ALGEBRA 5 - Otázky ke zkoušce.

1. Gaussův obor integrity. Algebraické struktury (grupa, těleso, okruh, obor integrity) a jejich význam v algebře. Charakterizujte Gaussův obor integrity. Uveďte příklady Gaussových oborů integrity.
Naznačte důkaz věty: „T je těleso, pak T[x] je Gaussův obor integrity“.

2. Ireducibilní rozklad polynomu v $T[x]$. Charakterizujte pojmy ireducibilní polynom a ireducibilní rozklad polynomu. Ireducibilní rozklady polynomů nad tělesem (C, R, Q). Uveďte příklady.

3. Ireducibilní rozklad polynomu v $Z[x]$ ($Q[x]$). Ireducibilní prvky v $Z[x]$. Primitivní polynom. Příklady (ne)primitivních polynomů. Vztah mezi ireducibilními polynomy v $Z[x]$ a $Q[x]$. Eisensteinovo kriterium ireducibility.

4. Obor integrity Z[x]. Vysvětlete význam tvrzení, že Z[x] je Gaussův obor integrity. Ilustrujte příkladem. Naznačte důkaz tohoto tvrzení. Jak probíhá rozklad polynomu $f(x)$ v součin ireducibilních prvků v $Z[x]$.

5. Eukleidovský obor integrity. Charakterizujte eukleidovský obor integrity. Popište Eukleidův algoritmus pro určení největšího společného dělitele (NSD) dvojice polynomů. Jak určíme NSD konečné množiny polynomů v $Z[x]$?

6. Diskriminant. Diskriminant polynomu $n-$tého stupně. Vyjádření diskriminantu pomocí koeficientů polynomu a pomocí kořenů polynomu. Vztah mezi hodnotou (znaménkem) diskriminantu k povahou kořenů příslušného polynomu. Vandermondův determinant. Pojmy ilustrujte na příkladu diskriminantu polynomu třetího stupně.

7. Binomické rovnice. Algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla. Moivreova věta. Binomické rovnice. Počet kořenů binomické rovnice a jejich násobnost. Postup při řešení binomické rovnice. Zápis řešení.

8. Odmocnina z komplexního čísla. Goniometrický a algebraický tvar zápisu druhé, resp. třetí odmocniny z komplexního čísla. Odvození vztahu pro algebraický tvar druhé odmocniny z komplexního čísla.

9. Algebraické rovnice. Algebraická řešitelnost algebraických rovnic. Souvislost s řešením binomických rovnic. Jaké algebraické rovnice jsou obecně algebraicky řešitelné? Naznačení postupu při řešení kubické rovnice, jak poznáme počet reálných kořenů kubické rovnice.

10. Cardanovy vzorce. Algebraická řešitelnost rovnice 3. a 4. stupně. Naznačení postupu řešení. Počet reálných kořenů. Casus irreducibilis a naznačení jeho řešení.

11. Reciproké rovnice. Charakterizujte pojem reciproká rovnice (reciproký polynom). Základní vlastnost kořenů reciprokých rovnic. Roztřídění reciprokých rovnic. Uveďte příklady. Vlastnosti (řešení) jednotlivých typů reciprokých rovnic. Lagrangeova substituce.

12. Interpolační polynomy. Význam interpolačního polynomu. Otázka existence interpolačního polynomu. Různé způsoby nalezení interpolačního polynomu. Lagrangeův interpolační polynom. Newtonův interpolační polynom.

13. Kroneckerův algoritmus. Uveďte účel použití Kroneckerova algoritmu. Popište jednotlivé kroky tohoto algoritmu. Role Lagrangeova (Newtonova) interpolačního polynomu při realizaci tohoto algoritmu. Porovnejte Kroneckerův algoritmus s Eisensteinovým kritériem.

14. Separace reálných kořenů polynomu. Odhad polohy reálných kořenů algebraické rovnice. Odhad počtu kladných (záporných) kořenů. Využití Rollovy věty při závěrečné separaci kořenů.

15. Vybrané metody aproximace reálných kořenů. Popište následující metody: metoda půlení intervalu, Newtonova metoda, regula falsi, iterační metoda. Proveďte odvození iteračního vztahu pro realizaci Newtonovy metody.

16. Řešení soustav nelineárních rovnic. Na příkladu soustavy rovnic $x^2 + xy + 2 = 0$, $x^2 - y^2 - 2xy = 0$ objasněte použití metody rezultantu. Vysvětlete pojmy Sylvesterova matice a rezultant. Naznačte myšlenku využití metody Groebnerových bází při řešení soustav nelineárních rovnic. Použijte analogii s řešením soustavy lineárních rovnic.