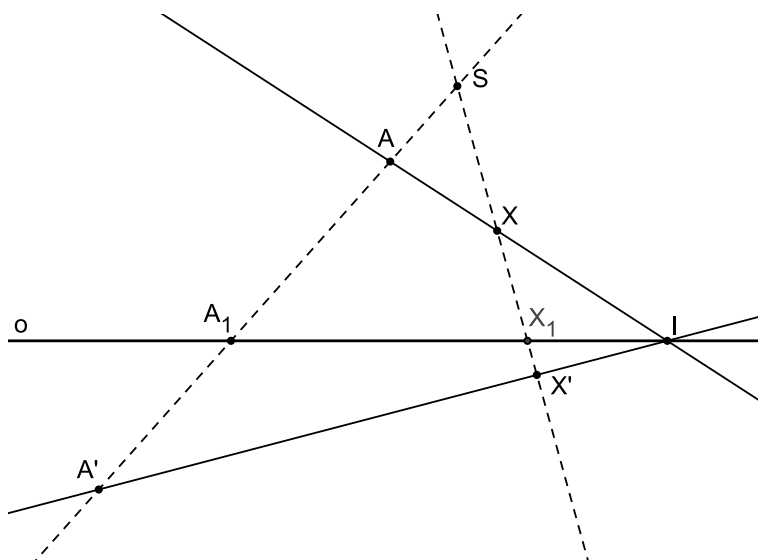


Figure 11.2: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Poznámka. Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.

Poznámka. Středová kolineace je určena:

- osou o (samodružná přímka)
- středem S (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů A, A' ; $S \in AA'$ nebo přímek p, p' ; $S \notin p, p'$.

Příklad 11.1. *Ve středové kolineaci určené osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' sestrojte:*

- a) obraz bodu X ,
- b) obraz přímky p .

Příklad 11.2. *Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:*

- a) obraz bodu B ,
 b) obraz přímky m .

Věta 11.1. *Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.*

Věta 11.2. *Kolineace je určena, je-li dán její střed, osa a jeden pár odpovídajících si bodů nebo přímek, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.*

Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

Příklad 11.3. *Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu U_∞ přímky p .*

Řešení: Viz Obr. 11.3.

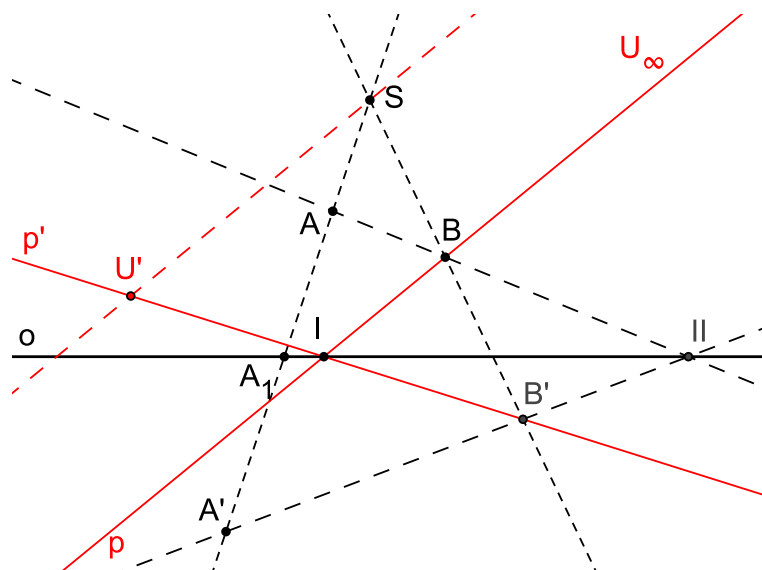


Figure 11.3: Zobrazení nevlastního bodu přímky p ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod U' na Obr. 11.3).

- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

Příklad 11.4. *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

Řešení: Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

Příklad 11.5. *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

- párem odpovídajících si bodů,*
- párem odpovídajících si přímek.*

Řešení: Řešení ad a) viz Obr. 11.4

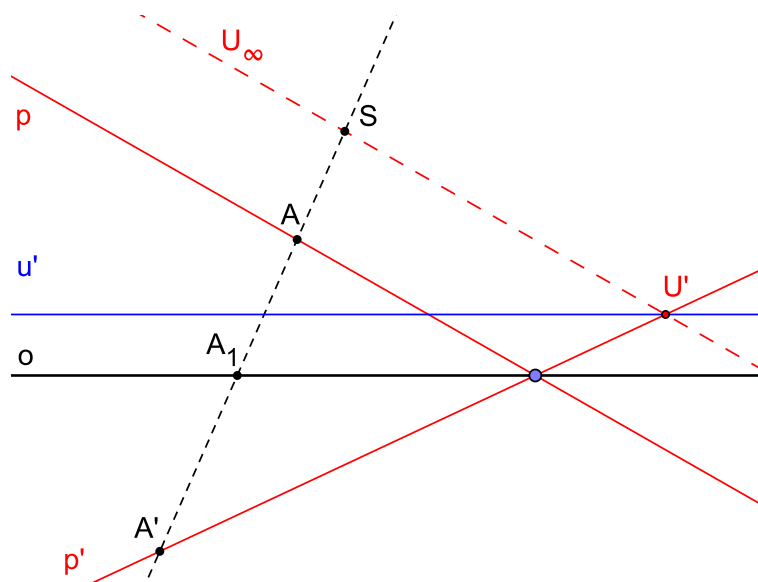


Figure 11.4: Zobrazení úběžnice u' ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Příklad 11.6. *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod V , jehož obrazem je nevlastní bod.*

Věta 11.3. *V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

Věta 11.4. *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*

Příklad 11.7. *Ve středové kolineaci určené středem S , osou o a úběžnicí u sestrojte obraz bodu A .*

Věta 11.5. *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

Příklad 11.8. *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

Příklad 11.9. *Středová kolineace je dána středem S , osou o a dvojicí bodů B, B_∞ . Najděte obraz bodu A .*

11.2 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

Příklad 11.10. *Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici k v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.*

Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:

1. Tečna kuželosečky k přejde kolineací v tečnu kuželosečky k' .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky k, k' odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.
5. **Polární vlastnosti kuželoseček:**
 - Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k , pak body dotyku T_1, T_2 tečen kuželosečky k z bodu P jsou průsečíky p s k .
 - Bod P indukuje na kuželosečce *involuci*.
 - Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají *sdrúžené póly*.

6. Průměr kuželosečky

- Každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní.
- Spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly).
- Spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou.
- Spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv.
- Každá přímka procházející středem kuželosečky (středové).

7. Střed kuželosečky

- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

Příklad 11.11. Sestrojte parabolu, která odpovídá kružnici k v dané kolíneaci.

Příklad 11.12. Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici k v dané kolíneaci.

Příklad 11.13. Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.

Řešení: Viz Obr. 11.5

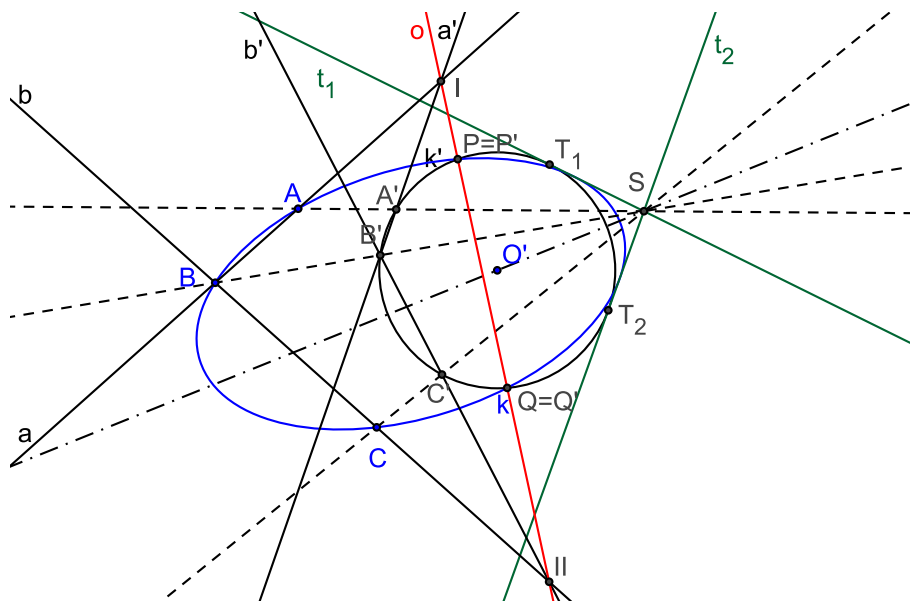


Figure 11.5: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

Příklad 11.14. Středová kolíneace v \overline{E}_2 je dána osou $o: y = 0$, středem $S = \langle 1, 0, a \rangle$ a dvojicí bodů $B = \langle 1, 0, b \rangle$, $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$. Volte hodnoty parametrů a, b, r tak, aby obrazem kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ byla postupně parabola, hyperbola a elipsa. Sestrojte.

Bibliography

- [1] Sedláček, J. a kol. *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN ARGO. 1981.
- [2] Voráčová, Š. a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia. 2012.