7 Analytické vyjádření shodnosti

7.1 Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2

Osová souměrnost

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o: ax + by + c = 0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 7.1. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p: 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

PŘÍKLAD 7.2. *Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o: 2x - 3y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 7.3. *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.*

Otočení (rotace)

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

Po úpravě:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha$$

PŘÍKLAD 7.4. *Napište rovnice otočení se středem $S[1, -2]$ o úhel $\alpha = 60°$.*

Středová souměrnost

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

PŘÍKLAD 7.5. *Napište rovnice středové souměrnosti* $\mathbf{S}(S)$ *se středem* $S[-2,3]$.

Posunutí (translace)

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.6. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem* $A = [-1,3]$ *a jeho obrazem* $A' = [4,2]$.

Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x:

$$\begin{aligned} x' &= x + p \\ y' &= -y \end{aligned}$$

7.2 Analytická vyjádření některých shodných zobrazení v E_3

Některá shodná zobrazení v prostoru:

Posunutí

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \\ z' &= z + p_3. \end{aligned}$$

Otočení

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0,0,0)$:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny (x,y):

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z + v_0\alpha. \end{aligned}$$

7.3 Rovnice shodnosti v rovině

Každé shodné zobrazení f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcccccc} f: & x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ & y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{30}$$

Potom je zřejmé, že **asociovaný homomorfismus** φ takovéhoto shodného zobrazení f je dán soustavou

$$\begin{aligned} \varphi:\ u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi: \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat, analogicky s rovnicí (30), ve tvaru

$$\varphi:\ \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \tag{31}$$

PROBLÉM: Rovnice (30) je rovnicí libovolné afinity v rovině. Máme-li dánu takovouto rovnici (soustavu), **jak poznáme, že se jedná o shodnost?**

Rovnice (30) je rovnicí shodnosti, právě když platí

$$A^T \cdot A = E, \tag{32}$$

(E je jednotková matice) jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

Poznámka. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

Poznámka. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

Věta 40. *Afinní zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává velikost vektoru, tj.*

$$||\varphi(\vec{u})|| = ||\vec{u}||.$$

Důkaz. $||\varphi(B-A)|| = ||f(B) - f(A)||$, $|f(A)f(B)| = |AB|$, $||B-A|| = ||\vec{u}||$. □

Věta 41. *Afinní zobrazení f euklidovkého prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin vektorů, tj.*

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

PŘÍKLAD 7.7. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $A = [10; 0]$ zobrazí na počátek $A' = [0; 0]$ a bod $B = [25; 20]$ na bod $B' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

Z podmínky (32) plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{33}$$

Samodružné směry

Směr je vyjádřen vektorem, např. $\vec{u}$. Má-li být tento směr samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem vektoru $\vec{u}$, platit $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) shodnosti jsou potom **netriviálním** řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustavy (34) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Rovnici (35) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě shodnosti v rovině. Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu φ, číslo λ, které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\vec{u}$. Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

7.4 Skládání shodných zobrazení

7.4.1 Shodnosti přímé a nepřímé

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

Dokažte:

1. Složením (v libovolném pořadí) translace $\mathcal{T}$ a rotace $\mathcal{R}$, která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako $\mathcal{R}$.

2. Složením dvou translací vznikne translace nebo identita.

3. Složením translace a středové souměrnosti v libovolném pořádku vznikne středová souměrnost.

4. Složením středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ se středem S_1 a středové souměrnosti $\mathcal{S}_2$ se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne translace $\mathcal{T}(S_1 \to S_2')$, přičemž úsečka S_1S_2' má střed S_2. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$ identita.

PŘÍKLAD 7.8. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120°$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 7.9. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

7.4.2 Grupa shodností v rovině

Definice 26. *Množinu* $\mathbf{G}$*, v níž je definována operace* $\circ$ *nazýváme grupou vzhledem k operaci* $\circ$ *(značíme* $(\mathbf{G}, \circ)$*), právě když:*

a) Výsledek operace $\circ$ *je pro každou dvojici prvků* $\mathbf{G}$ *opět prvkem* $\mathbf{G}$ *(říkáme, že operace* $\circ$ *je na* $\mathbf{G}$ *neomezeně definovaná, nebo, že množina* $\mathbf{G}$ *je uzavřená vzhledem k operaci* $\circ$*).*

b) Operace $\circ$ *je asociativní v množině* $\mathbf{G}$*.*

c) Operace $\circ$ *má neutrální prvek* $n \in \mathbf{G}$*.*

d) Ke každému prvku $k \in \mathbf{G}$ *existuje inverzní prvek* $k^{-1} \in \mathbf{G}$ *vzhledem k operaci* $\circ$*.*

Je-li navíc operace $\circ$ *komutativní v množině* $\mathbf{G}$*, nazýváme algebraickou strukturu* $(\mathbf{G}, \circ)$ *komutativní grupou.*

Ověřte následující tvrzení:

(a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu $\mathbf{G_S}$.

(b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu $\mathbf{G'_S}$ grupy $\mathbf{G_S}$.

(c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy $\mathbf{G'_S}$.