

# GEOMETRIE II - KMA/GEO2

**Roman HAŠEK**

13. února 2017

# Obsah

<b>1</b>	<b>Připomenutí vybraných pojmů</b>	<b>5</b>
1.1	Afinní bodový prostor . . . . .	5
1.2	Afinní souřadnice bodů . . . . .	6
1.3	Eukleidovský bodový prostor . . . . .	6
1.4	Zobrazení . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Afinní zobrazení</b>	<b>9</b>
2.1	Dělicí poměr . . . . .	9
2.2	Barycentrické souřadnice . . . . .	10
2.3	Afinní zobrazení . . . . .	11
2.4	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic . . . . .	12
2.5	Cvičení - Afinní zobrazení . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Shodná zobrazení v rovině</b>	<b>14</b>
3.1	Osová souměrnost . . . . .	15
3.1.1	<b>Analytické vyjádření osově souměrnosti <math>O(o)</math> v rovině</b> . . . . .	16
3.1.2	Cvičení - Osová souměrnost . . . . .	18
3.1.3	Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	18
3.2	Otočení . . . . .	20
3.2.1	Otočení - Úlohy . . . . .	22
3.2.2	Otočení - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	22
3.3	Středová souměrnost . . . . .	23
3.3.1	Středová souměrnost - Úlohy . . . . .	24
3.3.2	Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu . . . . .	24
3.4	Posunutí (Translace) . . . . .	25
3.4.1	Analytické vyjádření posunutí (translace) $T(\vec{p})$ v rovině . . . . .	25
3.4.2	Posunutí - Úlohy . . . . .	26
3.5	Posunutě zrcadlení (Posunutá souměrnost) . . . . .	27
3.5.1	Analytické vyjádření posunutého zrcadlení . . . . .	28
3.5.2	Posunutě zrcadlení – Úlohy na domácí přípravu . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Podobná zobrazení</b>	<b>30</b>
4.1	Podobné zobrazení . . . . .	30

<b>5</b>	<b>Stejnolehlost</b>	<b>32</b>
5.1	Analytické vyjádření stejnohlosti . . . . .	33
5.2	Skládání stejnohlostí . . . . .	33
5.3	Stejnolehlost kružnic . . . . .	34
5.3.1	Stejnolehlost – Úlohy . . . . .	38
5.3.2	Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Mocnost bodu ke kružnici</b>	<b>39</b>
6.1	Chordála a potenční střed . . . . .	40
6.2	Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Afinní zobrazení</b>	<b>42</b>
7.1	Rovnice afinního zobrazení z $A_n$ do $A_m$ . . . . .	44
7.2	Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením . . . . .	45
7.3	Věta o určenosti afinního zobrazení . . . . .	46
7.4	Cvičení – Afinní zobrazení . . . . .	47
<b>8</b>	<b>Afnita</b>	<b>48</b>
8.1	Afnita v rovině . . . . .	49
8.2	Rovnice afnity v rovině . . . . .	49
8.3	Věta o určenosti afnity v rovině . . . . .	51
8.4	Afnita prostoru $A_n$ . . . . .	53
8.5	Rovnice afnity prostoru $A_n$ . . . . .	54
8.6	Modul afnity . . . . .	54
8.7	Afnita přímá a nepřímá, ekviafnita . . . . .	56
8.8	Cvičení – Afnita . . . . .	57
<b>9</b>	<b>Skládání afinních zobrazení</b>	<b>58</b>
9.1	Afinní grupa v $A_n$ . . . . .	58
9.2	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic . . . . .	59
<b>10</b>	<b>Samodružné body a směry afnity</b>	<b>61</b>
10.1	Samodružné body . . . . .	61
10.2	Samodružné směry . . . . .	62
10.3	Homotetie, grupa homotetií . . . . .	71

<b>11 Analytické vyjádření shodnosti</b>	<b>72</b>
11.1 Přehled analytických vyjádření shodných zobrazení v $E_2$	72
11.1.1 OSOVÁ SOUMĚRNOST	72
11.1.2 OTOČENÍ (ROTACE)	72
11.1.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST	72
11.1.4 POSUNUTÍ (TRANSLACE)	73
11.1.5 POSUNUTÉ ZRCADLENÍ	73
11.2 Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v $E_3$	73
11.2.1 POSUNUTÍ (TRANSLACE)	73
11.2.2 OTOČENÍ (ROTACE)	73
11.2.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST	74
11.2.4 OSOVÁ SOUMĚRNOST	74
11.2.5 ROVINOVÁ SOUMĚRNOST	74
11.2.6 ŠROUBOVÝ POHYB	74
11.3 Rovnice shodnosti v rovině	75
11.4 Klasifikace shodností roviny	78
11.5 Cvičení – Shodnosti v rovině	85
11.6 Klasifikace shodností prostoru $E_3$	86
11.6.1 Shodností prostoru $E_3$ - Úlohy	89
11.7 Shodná zobrazení v prostoru $E_n$	89
11.8 Skládání shodných zobrazení	90
11.9 Shodnosti přímé a nepřímé	90
11.10 Grupa shodností v rovině	90
<b>12 Osová afinita</b>	<b>91</b>
12.1 Základní afinity	91
12.2 Osová afinita v rovině	91
12.3 Cvičení – Osová afinita	94
<b>13 Podobnosti v rovině</b>	<b>95</b>
13.1 Podobnosti eukleidovské roviny	96
13.1.1 Úlohy – Podobnosti	97
<b>14 Cevova věta a její užití</b>	<b>99</b>
14.1 Cevova věta – Úlohy na domácí přípravu	100

# 1 Připomenutí vybraných pojmů

## 1.1 Afinní bodový prostor

**Definice 1** (Afinní bodový prostor). Neprázdnou množinu  $A_n$  (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze  $n$ , jestliže je dán vektorový prostor  $V_n$  dimenze  $n$  a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností:

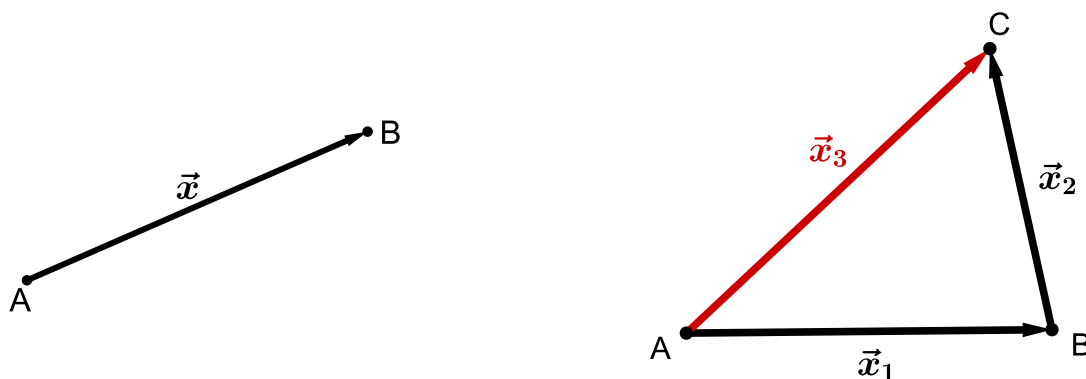
1. Pro každý bod  $A \in A_n$  a pro každý vektor  $\vec{x} \in V_n$  existuje jediný bod  $B \in A_n$  tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body  $A, B, C \in A_n$  platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor  $V_n$  nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru  $A_n$ .



## Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením  $V_0 = \{\vec{0}\}$  je afinní bodový prostor dimenze 0.

2. Eukleidovské prostory  $E_1$  (přímka),  $E_2$  (rovina),  $E_3$  ((trojrozměrný) prostor).

3. Samotný vektorový prostor  $V_n$  splňuje definici afinního bodového prostoru (naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem). Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

## 1.2 Afinity souřadnice bodů

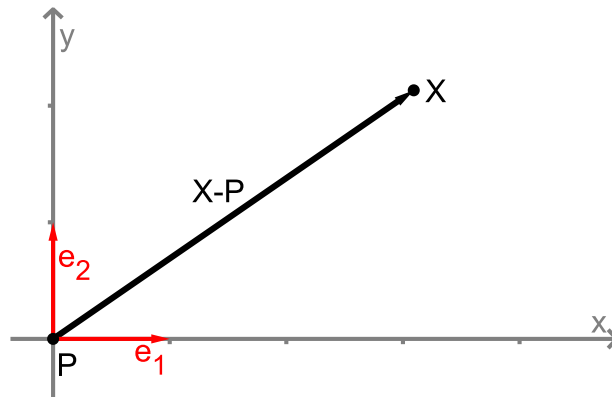
**Definice 2** (Afinní soustava souřadnic - repér). Nechť  $P$  je libovolný bod z afinního prostoru  $A_n$ ,  $n > 0$ . Nechť  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je báze vektorového zaměření  $V_n$  prostoru  $A_n$ . Potom uspořádanou  $(n + 1)$ -tici

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic  $\varphi$  (též repérem  $\varphi$ ) v prostoru  $A_n$ .

Souřadnicemi bodu  $X \in A_n$  v soustavě souřadnic  $\varphi$  budeme rozumět souřadnice vektoru  $X - P$  v bázi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .

**Definice 3** (Kartézská soustava souřadnic). Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic  $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ , kde  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je ortonormální báze.



## 1.3 Eukleidovský bodový prostor

**Definice 4** (Eukleidovský bodový prostor). Eukleidovským bodovým prostorem  $E_n$  rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.

**Definice 5** (Skalární součin). Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  přiřazuje reálné číslo (skalár)  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$  tak, že platí:

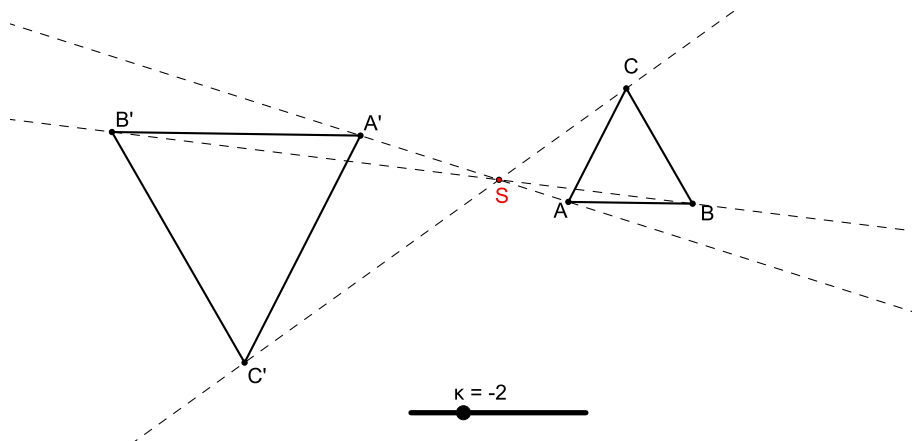
1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ , (SYMETRIE)
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ , (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ ,
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$ . (POZITIVITA)

## 1.4 Zobrazení

**Definice 6** (Geometrické zobrazení). Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu  $X$  (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod  $X' = f(X)$ .

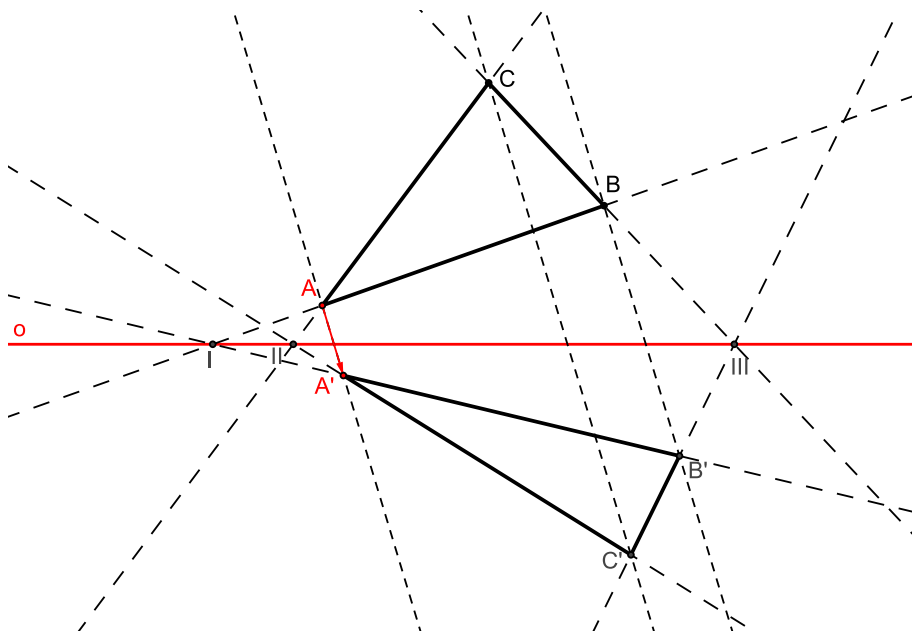
### Příklady geometrických zobrazení

1. Afinní zobrazení v rovině (prostoru) - osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí, identita, stejnoolehlost.



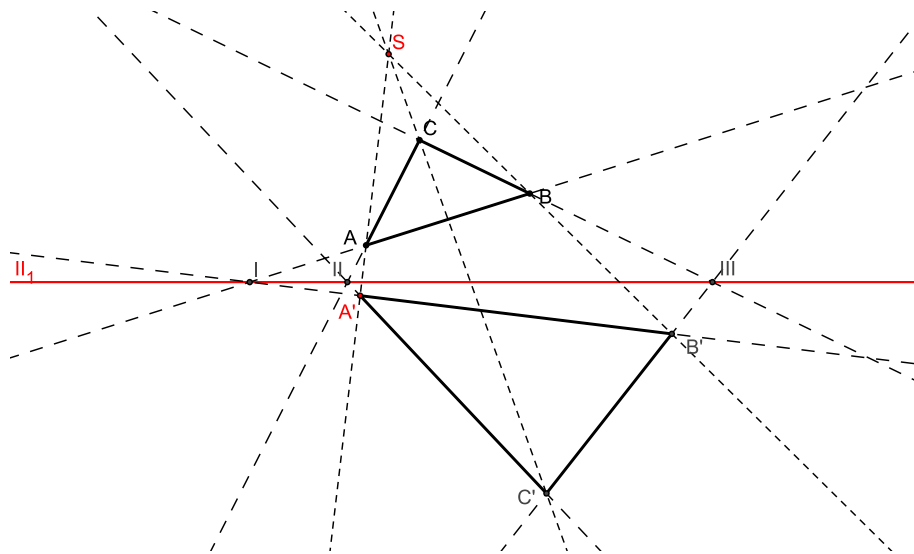
Obrázek 1: Stejnolehlost se středem  $S$  a s koeficientem  $\kappa = -2$

2. Osová afinita.



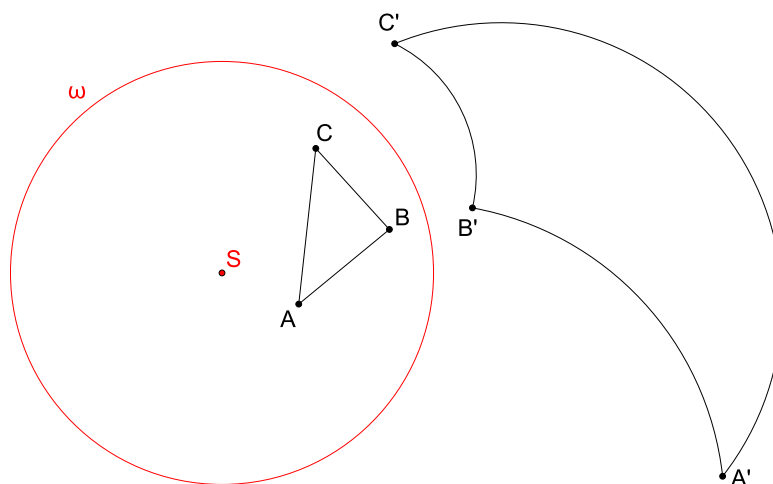
Obrázek 2: Osová afinita daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

## 2. Středová kolineace.



Obrázek 3: Středová kolineace daná středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

## 3. Kruhová inverze.



Obrázek 4: Kruhová inverze daná kružnicí  $\omega$

## 4. Rovnoběžné promítání, středové promítání.

**PŘÍKLAD 1.1.** Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.



## 2 Afinity zobrazení

Afinní zobrazení v rovině (prostoru) je příkladem transformace roviny (prostoru) na sebe. Každému bodu  $X$  roviny  $E_2$  (prostoru  $E_3$ ) přiřadí bod  $X' = f(X)$  téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr.

### 2.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.



Obrázek 5: Tři kolineární body

**Definice 7** (Dělicí poměr). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$  rozumíme reálné číslo  $\lambda$ , které zapisujeme  $(ABC)$ , a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (1)$$

*přitom pro bod  $C$  ležící vně úsečky  $AB$  je  $(ABC) > 0$  a pro bod  $C$  ležící uvnitř  $AB$  je  $(ABC) < 0$ . Pro  $C = A$  je zřejmě  $(ABC) = 0$ .*

**Poznámka.** Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu  $C$  od daných bodů  $A, B$ . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.6.



Obrázek 6: Dělicí poměr bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$

**Definice 8** (Dělicí poměr 2). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo  $\lambda$  definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (2)$$

*značíme  $(ABC)$  a nazýváme dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$ .*

**Poznámka.** Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle  $\lambda$ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů  $A = [a_1; a_2]$ ,  $B = [b_1; b_2]$ ,  $C = [c_1; c_2]$ :

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

**PŘÍKLAD 2.1.** Určete dělicí poměr (ABS) středu  $S$  úsečky  $AB$  vzhledem k jejím krajním bodům  $A$ ,  $B$ .

**PŘÍKLAD 2.2.** V rovině jsou dány dva pevné body  $A$ ,  $B$ . Určete množinu všech bodů  $X$  této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde  $k$  je reálná konstanta.

*Řešení:* Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů  $A$ ,  $B$  vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu  $x$  tak, že  $A = [-a, 0]$  a  $B = [a, 0]$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ . Potom má vyšetřovaná množina bodů  $X = [x, y]$  rovnici

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2 k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

která skutečně odpovídá kružnici.

## 2.2 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod  $C$  můžeme, při zvolených bodech  $A$ ,  $B$ , zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1 - \lambda}A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických<sup>1</sup> souřadnic.

<sup>1</sup>*Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , která jsou umístěna v daném pořadí v bodech  $X$  a  $Y$ . Potom pro souřadnice těžiště  $T$  této soustavy dvou těles platí:  $T = \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}Y$ , kde  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$ .

## Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod  $X$  leží na přímce  $AB$  právě tehdy, když existují dvě čísla  $\alpha, \beta \in R$  taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu  $X$  vzhledem k bodům  $A, B$ . Rovnice  $X = \alpha A + \beta B$ , kde  $\alpha + \beta = 1$  se nazývá **bodová rovnice přímky**.

**Poznámka.** Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu  $X$  vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak  $k$  bodům. Provedte pro  $k = 3, 4$ .

**PŘÍKLAD 2.3.** *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky  $AB$  vzhledem k jejím krajním bodům.*

**PŘÍKLAD 2.4.** *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku  $ABC$  vzhledem k jeho vrcholům.*

**Věta 1.** *V prostoru  $E_k$  zvolme  $k + 1$  bodů  $A_i$ ,  $k + 1$  čísel  $\alpha_i$  a  $k + 1$  čísel  $\beta_i$ , kde  $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$ . Potom platí:*

a) *Bod  $X$  definovaný vztahem*

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

*je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) *Vektor  $\vec{u}$  definovaný vztahem*

$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

*je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když*

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k+1} = 0.$$

## 2.3 Afinní zobrazení

**Definice 9** (Afinní zobrazení). *Zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A$  do afinního prostoru  $A'$  se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body  $B, C, D$  z prostoru  $A$  na přímce, pak jejich obrazy  $f(B), f(C), f(D)$  buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení  $f$  afinní roviny  $A_2$  do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (3)$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Každé afinní zobrazení  $f$  v prostoru  $A_3$  můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (5)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Můžeme říci, že afinním zobrazením prostoru  $A_n$  na sebe (hovoříme o afinní transformaci prostoru  $A_n$ , stručně o afinitě) je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (7)$$

kde  $A$  je čtvercová matice  $n$ -tého řádu a  $X, B$  a  $X'$  jsou matice typu  $(n, 1)$ .

## 2.4 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (25) mají  $b_1 = b_2 = 0$ .

**PŘÍKLAD 2.5.** Jsou dána lineární zobrazení  $f, g$ :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici  $M$  složeného zobrazení

$$g \circ f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Řešení:* Pro matici  $M$  platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}.$$

Kompletní řešení této úlohy je uvedeno na str. 59.

## 2.5 Cvičení - Afinní zobrazení

1. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

- a) středová souměrnost se středem v počátku,
- b) středová souměrnost se středem v bodě  $[5, 10]$ ,
- c) osová souměrnost podle souřadnicové osy  $x$ ,
- d) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = 2$ ,
- e) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = \frac{-1}{2}$ .

Využijte applet na GeoGebraTube: [tube.geogebra.org/student/mUcqVE9uT](http://tube.geogebra.org/student/mUcqVE9uT)

2. Užitím (25) dokažte následující větu o určenosti afinního zobrazení v rovině

**Věta 2** (Věta o určenosti afinního zobrazení v rovině.). *Nechť  $A, B, C$  a  $A', B', C'$  jsou trojice nekolineárních bodů v rovině. Potom existuje jediná afinita  $\phi$ , která zobrazí body  $A, B, C$  v uvedeném pořadí do bodů  $A', B', C'$ .*

3. Pokuste se užitím (26) ukázat, že skládání afinních zobrazení v rovině není komutativní.

### 3 Shodná zobrazení v rovině

**Definice 10.** Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům  $X, Y$  přiřazuje body  $X', Y'$  tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (též *izometrické zobrazení*).

**Poznámka.** Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení  $f : X \rightarrow f(X)$  platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

**Věta 3.** Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

**Další vlastnosti shodných zobrazení:**

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

**PŘÍKLAD 3.1.** V euklidovské rovině  $E_2$  je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel  $a, b$  existuje shodné zobrazení roviny  $E_2$  do sebe, zobrazující body  $[0, 0], [2, 1], [4, a]$  po řadě na body  $[1, 2], [3, 1], [5, b]$ ? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

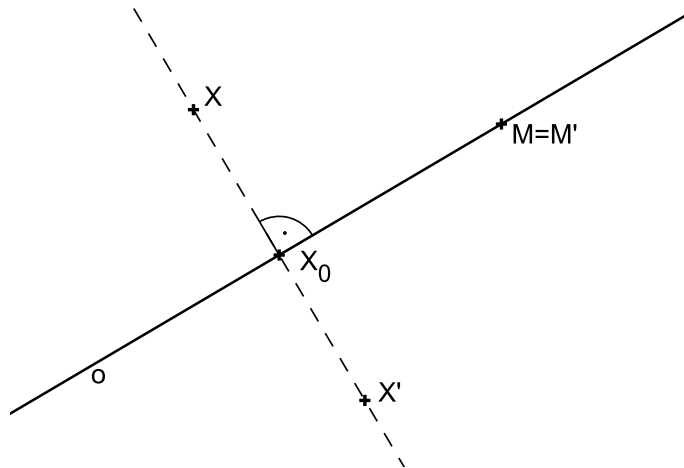
Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

**Věta 4** (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1). Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body  $X, Y, Z$  a třemi nekolineárními body  $X', Y', Z'$ , které jsou po řadě jejich obrazy.

**Poznámka.** Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení v rovině).

### 3.1 Osová souměrnost

**Definice 11.** *Nechť je dána přímka  $o$ , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz  $M'$  libovolného bodu  $M$  této přímky  $o$  platí  $M' \equiv M$ . Ke každému bodu  $X$ , který neleží na přímce  $o$ , sestrojíme obraz  $X'$  následujícím způsobem: Bodem  $X$  vedeme kolmici  $k$  na přímku  $o$  a její patu označíme  $X_0$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $X_0X$  sestrojíme bod  $X'$  tak, že  $|X'X_0| = |XX_0|$ . Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou  $o$**  a značíme ho  $\mathcal{O}(o)$ .*

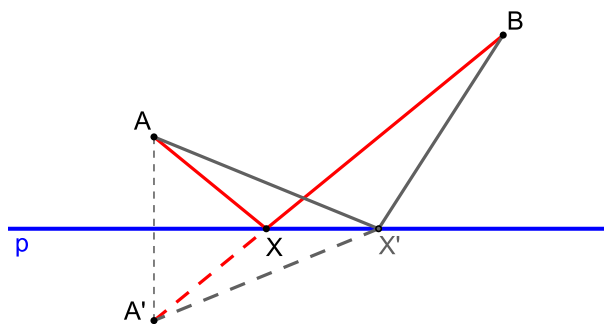


Obrázek 7: Definice osové souměrnosti

#### Poznámky:

1. O bodech  $X, X'$  říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy  $o$ .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

**PŘÍKLAD 3.2.** *Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Najděte všechny body  $X \in p$  takové, že součet vzdáleností  $|AX| + |BX|$  je minimální.*



Obrázek 8: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 8

**Věta 5.** *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

### Samodružné body a směry osově souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

**Věta 6** (Alternativní definice osově souměrnosti). *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku  $o$ , je souměrnost podle osy  $o$ .*

**Věta 7.** *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

**Věta 8.** *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

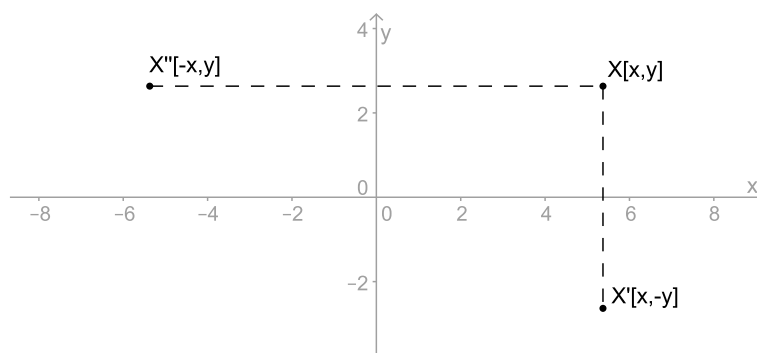
**Věta 9.** *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

**Věta 10.** *Samodružné přímky osově souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

### 3.1.1 Analytické vyjádření osově souměrnosti $O(o)$ v rovině

**PŘÍKLAD 3.3.** *Napište analytické vyjádření osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ ).*

*Řešení:* Dle obrázku 9 je zřejmé, že uvedené osově souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 9: Odvození rovnic osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ )

*Osová souměrnost s osou  $x$ :*

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

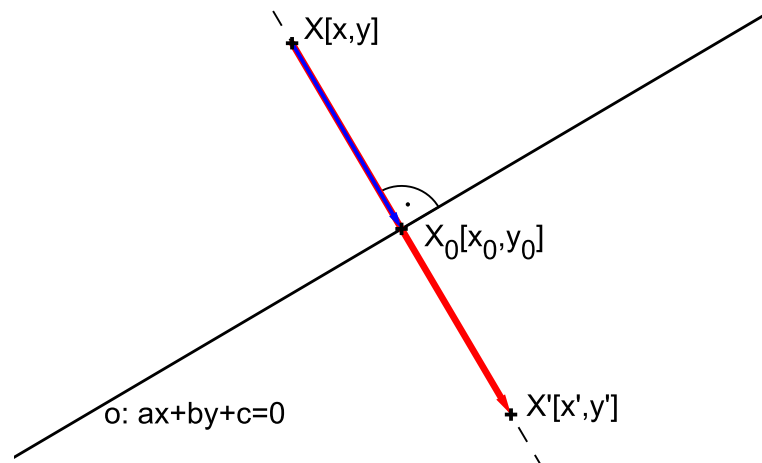
*Osová souměrnost s osou  $y$ :*

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$



Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

**Osová souměrnost podle osy  $o$  dané rovnicí  $o : ax + by + c = 0$**



Obrázek 10: Odvození rovnic osové souměrnosti  $O(o)$

Dle obrázku 10 platí

$$\begin{aligned} X' - X &= 2(X_0 - X), \\ X_0 - X &= k(a, b). \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti vyjádříme  $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$  a dosadíme je do obecné rovnice osy  $o: a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$ . Odsud potom vyjádříme parametr  $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$ , který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti  $O(o)$ :

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 3.4.** V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky  $p : 3x - 4y + 1 = 0$ . Napište rovnice této souměrnosti.

### 3.1.2 Cvičení - Osová souměrnost

4. Napište rovnice souměrnosti podle přímky  $o : 2x - 3y + 1 = 0$ .
5. Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dán obvod  $o = 12\text{cm}$  a úhly  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .
6. Dokažte Vivianiho větu.

**Věta 11** (Vivianiho věta). *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

7. Jsou dány dvě různoběžky  $p$ ,  $q$  a bod  $A$  mimo ně. Najděte body  $B \in p$ ,  $C \in q$  tak, aby obvod trojúhelníku  $ABC$  byl minimální.
8. Řešte **Fagnanův problém**: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“
9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník  $ABCD$  se stranami dané velikosti, je-li  $\mapsto AC$  osou vnitřního úhlu při vrcholu  $A$ .
10. Sestrojte čtverec  $ABCD$ , je-li dáno  $a + e = 10\text{cm}$ .
11. Sestrojte obdélník  $ABCD$ , je-li dáno  $e = 7\text{cm}$ ,  $a - b = 1\text{cm}$ .
12. Sestrojte lichoběžník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), je-li dáno  $b = 3\text{cm}$ ,  $c = 2.5\text{cm}$ ,  $d = 2.6\text{cm}$ ,  $\alpha - \beta = 20^\circ$ .
13. **Mascheroniová konstrukce**. Je dána kružnice  $k(S; r)$ ; dále je dána dvěma body  $A$ ,  $B$  (body neleží na kružnici) její sečna  $p$ , která neprochází středem  $S$ . Sestrojte průsečíky přímky  $p$  s kružnicí  $k$ , aniž přitom použijete pravítka.
14. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

### 3.1.3 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

15. Dokažte následující větu

**Věta 12**. *V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.*

16. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod  $[1, 5]$ .
17. Je dána přímka  $p$  a dvě kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  oddělené přímkou  $p$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic  $k_1$ ,  $k_2$  byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce  $p$ .

**18.** Jsou dány tři různé přímky  $p_1, p_2, p_3$ , procházející bodem  $S$ ; na přímce  $p_1$  je dán bod  $A \neq S$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách  $p_1, p_2, p_3$ .

**19.** Jsou dány tři přímky  $o_1, o_2, o_3$  procházející bodem  $O$ . Na  $o_1$  dán bod  $A_1$ . Sestrojte  $\triangle ABC$  tak, aby  $o_1, o_2, o_3$  byly osami jeho stran a bod  $A_1$  středem strany  $BC$ .

**20.** Jsou dány body  $X, Y$  a přímka  $p$ , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ , jehož hlavním vrcholem je bod  $C$ , osou souměrnosti přímka  $p$  a jehož ramena mají danou velikost  $a$ . Přímka  $AC$  nechť prochází bodem  $X$  a přímka  $BC$  bodem  $Y$ .

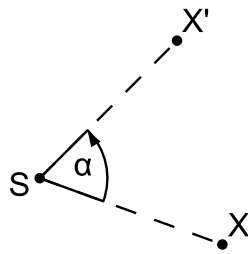
**21.** Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$ , ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Sestrojte bod  $X \in p$  tak, aby  $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$ .

**22.** Jsou dány body  $A, B, C$  a přímka  $p$  kolmá k přímce  $AB$  tak, že prochází bodem  $C$  a body  $A, B$  leží v téže polorovině určené přímkou  $p$ . Sestrojte na přímce  $p$  takový bod  $X$ , aby z něho byla vidět úsečka  $AB$  pod stejným úhlem jako úsečka  $BC$ .

**23.** Obrazy středu  $S$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  v osových souměrnostech podle přímek  $BC, AC, AB$  jsou vrcholy trojúhelníku  $A_1B_1C_1$ . Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem  $ABC$ .

## 3.2 Otočení

**Definice 12.** **Otočení** neboli **rotace** je zobrazení určené středem  $S$  a orientovaným úhlem velikosti  $\varphi$ , které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{R}(S, \varphi)$ , bod  $S$  se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti  $\varphi$  je úhel otočení.



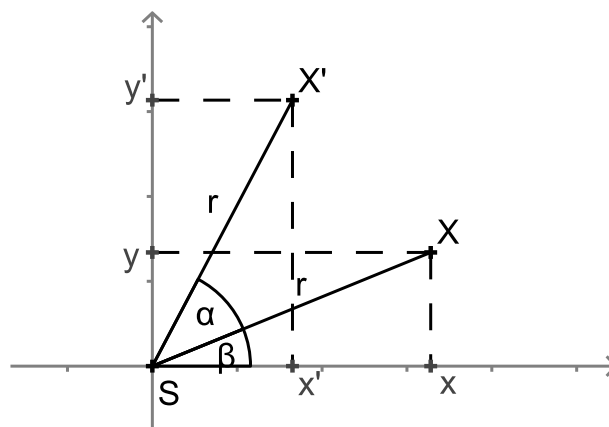
Obrázek 11: Otočení  $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

**Věta 13** (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem  $S$  je otočením; bod  $S$  je střed otočení.*

**PŘÍKLAD 3.5.** *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$ . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

*Řešení:* Postupujeme podle obrázku 12.



Obrázek 12: Otočení  $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

**Věta 14.** Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

**Věta 15.** Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 16.** Otočení se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\alpha$  převádí přímku  $p$  v přímku  $p'$  různoběžnou s  $p$ ; přitom dva vrcholové úhly, které  $p$  a  $p'$  tvoří, mají velikost  $\alpha$ .

### Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 3.6.** Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol  $A$  trojúhelníku  $ABC$  na bod  $B$ , bod  $B$  na bod  $C$  a bod  $C$  na bod  $A$ . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.

### 3.2.1 Otočení - Úlohy

24. Jsou dány dvě shodné úsečky  $AB$ ,  $CD$ . Určete otočení, které zobrazí  $A$  na  $C$  a  $B$  na  $D$ . [2]

25. Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $P \neq S$ . Bodem  $P$  vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti  $d$ . [1]

26. Jsou dány různé rovnoběžné přímky  $a, b, c$  a bod  $A$ , který leží na přímce  $a$ . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vrcholy  $B, C$  leží po řadě na přímkách  $b, c$ . [1]

27. Je dána kružnice  $k(S; 3cm)$  a bod  $A$  ( $|SA| = 1.5cm$ ). Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$  o délce  $5.5cm$ , které procházejí bodem  $A$ . [2]

28. Je dána kružnice  $k(S; r)$ , bod  $B$  a úsečka délky  $d$  ( $d < 2r$ ). Sestrojte tětivu  $XY$  kružnice  $k$  délky  $d$  tak, aby byla vidět z bodu  $B$  pod úhlem  $60^\circ$ . [2]

### 3.2.2 Otočení - Úlohy na domácí přípravu

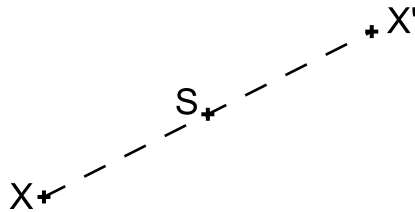
29. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $a, b$  a mimo ně bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABC$  tak, aby jeho vrcholy  $A, B$  ležely po řadě na přímkách  $a, b$ . [1]

30. Jsou dány kružnice  $k$ , přímka  $p$  a bod  $A$  ležící vně  $k$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě  $A$  tak, aby zbývající vrcholy ležely na  $k$  a na  $p$ . [1]

31. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra. [3]

### 3.3 Středová souměrnost

**Definice 13.** Středová souměrnost se středem  $S$  je shodné zobrazení, které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{S}(S)$ .



Obrázek 13: Středová souměrnost  $\mathcal{S}(S)$

**Poznámka.** Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace  $\mathcal{R}(S, \alpha)$  pro  $\alpha = \pi$ , tj.  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$ .

Vlastnosti středové souměrnosti:

- 1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti  $S$ ; jedna z os je volitelná.
- 2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti  $S$  odpovídá průsečíku těchto os).
- 3) Je jednoznačně určena svým středem
- 4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).
- 5) Středová souměrnost je *přímá shodnost*.
- 6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed  $S$ , a všechny směry samodružné.

**Věta 17.** V souměrnosti podle středu  $S$  je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem  $S$  je samodružná.

**Analytické vyjádření středové souměrnosti  $\mathcal{S}(S)$  v rovině**

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_1 \\y' &= -y + 2s_2\end{aligned}$$

**Věta 18.** Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

### 3.3.1 Středová souměrnost - Úlohy

- 32.** Je dána kružnice  $k(O; r)$  a přímka  $p$ , která má od středu  $O$  vzdálenost  $v > 0$ ; dále je dán bod  $S$ , který leží uvnitř poloroviny  $pO$ . Sestrojte úsečku se středem  $S$ , která má krajní body  $K, P$  po řadě na kružnici  $k$  a na přímce  $p$ . [1]
- 33.** Je dána kružnice  $k(S, r)$ . Bodem  $P$ , který leží vně kružnice  $k$ , vedte přímku  $p$ , která protíná kružnici v bodech  $A, B$  tak, že  $A$  je středem úsečky  $BP$ . [2]
- 34.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby bod  $S$  byl středem úsečky  $XY$ . [1]
- 35.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$ . [2]
- 36.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$ . [1]
- 37.** Jsou dány dvě kružnice  $k_1, k_2$ , které se protínají ve dvou bodech  $Q$  a  $R$ . Bodem  $Q$  vedte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky. [1]

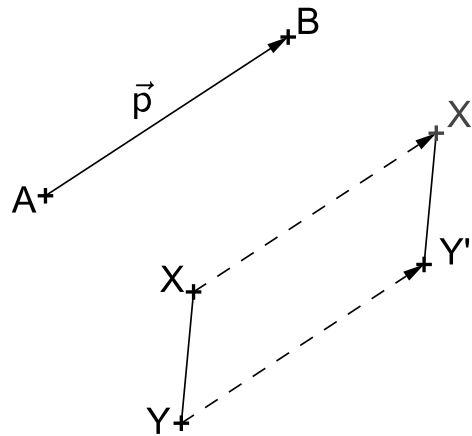
### 3.3.2 Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

- 38.** Je dán trojúhelník  $ABC$  a jeho vnitřní bod  $M$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  se středem  $M$  a s krajními body  $X, Y$  na hranici trojúhelníku. [1]
- 39.** Vepište danému rovnoběžníku  $ABCD$  čtverec  $XYUV$  tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce. [1]
- 40.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby  $XY S$  byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $XY$ . [1]
- 41.** Je dána úsečka  $AA_1$ ;  $|AA_1| = 4.5\text{cm}$ . Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ , v nichž  $AA_1$  je těžnicí  $t_a$  a  $t_b = 6\text{cm}$ . [1]



### 3.4 Posunutí (Translace)

**Definice 14.** Orientovanou úsečkou  $AB$  je dán vektor  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ . **Posunutí** neboli **translace** je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje bod  $X'$  tak, že platí  $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$ , tj.  $X' = X + \vec{p}$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{T}(\vec{p})$ .



Obrázek 14: Posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$

**Poznámka.** Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

**Věta 19.** Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 20.** Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).

**Věta 21.** Necht'  $X'$  je obraz libovolného (proměnného) bodu  $X$  v dané translaci  $\mathcal{T}$ . Pak všechny přímky  $XX'$  jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky  $XX'$  jsou navzájem shodné.

#### 3.4.1 Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathcal{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$ , kde  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p_1 \\y' &= y + p_2\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 3.7.** Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?

### 3.4.2 Posunutí - Úlohy

- 42.** Jsou dány přímka  $p$  a dvě nesoustředné kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ . Vedte přímku rovnoběžnou s přímkou  $p$  tak, aby na ní kružnice  $k_1, k_2$  vytínaly shodné tětivy. [1]
- 43.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček  $|AC| = e$ ,  $|BD| = f$  a velikosti úhlů  $|\angle ABC| = 90^\circ$ ,  $|\angle ADC| = \delta$ . [2]
- 44.** Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran  $a, b, c, d$ . [1]
- 45.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jsou-li dány velikosti jeho stran  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = c$ ,  $|DA| = d$  a odchylka  $\omega$  přímek  $AD, BC$ . [2]
- 46.** Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček. [1]
- 47.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky obou jeho základů  $a, c$  a obou jeho úhlopříček  $e, f$ . [1]
- 48.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a úsečka délky  $r$ . Sestrojte všechny kružnice  $k$  se středem na přímce  $a$ , poloměrem  $r$ , které na přímce  $b$  vytínají tětivu délky  $r$ . [1]

### 3.5 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost)

**PŘÍKLAD 3.8.** Je dána přímka  $p$  a dva body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Na přímce  $p$  sestrojte úsečku  $XY$  délky  $d$  tak, aby součet  $|AX| + |XY| + |YB|$  byl co nejmenší.

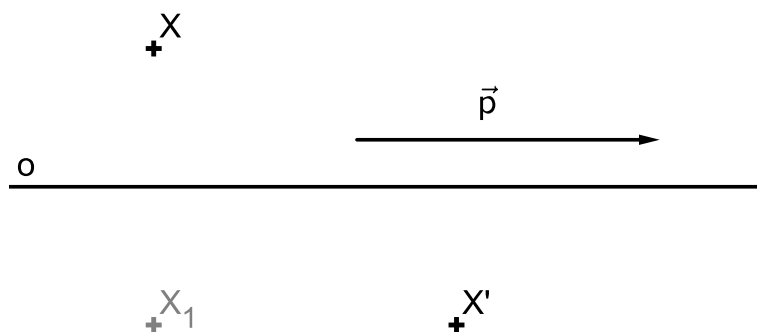
Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osově souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou souměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

- osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,
- otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,
- středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,
- identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

**Definice 15.** Je dána přímka  $o$ . Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky  $o$  a osově souměrnosti podle osy  $o$  se nazývá *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).



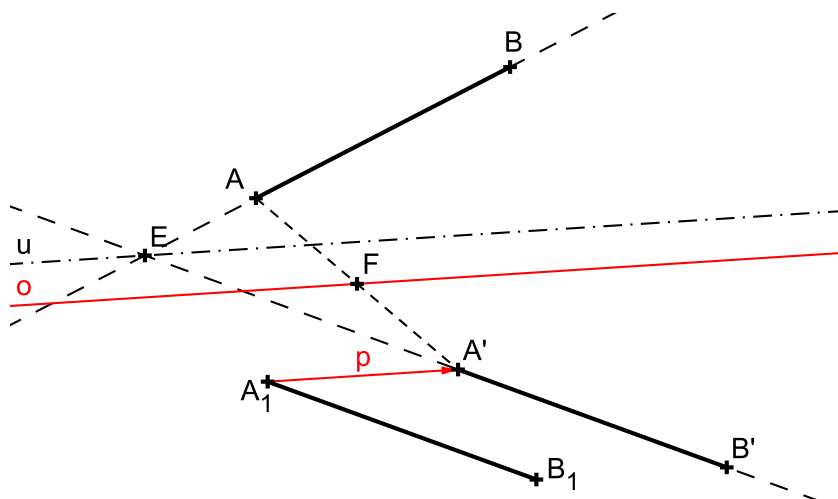
Obrázek 15: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

**Věta 22.** Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.

**Věta 23.** Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.

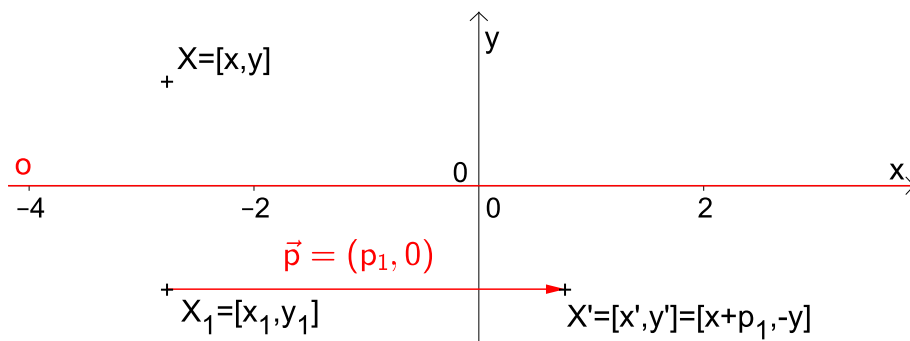
**PŘÍKLAD 3.9.** Necht'  $AB$ ,  $A'B'$  jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body  $A$ ,  $B$  po řadě v body  $A'$ ,  $B'$ .

Řešení:



Obrázek 16: Posunuté zrcadlení  $Z : AB \rightarrow A'B'$

### 3.5.1 Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 17: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose  $x$  a vektorem posunutí  $\vec{p} = (p_1, 0)$  (viz Obr. 17)

$$Z : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

### 3.5.2 Posunuté zrcadlení – Úlohy na domácí přípravu

**49.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a na nich dva body  $A \neq B$  ( $A$  na  $a$ ,  $B$  na  $b$ ). Určete bod  $X$  na  $a$  a bod  $Y$  na  $b$  tak, aby platilo  $|AX| = |BY|$  a dále aby:

- a)  $XY \parallel p$ , kde  $p$  je daná přímka; [1]
- b)  $XY = d$ , kde  $d$  je předem daná úsečka; [1]
- c) střed úsečky  $XY$  ležel na dané přímce  $q$ . [1]

## 4 Podobná zobrazení

### 4.1 Podobné zobrazení

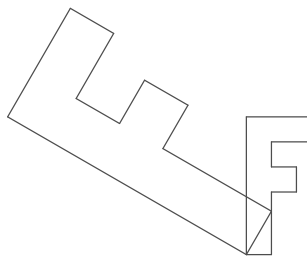
**Definice 16.** Zobrazení  $f$  euklidovského prostoru  $E$  do euklidovského prostoru  $E'$  se nazývá **podobné zobrazení**, jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  prostoru  $E$  platí:

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \quad (8)$$

Číslo  $k$  se nazývá *koeficient podobného zobrazení*  $f$ .

**Poznámka.** Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme **vlastní podobnosti**.

**PŘÍKLAD 4.1.** Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel  $\alpha$  a dvakrát zvětší, viz Obr. 18.



Obrázek 18: Podobné zobrazení v rovině

**Věta 24.** Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru  $E$  do euklidovského prostoru  $E'$  lze složit ze stejnolehlosti prostoru  $E$  a shodného zobrazení  $E$  do  $E'$ .

**Věta 25.** Každé podobné zobrazení je afinní.

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

**Věta 26** (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou  $P_0, P_1, \dots, P_n$  lineárně nezávislé body  $n$ -rozměrného euklidovského prostoru  $E_n$  a  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  body euklidovského prostoru  $E'$ . Afinní zobrazení prostoru  $E_n$  do prostoru  $E'$ , které zobrazuje bod  $P_i$  na bod  $P'_i$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$  je právě tehdy podobné, existuje-li číslo  $k > 0$  tak, že pro všechny dvojice  $i, j = 0, 1, \dots, n$  platí  $|P'_i P'_j| = k|P_i P_j|$ .*

**Poznámka.** Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

**PŘÍKLAD 4.2.** Formulujte „větu o určenosti podobného zobrazení“ pro rovinu, tj. eukleidovský prostor  $E_2$ .

**PŘÍKLAD 4.3.** V euklidovské rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body  $A, B, S$  zobrazí po řadě na body  $D, B, C$ . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

**PŘÍKLAD 4.4.** Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.

**Věta 27.** Každá „vlastní podobnost“ má právě jeden samodružný bod.

*Důkaz.* Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem  $k \in R^+ - \{1\}$ ) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost  $f$  nejméně dva samodružné body  $K$  a  $L$ ;  $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$ . Potom  $|K'L'| = |KL|$ , což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (8), kde  $k \neq 1$ . Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

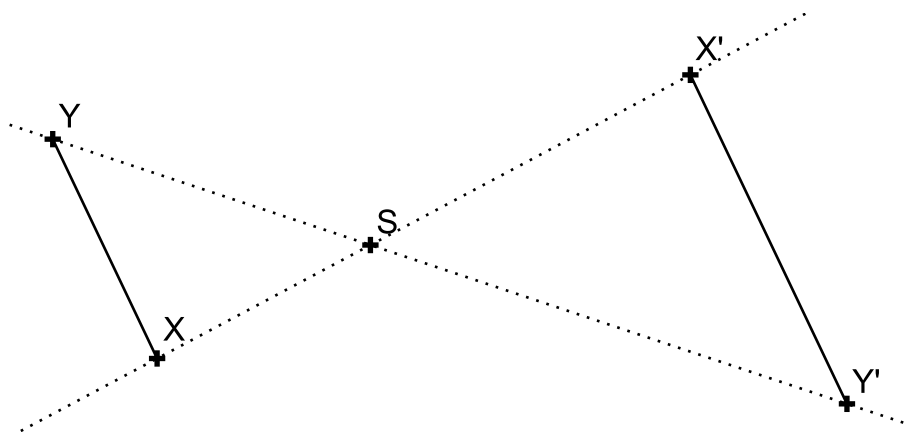
(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost  $f$  s rovnicí  $X' = A \cdot X + B$ , kde  $A^T \cdot A = k^2 I$ . Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici  $(I - A) \cdot X = -B$ . Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly,  $|I - A| \neq 0$ . Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost  $|I - A| = 0$ , znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice  $|\lambda I - A| = 0$  (viz str. 63) homomorfismu  $\varphi$  asociovaného s  $f$  je vlastní číslo  $\lambda = 1$ . Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor  $\vec{u} = Q - P$ , pro jehož obraz  $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$  platí  $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ . Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj.  $|f(P)f(Q)| = |PQ|$ , což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (8), kde  $k \neq 1$ . Determinant  $|I - A|$  tedy nemůže být roven nule, soustava  $(I - A) \cdot X = -B$  je proto regulární a má právě jedno řešení.  $\square$

## 5 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

**Definice 17.** *Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). Stejnolehlost  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 19: Stejnolehlost  $H(S, \kappa = -1.5)$

**Poznámka.** Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). Stejnolehlost  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tímto způsobem:*

1. Pro  $X \equiv S$  je  $X' \equiv X$ ,
2. Pro  $X \neq S$  je  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ ,  
*pro  $\kappa > 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{SX}$  a*  
*pro  $\kappa < 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce opačné k  $\overrightarrow{SX}$ .*

**Poznámka.** Zobrazení inverzní k stejnohlosti  $H(S; \kappa)$  je stejnohlost  $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$ .

**Základní vlastnosti stejnohlosti  $H(S, \kappa)$ :**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$ ;  $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$ .



3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ( $\kappa > 0$ ) nebo nesouhlasně ( $\kappa < 0$ ) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu  $\angle AVB$  je úhel  $\angle A'V'B'$ ;  $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$ .

**PŘÍKLAD 5.1.** Jsou dány dva různé body  $A, B$  a reálné číslo  $\lambda \neq 0, 1$ . Najděte na přímce  $AB$  bod  $C$  tak, aby platilo  $(ABC) = \lambda$ .

## 5.1 Analytické vyjádření stejnohlosti

Rovnice stejnohlosti  $H(S; \kappa)$ :  $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$ .

**PŘÍKLAD 5.2.** Napište rovnice stejnohlosti afinní roviny  $\mathbf{A}_2$ , která zobrazuje bod  $B = [2, 0, -1]$  na bod  $C = [0, 1, 3]$  a má koeficient  $\kappa = -2$ . Najděte souřadnice jejího středu.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 = 4/3, s2 = 1/3, s3 = 1/3]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [4/3, 1/3, 1/3]
```

## 5.2 Skládání stejnohlostí

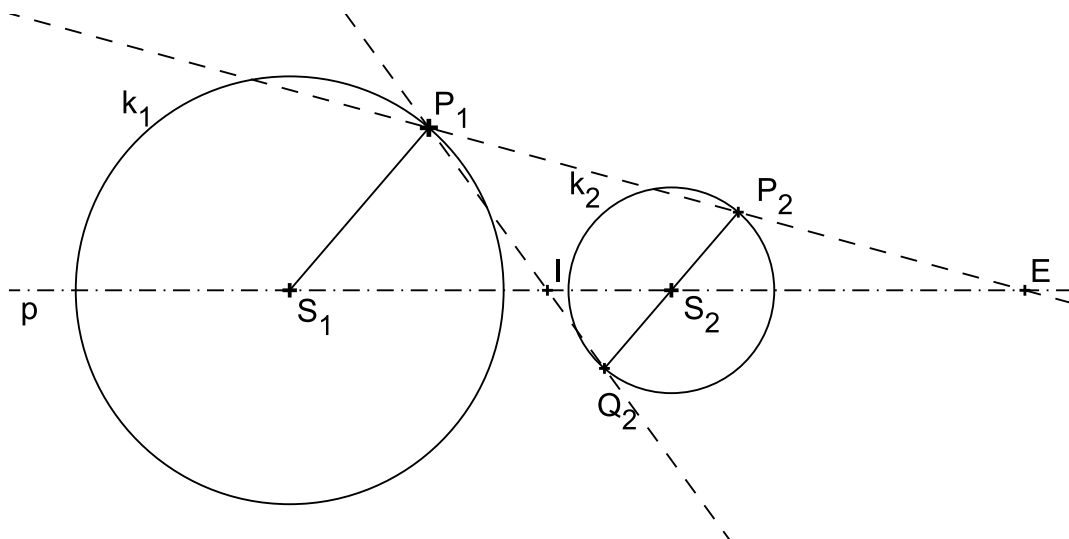
**Věta 28** (O skládání stejnohlosti a translace). Zobrazení složené ze stejnohlosti  $H(S; \kappa)$  a translace  $X' = X + \vec{t}$  je stejnohlost  $H'(Q; \kappa)$ , kde  $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$ .

**Věta 29** (O skládání stejnolehlostí). Složením dvou stejnolehlostí  $H_1(S_1, \kappa_1)$ ,  $H_2(S_2, \kappa_2)$  vznikne

1. IDENTITA, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ ,
2. POSUNUTÍ, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ ,
3. STEJNOLEHLOST  $H(S, \kappa)$  s koeficientem  $\kappa = \kappa_1\kappa_2$ , jestliže  $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ . Přitom, pro  $S_1 = S_2$  je také  $S = S_1 = S_2$ , pro  $S_1 \neq S_2$  leží bod  $S$  na přímce  $S_1S_2$ .

### 5.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice  $k_1(S_1; r_1)$ ,  $k_2(S_2; r_2)$  s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici  $k_1$  do kružnice  $k_2$ :  $H_1(E, r_2/r_1)$  a  $H_2(I, -r_2/r_1)$  (Bod  $E$  se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod  $I$  potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě  $T$ , je  $T = I$  v případě vnějšího dotyku a  $T = E$  v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 20: Stejnolehlost kružnic

**Věta 30** (Mongeova věta). Jsou-li  $k_1, k_2, k_3$  tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti  $E_{12}, E_{13}, E_{23}$  leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti  $I_{12}, I_{13}, I_{23}$  neleží v přímce.

**PŘÍKLAD 5.3.** Je dána kružnice  $k$ , přímka  $p$ , která je vnější přímkou kružnice  $k$ , a bod  $A \in p$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $A$  a kružnice  $k$ .

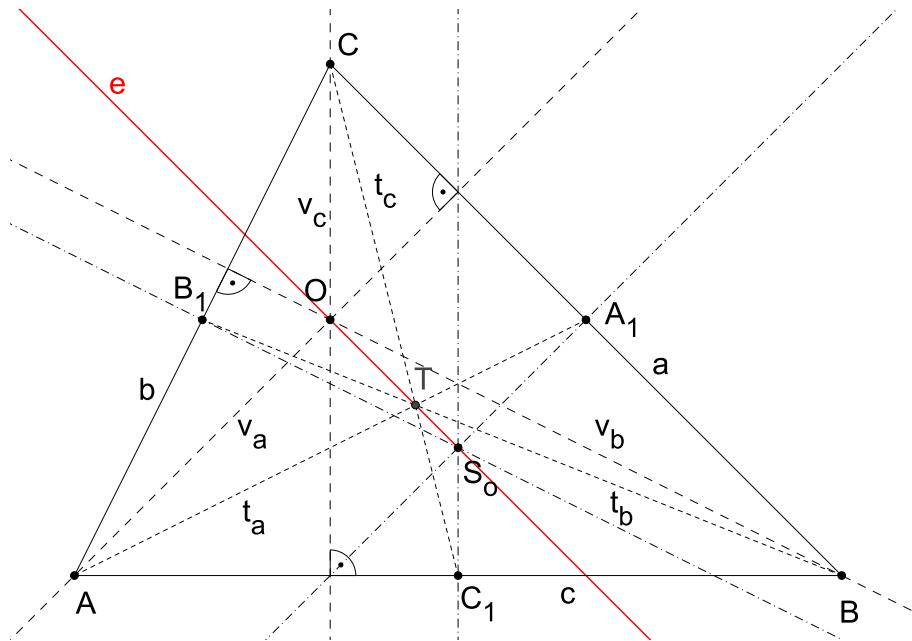
**PŘÍKLAD 5.4.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a bod  $M$ , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem  $M$  a dotýkají se přímek  $a, b$ .

**PŘÍKLAD 5.5.** Jsou dány dvě různoběžky  $m, n$  a kružnice  $k$  ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $m, n$  i kružnice  $k$ .

**PŘÍKLAD 5.6. (Eulerova přímka)** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $V$  průsečík výšek a  $S$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí  $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$ .

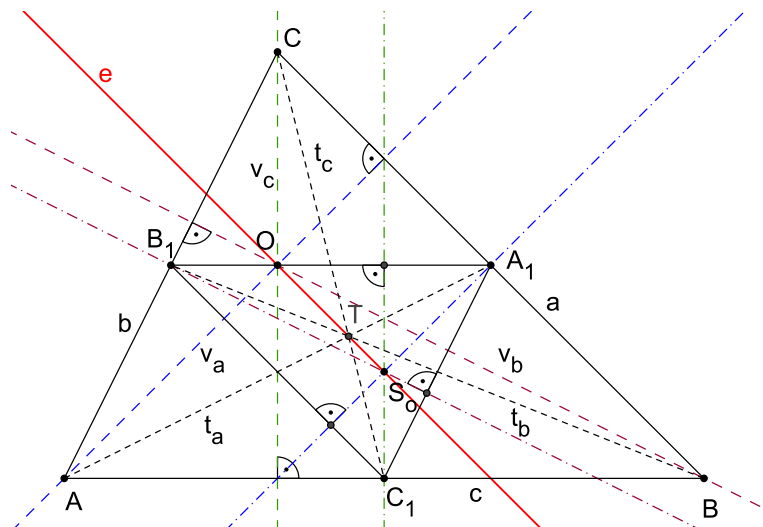
### Eulerova přímka

V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $O$  průsečík výšek a  $S_o$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí  $(S_o, O; T) = -\frac{1}{2}$ . Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 21.



Obrázek 21: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnoolehlost  $H(T, -\frac{1}{2})$ . Z Obr. 22 je patrné, že v této stejnoolehlosti se  $\triangle ABC$  zobrazí na  $\triangle A_1B_1C_1$ . Protože výškami



Obrázek 22:  $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

(výšky teď chápeme jako přímky)  $\triangle A_1B_1C_1$  jsou osy stran původního  $\triangle ABC$ , můžeme říci, že výšky trojúhelníku  $ABC$  se ve stejnolehlosti  $H(T, -\frac{1}{2})$  zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek  $O$  zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané  $\triangle ABC$ )  $S_o$ . Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body  $O, S_o, T$  leží v přímce a platí pro ně  $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$ .

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 36) je znázorněna v apletu „Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“

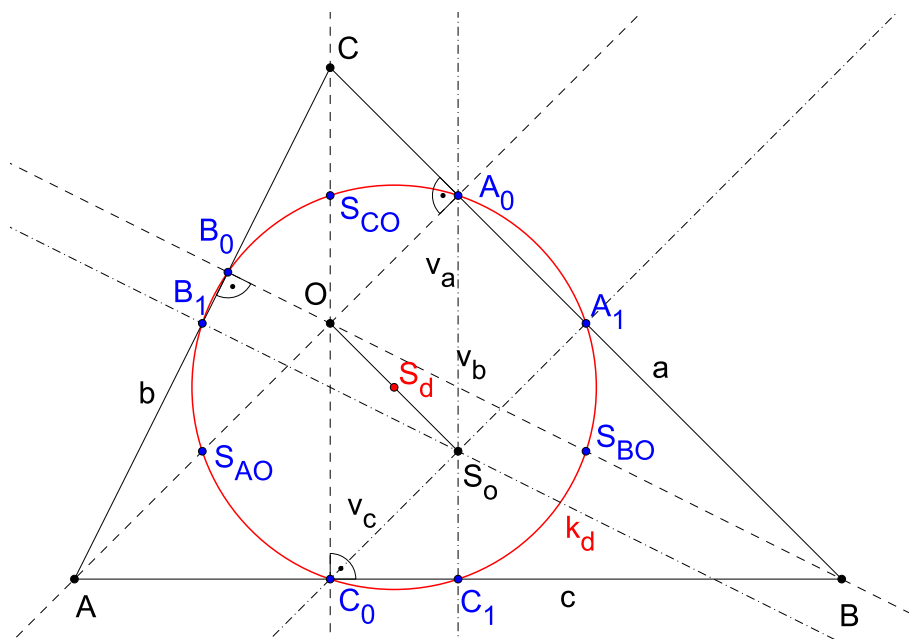
**PŘÍKLAD 5.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice)** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  průsečík výšek,  $S$  střed kružnice opsané,  $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC, CA$ . Nechť  $k_0$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1, C_1$ . Dokažte:

- 1) Na kružnici  $k_0$  leží též paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AV, BV, CV$ .
- 2) Střed kružnice  $k_0$  je středem úsečky  $SV$ , pokud  $S \neq V$ ; pokud je  $S \equiv V$  splyne střed  $k_0$  s bodem  $S$ .
- 3) Poloměr kružnice  $k_0$  je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

### Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku  $ABC$  označme  $O$  průsečík výšek,  $S_o$  střed kružnice opsané,  $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC$  a  $CA$ . Jestliže  $k_d$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1$  a  $C_1$ , potom na ni leží také paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AO, BO, CO$ . Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 23

Střed kružnice  $k_d$  je středem úsečky  $S_oO$ , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané.



Obrázek 23: Kružnice devíti bodů

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 35) je znázorněna v apletu „Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“

**PŘÍKLAD 5.8.** Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?

### 5.3.1 Stejnolehlost – Úlohy

**50.** Do půlkruhu s průměrem  $AB$  vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby strana  $KL$  ležela na úsečce  $AB$  a další dva vrcholy  $M, N$  na dané půlkružnici. [2]

**51.** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $A$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  tak, aby platilo:  $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$ . [2]

**52.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $a$  je sečnou a  $b$  je vnější přímkou kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $a, b$  i kružnice  $k$ . [2]

**53.** Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $v_a = 5\text{cm}, a : b : c = 2 : 3 : 4$ , [1]

b)  $\alpha, \beta, v_c$ , [1]

c)  $\alpha, \beta, t_c$ , [1]

d)  $a : b = 3 : 5, \gamma = 60^\circ, t_c = 6\text{cm}$ . [1]

### 5.3.2 Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

**54.** Určete  $p$  tak, aby existovala stejnoolehlost se středem  $[3, 2]$ , zobrazující bod  $[1, 4]$  na bod  $[2, p]$ . Napište rovnice této stejnoolehlosti. [2]

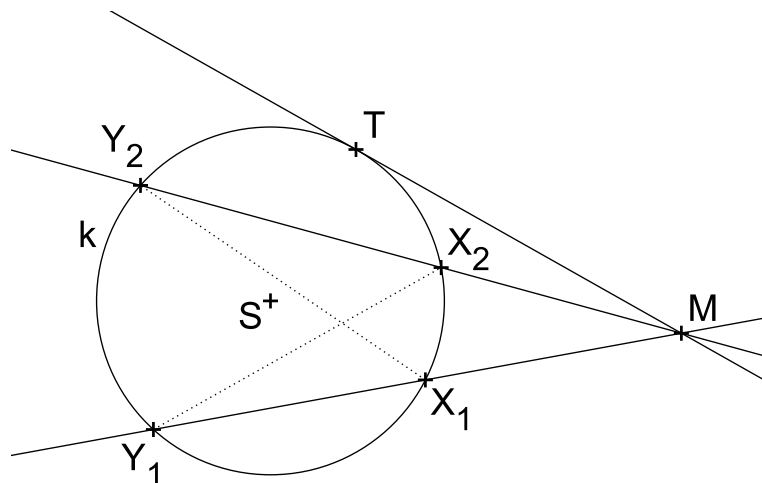
**55.** Je dána kružnice  $k$  a bod  $M$  uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem  $M$  rozděleny na části v poměru  $2 : 3$ . [1]

**56.** Narýsujte libovolný trojúhelník  $ABC$ . Uvnitř strany  $AC$  sestrojte bod  $X$  a uvnitř strany  $BC$  bod  $Y$  tak, aby platilo  $|AX| = |XY|$  a  $XY \parallel AB$ . [2]

## 6 Mocnost bodu ke kružnici

**Definice 18.** Mocností bodu  $M$  ke kružnici  $k(S; r)$  rozumíme reálné číslo  $m$ , pro které platí:

- (1)  $|MX| \cdot |MY| = |m|$ , kde  $X, Y$  jsou průsečíky kružnice  $k$  s její libovolnou sečnou procházející bodem  $M$ .
- (2) Je-li  $M$  vnějším bodem kružnice  $k$ , je  $m > 0$ .
- (3) Je-li  $M$  vnitřním bodem kružnice  $k$ , je  $m < 0$ .
- (4) Je-li  $M \in k$ , je  $m = 0$ .



Obrázek 24: Mocnost bodu  $M$  ke kružnici  $k$

**Věta 31.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $M$ , jejichž průsečíky s kružnicí  $k$  označíme  $X_1, Y_1$  a  $X_2, Y_2$ , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

**Věta 32.** Nechť je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ . Potom pro mocnost  $m$  bodu  $M$  ke kružnici  $k$  platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde  $d = |MS|$  je vzdálenost bodu  $M$  od středu kružnice  $k$ .

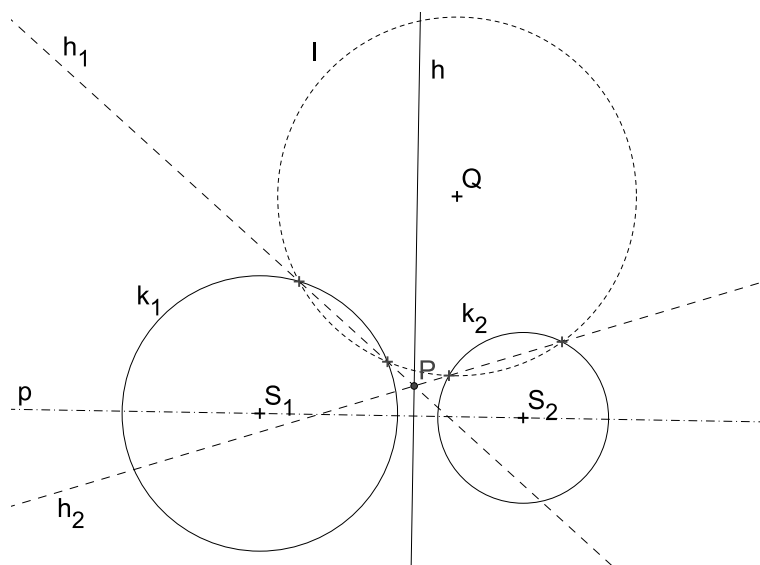
**Věta 33.** Nechť  $M$  je vnější bod kružnice  $k(S; r)$ ,  $m$  jeho mocnost ke kružnici  $k$ . Jestliže  $T$  je dotykový bod tečny vedené z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ , tak platí  $|MT|^2 = m$ .

## 6.1 Chordála a potenční střed

**Věta 34** (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou  $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$  dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů  $X$ , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka  $h \perp S_1S_2$ . Jestliže kružnice  $k_1, k_2$  mají společný bod  $M$ , potom přímka  $h$  prochází tímto bodem.*

**Poznámka.** Přímka  $h$ , která je množinou bodů  $X$ , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím  $k_1, k_2$  se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic  $k_1, k_2$ .

**Poznámka.** Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 25: Chordála  $h$  kružnic  $k_1, k_2$ , potenční bod  $P$  kružnic  $k_1, k_2, l$

### Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic  $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$  s rovnicemi  $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$  a  $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$  můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (9)$$

**PŘÍKLAD 6.1.** *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic  $k_1, k_2$ , které nemají společný bod.*



**PŘÍKLAD 6.2.** Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

**PŘÍKLAD 6.3.** Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází danými body  $A \neq B$  a dotýká se dané přímky  $t$ .

## 6.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

**57.** Je dán úhel  $\angle AVB$  a uvnitř něho bod  $M$ . Sestrojte kružnici, která prochází bodem  $M$  a dotýká se přímek  $AV, BV$ .

**58.** Obdélník má velikosti stran  $a, b$ . Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost  $c$ .

**59.** Jsou dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1, k_2$  a přímka  $p$ . Na této přímce určete bod  $P$  tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím  $k_1, k_2$  měly stejnou délku.

**60.** Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice  $k(S; r)$  a prochází dvěma různými body  $A, B$ , které leží vně dané kružnice  $k$ .

**61.** Je dán lichoběžník  $ABCD$  se základnami  $AB, CD$ ,  $|AB| > |CD|$ . Uvnitř úsečky  $AD$  sestrojte bod  $P$  a uvnitř úsečky  $BC$  bod  $Q$  tak, aby platilo zároveň  $PQ \parallel AB$  a  $PC \parallel AQ$ .

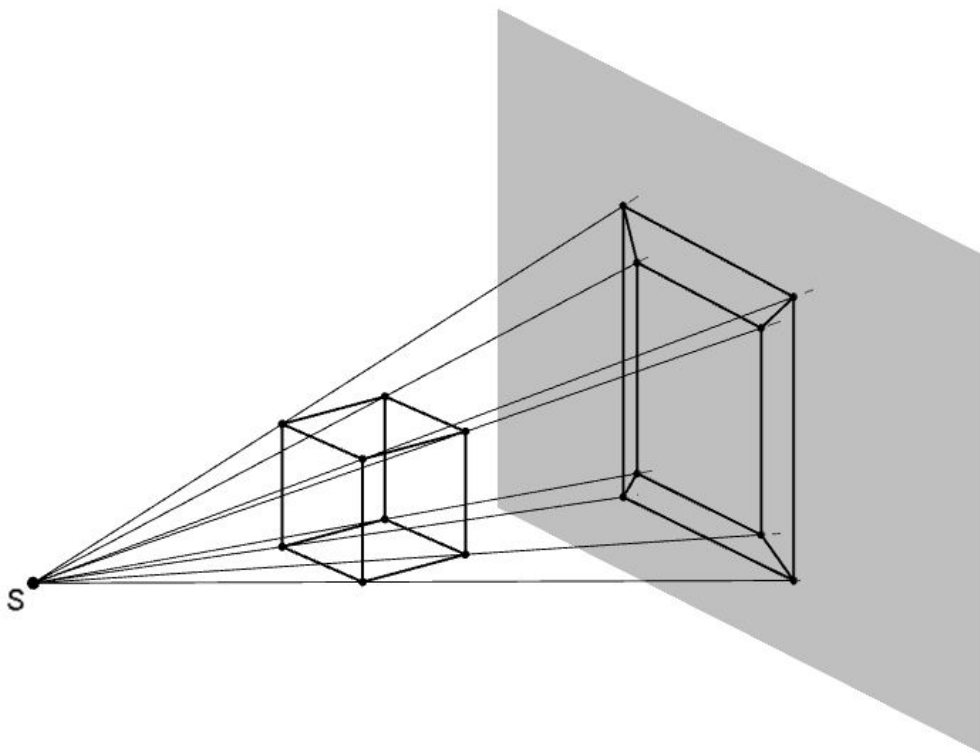
**62.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky jeho ramen  $|BC| = 4.5\text{cm}$ ,  $|DA| = 3\text{cm}$  a velikost  $75^\circ$  úhlu, který svírají přímky  $BC$  a  $AD$ , platí-li navíc  $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ .

## 7 Afinity zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 19) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru  $A_3$  do prostoru  $A_2$  je středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 26.

Častěji se budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_2$  nebo trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_3$ ). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity patří např. shodnosti v rovině nebo stejnoolehlost, které se vyučují v matematice na základních a středních školách.



Obrázek 26: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

**Definice 19** (Afinní zobrazení). Zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A$  do afinního prostoru  $A'$  se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body  $B, C, D$  z prostoru  $A$  na přímce, pak jejich obrazy  $f(B), f(C), f(D)$  buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

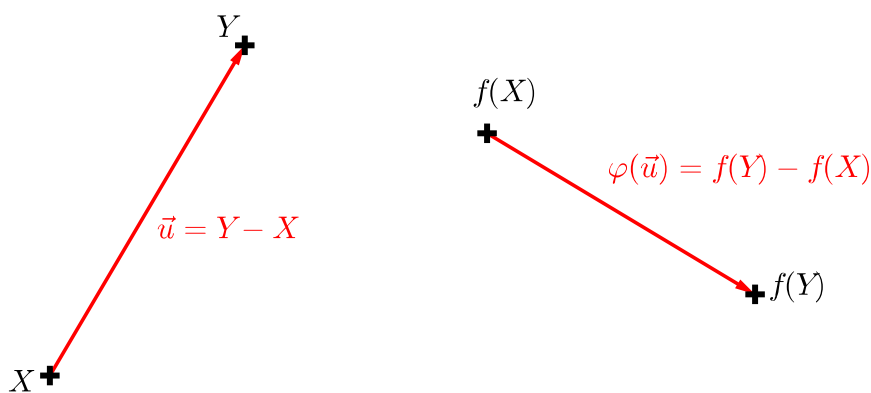
$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

**Definice 20** (Asociovaný homomorfismus<sup>1</sup> zobrazení  $f$ ). Uvažujme afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A$  do prostoru  $A'$ , např.  $f : E_2 \rightarrow E_2$ . Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V$  prostoru  $A$  do zaměření  $V'$  prostoru  $A'$  takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (10)$$

kde  $X, Y$  jsou body z  $A$ ,  $\vec{u} \in V$ ;  $f(X), f(Y)$  body z  $A'$ ,  $\varphi(\vec{u}) \in V'$ .

Role asociovaného homomorfismu  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$  je patrná z Obr. 27. Afinní zobrazení  $f$  se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body  $X, Y$  po řadě na body  $f(X), f(Y)$ . Homomorfismus  $\varphi$  asociovaný s  $f$  potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor  $\vec{u} = Y - X$  zobrazuje na vektor  $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$ .



Obrázek 27: Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$

<sup>1</sup>Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá homomorfismus (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ ,  $k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:

$$(1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$

$$(2) \quad \varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u}).$$

## 7.1 Rovnice afinního zobrazení z $A_n$ do $A_m$

Nechť afinní bodový prostor  $A_n$  je určen počátkem  $P$  a bází  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ , tzn.  $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Podobně nechť  $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$ . Nechť  $f$  je afinní zobrazení  $A_n$  do  $A'_m$  a  $\varphi$  asociované zobrazení k  $f$  tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

tzn. koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_j)$  v bázi zaměření prostoru  $A_m$ ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (12)$$

tzn. počátek  $P \in A_n$  se zobrazuje do bodu  $f(P) \in A'_m$ , který má při počátku  $Q$  souřadnice  $b_i$ .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_n$  a jeho obrazu  $f(X) \in A'_m$ . Vyjádřeme souřadnice  $X$ ,  $f(X)$  :

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (13)$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (14)$$

Zobrazíme-li bod  $X$  v afinitě  $f$ , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$  psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (11) a (12) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (15)$$

Porovnáme-li koeficienty při  $\vec{d}_i$  ve vyjádřeních (14) a (15), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

Jinou formou zápisu (16) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (17)$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (18)$$

## 7.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_n$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (19)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (20)$$

Na (19) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (11). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (21)$$

Srovnáním (21) s (20) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (22)$$

### 7.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

**Věta 35** (O určenosti afinního zobrazení). *Mějme dva afinní bodové prostory  $A_n, A'_m$ . Necht'  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  je  $n+1$  lineárně nezávislých bodů v  $A_n$ ,  $M'_0, M'_1, \dots, M'_n$   $n+1$  libovolně zvolených bodů v  $A'_m$ . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A_n$  do  $A'_m$ , které přiřazuje bodům  $M_j$  body  $M'_j$  tak, že*

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

*Důkaz.* Ze Def. 20 asociovaného homomorfismu  $\varphi$  plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení  $f$  lze vyjádřit vztahem  $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$ , který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (23)$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení  $f$  lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor  $\rightarrow$  obraz“, v případě (23) je to dvojice  $P \rightarrow f(P)$ , a asociovaným homomorfismem  $\varphi$ . Z toho plyne důkaz věty 35: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“  $M_0 \rightarrow M'_0$  a asociovaným homomorfismem  $\varphi$  jednoznačně určeným  $n$  nezávislými vektory  $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$  a jejich obrazy (které mohou být závislé)  $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$ .  $\square$

**PŘÍKLAD 7.1.** *Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_3$ , při kterém se body  $B[1, 0], C[0, 1], D[2, p]$  zobrazí po řadě na body  $B'[2, 1, -1], C'[3, 2, 0], D'[1, 0, 2]$ .*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2=2;
      r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
      r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

```
(%o1) b1 + a11 = 2
```

$$(\%o2) \quad b_2 + a_{21} = 1$$

$$(\%o3) \quad b_3 + a_{31} = -1$$

$$(\%o4) \quad b_1 + a_{12} = 3$$

$$(\%o5) \quad b_2 + a_{22} = 2$$

$$(\%o6) \quad b_3 + a_{32} = 0$$

$$(\%o7) \quad a_{12}p + b_1 + 2a_{11} = 1$$

$$(\%o8) \quad a_{22}p + b_2 + 2a_{21} = 0$$

$$(\%o9) \quad a_{32}p + b_3 + 2a_{31} = 2$$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],  
[a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o10) \quad [a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{21} = -1, a_{22} = 0, a_{31} = -\frac{p-3}{p+1}, a_{32} = \frac{4}{p+1}, b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = -\frac{4}{p+1}]$$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(\%o11) \quad [x_1 = 3 - x, y_1 = 2 - x, z_1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

**PŘÍKLAD 7.2.** Určete rovnici afinního zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1], [3, 2], [0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2], [0], [8]$ .

**PŘÍKLAD 7.3.** Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru  $A_3$  do průmětny  $\pi \subset A_3$ , vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru  $A_3$ , je-li dána průmětna  $\pi$  rovnicí  $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$  a směr promítání je určen vektorem  $\vec{s} = (2; 1; 3)$ .

**PŘÍKLAD 7.4.** Určete rovnice afinního zobrazení  $f : A_3 \rightarrow A_2$ , které bodům  $A = [1, 2, 3], B = [0, 1, 1], C = [1, -1, 2], D = [3, 0, 1]$  přiřazuje v daném pořadí body  $A' = [-1, 3], B' = [0, 2], C' = [0, 0], D' = [3, 1]$ .

## 7.4 Cvičení – Afinní zobrazení

**63.** Určete rovnici afinního zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1], [3, 2], [0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2], [4], [10]$ .

**64.** Pro jaké hodnoty parametrů  $p, q$  existuje afinní zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A'_2$ , při kterém se body  $[2, 1], [-2, 3], [4, 0]$  zobrazí po řadě na body  $[p, 3], [0, q], [1, 1]$ .

## 8 Afinita

*Afinita* je stručný název pro *afinní transformaci prostoru*, tj. *vzájemně jednoznačné afinní zobrazení bodového prostoru  $A_n$  na sebe*.

**Poznámka.** „Vzájemně jednoznačným zobrazením“ rozumíme zobrazení, které je zároveň „prosté“ a „na množinu“.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (16), (17) nebo (18). Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity čtvercová a regulární. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (24)$$

kde  $A$  je regulární čtvercová matice  $n$ -tého řádu a  $X, B$  a  $X'$  jsou matice typu  $(n, 1)$ . Jako příklady si uveďme afinity prostorů  $A_2$  a  $A_3$ .

Každé afinní zobrazení  $f$  afinní roviny  $A_2$  do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (25)$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Každé afinní zobrazení  $f$  v prostoru  $A_3$  můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (27)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

**PŘÍKLAD 8.1.** *Zdůvodněte, proč ze skutečnosti, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením, vyplývá, že její matice je regulární.*



## 8.1 Afinita v rovině

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory  $A_n$  a  $A'_m$  splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru  $A_n$  (v našem případě  $E_2$ ) na sebe.

**Definice 21.** *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru  $E_2$  na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru  $E_2$  nebo „afinní transformací prostoru  $E_2$ .“*

**Poznámka.** Množina afinit v rovině spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu, tzv. „afinní grupu roviny“. Obecné formulaci této skutečnosti je věnována věta 42 na str. 58.

## 8.2 Rovnice afinity v rovině

Každé afinní zobrazení  $f$  v rovině  $E_2$ , které bodu  $X = [x, y]$  přiřazuje obraz  $X' = [x', y']$ , je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (29)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (29), je afinitou v rovině. Soustavu (29) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

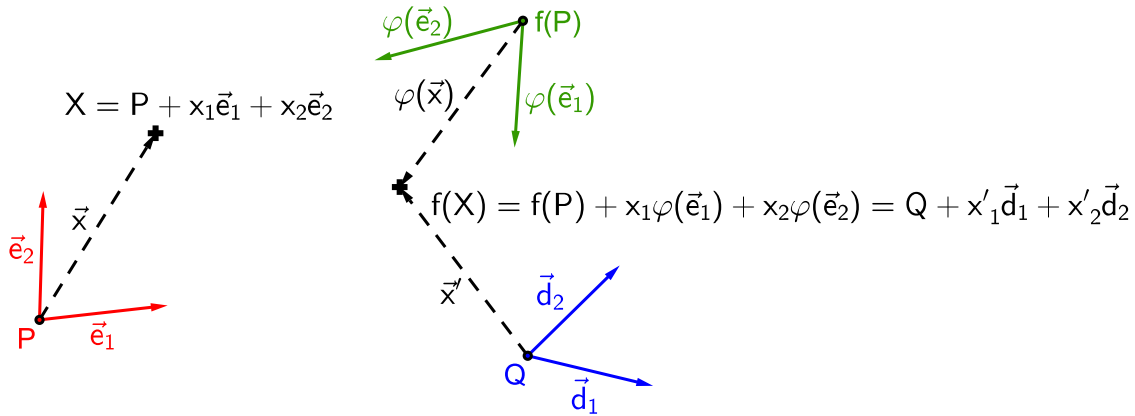
Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde  $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  a  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ .

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (29) afinního zobrazení  $f$  roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 28. V rovině  $A_2$  máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“  $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  (je určena počátkem  $P$  a bází  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ) a „soustavu obrazů“  $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  (určena počátkem  $Q$  a bází  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ). Přitom repér  $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  se působením uvažované

afinity  $f$  zobrazí na repér  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ , kde  $\varphi$  homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k  $f$ . Obrazem bodu  $X = [x_1, x_2]$  je bod  $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$ . Vztah mezi souřadnicemi  $f(X)$  a  $X$  najdeme tak, že bod  $f(X)$  vyjádříme vzhledem k oběma repérům  $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$  (viz Obr. 28) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 28: Zobrazení bodu  $X$  v afinitě  $f$  v rovině

Nechť  $f$  je afinní zobrazení prostoru  $A_2$  na sebe a  $\varphi$  je homomorfismus asociovaný k  $f$ . Potom obrazy  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vektorů báze  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (31)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (32)$$

kde koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vzhledem k bázi  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a pro obraz  $f(P)$  počátku  $P$  repéru  $\alpha$  můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (33)$$

kde  $[b_1, b_2]$  jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru  $\omega$ .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_2$  a jeho obrazu  $X' = f(X) \in A_2$ . Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod  $X$  v repéru  $\alpha$ , bod  $f(X)$  pak v repéru  $\omega$ ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (34)$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (35)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$ , zapíšeme obraz bodu  $X$  ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (31), (32) a (33) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při  $\vec{d}_i$  s vyjádřením (35) dostáváme hledané rovnice afinity  $f$  v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_2$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V_2$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (37)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (38)$$

Na (37) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (31) a (32). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (38) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (36) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

### 8.3 Věta o určenosti afinity v rovině

**Věta 36** (O určenosti afinity v rovině). *Nechť  $K, L, M$  a  $K', L', M'$  jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita  $f$  této roviny, která body  $K, L, M$  zobrazuje v daném pořadí na body  $K', L', M'$ .*

*Důkaz.* Využijeme (29). Afinita  $f$  musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ , která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]$ :

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (40)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (41)$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]$ :

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (42)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (43)$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]$ :

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (44)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (45)$$

Pro známé souřadnice bodů  $K, L, M, K', L', M'$  tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ . Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 36. Po detailním prozkoumání rovnic (40)–(45) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (40), (42) a (44) o neznámých  $a_{11}, a_{12}, b_1$  a soustavu rovnic (41), (43) a (45) o neznámých  $a_{21}, a_{22}, b_2$ . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (46)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (47)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\left| \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{array} \right| \neq 0. \quad (48)$$

Determinant v (48) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (49)$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory  $L - K$  a  $M - K$  nezávislé, tj. body  $K, L, M$  neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body  $K, L, M$  neleží v přímce, ani body  $K', L', M'$  nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity  $X' = A \cdot X + B$ . Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (50)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (51)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (52)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že  $K, L, M$  neleží v přímce a zároveň body  $K', L', M'$  leží v přímce. Potom existuje  $j \in R$  takové, že  $L' - K' = j(M' - K')$ . Po dosazení z (50)–(52) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k  $A$  dostaneme  $L - K = j(M - K)$ , což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů  $K, L, M$ . Body  $K', L', M'$  tedy také nemohou ležet v přímce.

□

## 8.4 Afnita prostoru $A_n$

**Definice 22.** *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru  $A_n$  na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru  $A_n$  nebo „afinní transformací prostoru  $A_n$ “.*

**Věta 37** (O určenosti). *Nechť  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  a  $M'_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_n$  jsou dvě skupiny  $(n + 1)$  lineárně nezávislých bodů afinního prostoru  $A_n$ . Pak existuje jediná afnita  $f$  prostoru  $A_n$ , pro kterou*

$$f(M_i) = M'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru  $A$ , pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu  $f$  uvažovaného prostoru.

**Věta 38.** *Nechť v afinním bodovém prostoru  $A_n$  jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy  $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ;  $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n\}$ . Pak existuje jediná afinita prostoru  $A_n$ , pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení  $\varphi$

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## 8.5 Rovnice afinity prostoru $A_n$

Afinitu prostoru  $A_n$  chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z  $A_n$  do  $A'_m$ , kde  $m = n$ . Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (53)$$

zobrazujícími bod  $X = (x_1, \dots, x_n)$  do bodu  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ . Zobrazení asociované

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (54)$$

zobrazuje vektor  $\vec{u}(u_1, \dots, u_n)$  do  $\vec{u}'(u'_1, \dots, u'_n)$ .

**PŘÍKLAD 8.2.** *Určete afinitu v rovině  $A_2$ , ve které při dané soustavě souřadné se bod  $B = [0, 0]$  zobrazuje do bodu  $B' = [1, 0]$ , bod  $C = [1, 0]$  do bodu  $C' = [0, 1]$  a bod  $D = [0, 1]$  do bodu  $D' = [0, 0]$ .*

## 8.6 Modul afinity

Protože afinita prostoru  $A_n$  je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (53) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na  $E_3$  a  $E_2$ .

**PŘÍKLAD 8.3.** Určete afinitu v  $A_2$ , je-li obrazem bodu  $B = [6; -2]$  bod  $B' = [1; 1]$ , obrazem vektoru  $\vec{u} = (2; 1)$  vektor  $\vec{u}' = (4; 2)$  a vektoru  $\vec{v} = (-1; 2)$  vektor  $\vec{v}' = (-3; 6)$ . Porovnejte obsahy trojúhelníků  $BCD$  a  $B'C'D'$ , kde  $C = B + \vec{u}$ ,  $D = B + \vec{v}$  a  $C' = B' + \vec{u}'$ ,  $D' = B' + \vec{v}'$ .

**Věta 39.** Nechť  $f$  je afinita v prostoru  $E_3$  (resp.  $E_2$ ), která má modul  $\delta$ . Nechť  $U$  je měřitelný útvar v  $E_3$  (resp.  $E_2$ ), který má objem  $V$  (resp. obsah  $V$ ). Nechť obrazem útvaru  $U$  v afinitě  $f$  je útvar  $U'$ , který má objem  $V'$  (resp. obsah  $V'$ ). Potom platí

$$V' = |\delta| \cdot V. \quad (55)$$

*Důkaz.* Míra měřitelných útvarů v  $E_3$  (resp.  $E_2$ ) je definována pomocí rovnoběžnostěn (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěn v  $E_3$  a rovnoběžníků v  $E_2$ . Nechť v  $E_3$  je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , které mají ve zvolené bázi souřadnice  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . Obrazy těchto vektorů v zobrazení  $\varphi$  asociovaném k afinitě  $f$  označme  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$ ,  $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ ,  $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$  a jejich souřadnice  $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ ,  $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ ,  $\vec{w}' = (w'_1, w'_2, w'_3)$ . V afinitě  $f$  a zobrazení  $\varphi$  platí dle vztahu (54)

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_j, \quad v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j, \quad w'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (56)$$

Objem  $V'$  zobrazeného rovnoběžnostěnu  $U'$  určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem  $V$  rovnoběžnostěnu  $U$ :

$$V' = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Dosazením (56) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}u_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}v_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}w_j \end{vmatrix}, \quad (58)$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (59)$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \quad (60)$$

Pokud je  $\delta < 0$ , pak lze znaménko minus vytknout, tj.  $V' = -\delta \cdot (-V)$ . Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v  $E_2$  zřejmě stačí, uvážíme-li obsah  $V$  libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body  $M, N, P$  a jeho obrazu v dané afinitě určeného body  $M', N', P'$ .  $\square$

## 8.7 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

**Definice 23.** Je-li modul afinity kladný, nazývá se „afinita přímá“. Afinita se záporným modulem se nazývá „nepřímá“. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinita, stručně „ekviafinita“.

**PŘÍKLAD 8.4.** Určete rovnice a modul afinity  $f : E_3 \rightarrow E_3$ , v níž se body  $K[0, 0, 0]$ ,  $L[1, 4, 0]$ ,  $M[-1, 0, 6]$ ,  $N[4, 5, 8]$  zobrazí na body  $K'[1, 1, 1]$ ,  $L'[-2, 9, 6]$ ,  $M'[0, -5, 12]$ ,  $N'[0, 3, 26]$ . Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímou či nepřímou a zda je to ekviafinita.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

```
(%o25) b1 = 1
```

```
(%o26) b2 = 1
```

```
(%o27) b3 = 1
```

```
(%o28) b1 + 4 a12 + a11 = -2
```

```
(%o29) b2 + 4 a22 + a21 = 9
```

```
(%o30) b3 + 4 a32 + a31 = 6
```

```
(%o31) b1 + 6 a13 - a11 = 0
```



(%o32)  $b_2 + 6a_{23} - a_{21} = -5$

(%o33)  $b_3 + 6a_{33} - a_{31} = 12$

(%o34)  $b_1 + 8a_{13} + 5a_{12} + 4a_{11} = 0$

(%o35)  $b_2 + 8a_{23} + 5a_{22} + 4a_{21} = 3$

(%o36)  $b_3 + 8a_{33} + 5a_{32} + 4a_{31} = 26$

(%i37) `res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],  
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];`

(%o37)  $[a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 2, a_{23} = -1, a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1]$

(%i38) `ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,  
z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);`

(%o38)  $[x_1 = -y + x + 1, y_1 = -z + 2y + 1, z_1 = 2z + y + x + 1]$

(%i40) `A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);`

(%o40) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(%i42) `determinant(A);`

(%o42) 6

## 8.8 Cvičení – Afinity

**65.** Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

a) středová souměrnost se středem v počátku,

b) středová souměrnost se středem v bodě  $[5, 10]$ ,

c) osová souměrnost podle souřadnicové osy  $x$ ,

d) stejnoolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = 2$ ,

e) stejnoolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = \frac{-1}{2}$ .

Využijte applet na GeoGebraTube: [tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT](http://tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT)

## 9 Skládání afinních zobrazení

Nechť  $f_1$  je afinní zobrazení prostoru  $A$  do  $A'$ ,  $f_2$  afinní zobrazení prostoru  $A'$  do  $A''$ . Jestliže každému bodu  $X \in A$  je v  $f_1$  přiřazen bod  $f_1(X) \in A'$  a bodu  $f_1(X)$  přiřazen bod  $f_2[f_1(X)] \in A''$ , říkáme, že zobrazení  $f$  přiřazující bodu  $X$  bod  $f_2[f_1(X)]$  vzniklo složením zobrazení  $f_1$  a  $f_2$ . Zapisujeme  $f = f_2 \cdot f_1$ ,  $f = f_2 f_1$  nebo  $f = f_2(f_1(X))$ .

**Věta 40.** Složením dvou afinních zobrazení  $f_1, f_2$  vznikne afinní zobrazení  $f$ . Zobrazení  $\varphi$  asociované k  $f$  vznikne složením zobrazení  $\varphi_1, \varphi_2$  asociovaných po řadě k  $f_1, f_2$ .

**PŘÍKLAD 9.1.** V prostoru  $E_2$  jsou dány dvě středové souměrnosti  $S$  a  $O$ . Určete zobrazení  $Z_1 = SO$  a  $Z_2 = OS$ .

**PŘÍKLAD 9.2.** V prostoru  $E_n$  je dáno posunutí  $T$  a středová souměrnost  $S$ . Určete zobrazení  $Z_1 = TS$  a  $Z_2 = ST$ .

### 9.1 Afinní grupa v $A_n$

**Věta 41** (Inverzní zobrazení). Uvažujme afinní zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A_n$  na afinní prostor  $A'_m$ . Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory  $A_n, A'_m$  mají stejnou dimenzi, tj.  $m = n$ ). Pak k zobrazení  $f$  existuje zobrazení inverzní  $f^{-1}$ , které je rovněž afinním zobrazením.

*Důkaz.* Jsou-li  $B', C', D'$  tři kolineární body v prostoru  $A'_n$  a platí  $(B', C', D') = \lambda$ , uvažujme vzory  $B, C$  bodů  $B', C'$  při zobrazení  $f$  a na jimi určené přímce  $BC$  zvolme bod  $D$  tak, že dělicí poměr  $(B, C, D) = \lambda$ . Pak bod  $f(D)$  leží na přímce  $B'C' = f(B)f(C)$  a platí  $(B', C', f(D)) = \lambda$ . Protože také  $(B', C', D') = \lambda$ , je  $f(D) = D'$  a dělicí poměr  $(B', C', D') = (B, C, D)$ .  $\square$

Jak víme, pojmem „afinita“ se rozumí „vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru  $A_n$  na sebe“, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory  $A_n$  a  $A'_m$  splnou.

**Věta 42.** Všechny afinity prostoru  $A_n$  tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. „afinní grupu prostoru  $A_n$ “.

*Důkaz.* Složením dvou afinit prostoru  $A_n$  vznikne opět afinita prostoru  $A_n$ . K afinitě  $f$  existuje inverzní afinita  $f^{-1}$  (viz Věta 41). Neutrálním prvkem je potom identita.  $\square$

## 9.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (30) mají  $b_1 = b_2 = 0$ .

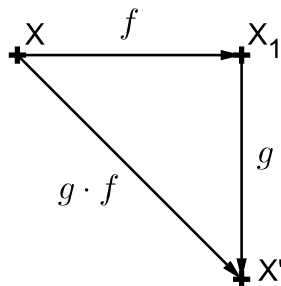
**PŘÍKLAD 9.3.** Jsou dána lineární zobrazení  $f, g$ :

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici  $M$  složeného zobrazení

$$g \cdot f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Řešení:* Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 29. Bod  $X[x, y]$  je afinitou  $f$  zobrazen



Obrázek 29: Skládání afinit  $f$  a  $g$  v rovině

na bod  $X_1[x_1, y_1]$ , ten je pak afinitou  $g$  zobrazen na bod  $X'[x', y']$ . Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 29 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{matrix} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{matrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{matrix} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{matrix}.$$

Potom po dosazení za  $x_1$  a  $y_1$  z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{matrix} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{matrix},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Z porovnání (61) a (62) je zřejmé, že pro matici  $M$  složené afinity  $g \cdot f$  platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Rovnost (63) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

**PŘÍKLAD 9.4.** *Řešení příkladu 9.3 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na  $E_n$ .*

## 10 Samodružné body a směry afinity

Samodružnými body a směry zobrazení rozumíme body a směry, které se v zobrazují samy na sebe. Například otočení  $\mathcal{R}(S)$  má jediný samodružný bod, střed  $S$ , a nemá žádný samodružný směr. Osová souměrnost  $\mathcal{O}(o)$  má celou přímku samodružných bodů, osu  $o$ , a dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou  $o$ , druhý kolmý na  $o$  (přímky těchto směrů se zobrazí na přímky s nimi rovnoběžné nebo totožné, tj. zobrazí se na přímky se stejnými směrovými vektory). Stejnolehlost  $\mathcal{H}(S, \kappa)$  má jediný samodružný bod, střed  $S$ , ale má všechny směry samodružné (tj. každá přímka se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou).

Samodružné prvky má smysl uvažovat jenom v případě, že se uvažovaný bodový prostor (v případě směrů pak jemu příslušející vektorový prostor, tj. zaměření) zobrazuje „do sebe“. Nadále se omezíme pouze na afinity (ty jsou dokonce zobrazeními uvažovaného prostoru „na sebe“).

### 10.1 Samodružné body

Samodružným bodem (afinity) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí  $X' = X$ . Po dosazení do maticové rovnice afinity  $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B$  tak dostaneme

$$X = A \cdot X + B,$$

po úpravě

$$(I - A) \cdot X = B, \tag{64}$$

kde  $I$  je jednotková matice stejného řádu jako  $A$ . Za rovnicí (64) se skrývá nehomogenní soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , souřadnicích hledaných samodružných bodů. Z teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být jedna, žádná nebo nekonečně mnoho uspořádaných  $n$ -tic  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , tj. jeden, žádný nebo nekonečně mnoho samodružných bodů. Množina řešení, tj. množina samodružných bodů uvažované afinity, má přitom charakter afinního bodového podprostoru (bod, přímka, rovina, ...).

Výpočet souřadnic samodružného bodu si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Pokud do rovnic (29) dosadíme  $x' = x$  a  $y' = y$  je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů příslušné afinity jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{65}$$

**PŘÍKLAD 10.1.** *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

*Řešení:* Dosazením  $x'$  za  $x$  a  $y'$  za  $y$  do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}2x &= 4, \\2y &= -6,\end{aligned}$$

která má jediné řešení  $[x, y] = [2, -3]$ . Daná afinita má tedy jediný samodružný bod  $S = [2, -3]$ .

**Poznámka.** Protože  $A^T \cdot A = I$ , kde  $I$  je jednotková matice, jedná se o shodnost. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost. O tom, které z nich to je, rozhodnou samodružné směry.

**PŘÍKLAD 10.2.** *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

*Řešení:* Dosazením  $x'$  za  $x$  a  $y'$  za  $y$  do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}0x &= 0, \\2y &= 0,\end{aligned}$$

která má tentokrát nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru  $[x, 0]$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . Jedná se tedy o afinitu jejíž všechny samodružné body leží v přímce o rovnici  $y = 0$ .

**Poznámka.** Protože opět platí  $A^T \cdot A = I$ , je to shodnost. V úvahu teď připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose  $x$ .

## 10.2 Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např.  $\vec{u}$ , říkáme mu „reprezentant“ tohoto směru (takovým reprezentantem pak může být každý jeho násobek). Má-li být směr určený vektorem  $\vec{u}$  samodružný, musí pro vektor  $\vec{u}'$ , který je obrazem  $\vec{u}$ , platit  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Poznámka.** „Směrem“ rozumíme množinu všech vektorů  $k\vec{u}; k \in R$  vektoru  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , tj. jednorozměrný vektorový prostor  $[\vec{u}]$ . Vektor  $\vec{u}$  nazýváme „reprezentantem“ tohoto směru. Pokud chceme zohlednit orientaci, použijeme „orientovaný směr“, tj. množinu všech vektorů  $k\vec{u}$ , kde ale  $k \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Víme, že zobrazení mezi vektory z vektorového prostoru, který je zaměřením afinního bodového prostoru, v němž operuje uvažovaná afinita (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřenými různými bodovými prostory), zajišťuje tzv. „asociovaný homomorfismus“ (též „lineární zobrazení“), viz definice 20 na str. 20<sup>1</sup>.

Po dosazení do maticové rovnice asociovaného homomorfismu  $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$  tak dostaneme

$$\lambda \vec{u} = A \cdot \vec{u},$$

po úpravě

$$(\lambda I - A) \cdot \vec{u} = \vec{0}, \quad (67)$$

kde  $I$  je jednotková matice stejného řádu jako  $A$  a vektor  $\vec{u}$  je sloupcový (aby bylo definováno násobení  $A \cdot \vec{u}$ ).

### Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor

Za rovnicí (67) se skrývá homogenní soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , souřadnicích reprezentanta hledaného samodružného směru. Z teorie řešitelnosti homogenních soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být buď jenom nulový vektor  $\vec{0}$ , hovoříme o „triviálním řešení“, nebo je řešením nekonečně mnoho vektorů, které tvoří vektorový podprostor. Nenulové vektory z tohoto prostoru řešení nazýváme „netriviální řešení“. Protože nulový vektor neurčuje žádný směr, zajímají nás při vyšetřování samodružných směrů pouze netriviální řešení homogenní soustavy (67). Homogenní soustava lineárních rovnic má i netriviální řešení (triviální má vždycky) právě tehdy, když je matice soustavy singulární, tj. její determinant je roven nule. Afinita  $X' = A \cdot X + B$  má proto samodružné body právě tehdy, když

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (68)$$

<sup>1</sup>Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) \quad \varphi(k\vec{u}) &= k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Uvažujme afinitu  $f$  prostoru  $E_n$ . Potom „asociovaným (tj. jednoznačně přiřazeným) homomorfismem“ afinity  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V_n$  prostoru  $E_n$  do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (66)$$

kde  $X, Y$  a  $f(X), f(Y)$  jsou body z  $E_2, \vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$ .

Rovnici (68) říkáme „charakteristická rovnice“ příslušného homomorfismu  $\varphi$ . Jedná se o algebraickou rovnici  $n$ -tého stupně pro neznámou  $\lambda$ . Každé číslo  $\lambda$ , které je řešením této charakteristické rovnice, pak nazýváme „vlastní číslo“ homomorfismu  $\varphi$ . Každý vektor  $\vec{u}$ , pro který platí  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ , nazýváme „vlastním vektorem“ homomorfismu  $\varphi$  (příslušnou hodnotu  $\lambda$  pak nazýváme „vlastní číslo homomorfismu  $\varphi$ , odpovídající vektoru  $\vec{u}$ “). Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny „charakteristický vektor“ a „charakteristické číslo“.

Výpočet samodružných směrů si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinity  $f$  je v tomto případě dán soustavou

$$\begin{aligned}\varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2,\end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \quad (69)$$

Samodružný směr afinity (tj. vektory těchto směrů, pro které platí  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ ) jsou potom „ netriviálním“ řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0.\end{aligned} \quad (70)$$

Homogenní soustava  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustava (69) má tedy nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (71)$$

Postup určení samodružných směrů afinity v rovině si nyní budeme ilustrovat na zobrazeních použitých v příkladech 10.1 a 10.2.

**PŘÍKLAD 10.3.** *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6.\end{aligned}$$



*Řešení:* Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo  $\lambda = -1$ , které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$ .

Vyšetřovaná afinita má tedy všechny směry samodružné.

**Poznámka.** Vzhledem k tomu, že z řešení příkladu 10.1 víme, že daná afinita je shodností a má jediný samodružný bod  $S = [2, -3]$ , po zjištění, že má všechny směry samodružné, je možno učinit závěr, že se jedná o středovou souměrnost se středem  $S$ .

**PŘÍKLAD 10.4.** *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= x, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

*Řešení:* Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro  $\lambda_1 = 1$  dostáváme soustavu

$$0u_1 = 0,$$

$$2u_2 = 0,$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou  $x$  (tj. s osou souměrnosti).

Pro  $\lambda_2 = -1$  dostáváme soustavu

$$-2u_1 = 0,$$

$$0u_2 = 0,$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose  $x$  (tj. k ose souměrnosti).

Daná afinita má tedy dva na sebe kolmé samodružné směry.

**Poznámka.** Zjištění, že daná afinita má dva na sebe kolmé samodružné směry, přitom jeden rovnoběžný s přímkou samodružných bodů a druhý na ni kolmý, je v souladu s poznatkem z řešení příkladu 10.2, že uvažovaná afinita je osovou souměrností.

**PŘÍKLAD 10.5.** Zjistěte, zda existuje shodnost  $E_2$ , při které se bod  $K = [10; 0]$  zobrazí na počátek  $K' = [0; 0]$  a bod  $L = [25; 20]$  na bod  $L' = [0; 25]$ . V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

*Řešení:* Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda  $|K'L'| = |KL|$ . V případě této úlohy zvládneme ověření provést z paměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o1) (a11 a12)
      (a21 a22)
```

```
(%o2) (b1)
      (b2)
```

Rovnici  $X' = A \cdot X + B$  vyjádříme ve tvaru  $A \cdot X + B - X' = O$  a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů  $K, K'$  a  $L, L'$ . Potom zapíšeme podmínku (82) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru  $A^T \cdot A - I = O$ . (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic. Jednotkovou matici  $I$  druhého stupně zadáme ve wxMaximě příkazem `ident(2)`.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
      s3:transpose(A).A-ident(2);
```

$$(\%o3) \begin{pmatrix} b1 + 10 a11 \\ b2 + 10 a21 \end{pmatrix}$$

$$(\%o4) \begin{pmatrix} b1 + 20 a12 + 25 a11 \\ b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o5) \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21 a22 + a11 a12 \\ a21 a22 + a11 a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ .

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

$$(\%o6) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$(\%o7) [[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6],$$

$$[a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body  $K, L$  na body  $K', L'$  (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o8) 
$$\begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

```

**Řešení č. 1:**

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

```
(%o9) 
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```

```
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o11) 
$$\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

Samodružný bod je bod, pro který platí  $X' = X$ . Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice  $X' = A \cdot X + B$  (pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ ) za  $X'$  dosadíme  $X$  a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými  $x, y$ .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o12) 
$$\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o13) [[x = 5, y = -15]]
```

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod  $S = [5, -15]$ .

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnicí (71)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o15) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o16) \left[ \lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem  $S = [5, -15]$ .

**Poznámka.** K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení  $\alpha$ . Jak to uděláme?

### Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

$$(\%i17) \text{A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);}$$

$$(\%o17) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o18) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení

$$(\%i19) \text{R2:ev(RovTr,res[2]);}$$

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:

$$(\%i20) \text{RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);}$$

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o21) []$$

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);  
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;  
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);  
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);  
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o29) [[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry  $\vec{u} = (-3, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 3)$ .

Jedná se o „posunuté zrcadlení“, viz str. ??.

**Poznámka.** K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu  $o$  a vektor posunutí  $\vec{t}$ . Jak to uděláme?

### 10.3 Homotetie, grupa homotetií

**Definice 24** (Homotetie). *Každé afinní zobrazení, které má všechny směry samodružné, se nazývá „homotetické zobrazení“, též „homotetie“.*

**Poznámka.** Pro homotetie se používá také označení „dilatace“.

Každá homotetie je stejnoolehlost, posunutí nebo identita (tj. posunutí o nulový vektor). V kapitole 5 věnované stejnoolehlosti se dozvíme, že množina těchto tří shodností spolu s operací skládání tvoří grupu, tzv. „grupu homotetií“.

**Poznámka.** Z výše uvedené existence „grupy homotetií“ vyplývá, že složením dvou zobrazení z množiny homotetií, tj. z množiny {stejnoolehlost, posunutí, identita}, vznikne opět jedno z těchto zobrazení.

## 11 Analytické vyjádření shodnosti

### 11.1 Přehled analytických vyjádření shodných zobrazení v $E_2$

#### 11.1.1 OSOVÁ SOUMĚRNOST

Osová souměrnost  $\mathbf{O}(o)$  podle osy  $o$  s obecnou rovnicí  $o : ax + by + c = 0$ :

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 11.1.** V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky  $p : 3x - 4y + 1 = 0$ . Napište rovnice této souměrnosti.

**PŘÍKLAD 11.2.** Napište rovnice souměrnosti podle přímky  $o : 2x - 3y + 1 = 0$ .

**PŘÍKLAD 11.3.** Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod  $[1, 5]$ .

#### 11.1.2 OTOČENÍ (ROTACE)

Otočení (rotace)  $\mathbf{R}(S, \alpha)$  se středem  $S = [s_1, s_2]$ :

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 11.4.** Napište rovnice otočení se středem  $S[1, -2]$  o úhel  $\alpha = 60^\circ$ .

#### 11.1.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Středová souměrnost  $\mathbf{S}(S)$  se středem  $S = [s_1, s_2]$ :

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_1 \\y' &= -y + 2s_2\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 11.5.** Napište rovnice středové souměrnosti  $\mathbf{S}(S)$  se středem  $S[-2, 3]$ .



#### 11.1.4 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Posunutí (translace)  $\mathbf{T}(\vec{p})$  určené vektorem  $\vec{p} = [p_1, p_2]$ :

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

**PŘÍKLAD 11.6.** *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem  $A = [-1, 3]$  a jeho obrazem  $A' = [4, 2]$ .*

#### 11.1.5 POSUNUTÉ ZRCADLENÍ

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose  $x$ :

$$x' = x + p$$

$$y' = -y$$

### 11.2 Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v $E_3$

Některá shodná zobrazení v prostoru:

#### 11.2.1 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Posunutí určené vektorem  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ :

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

$$z' = z + p_3.$$

#### 11.2.2 OTOČENÍ (ROTACE)

Otočení o úhel  $\alpha$  kolem osy  $z$ :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z.$$

### 11.2.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle počátku  $O = (0, 0, 0)$ :

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = -z.$$

### 11.2.4 OSOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle osy  $z$ :

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z.$$

### 11.2.5 ROVINOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle roviny  $(x, y)$ :

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z.$$

### 11.2.6 ŠROUBOVÝ POHYB

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitů)  $v_0$  a s osou  $v$  ose  $z$ :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z + v_0 \alpha.$$

### 11.3 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu  $f$  v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (72)$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (74)$$

#### Jak poznáme, že afinita (72) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů  $X[x_1, x_2]$ ,  $Y[y_1, y_2]$  a jejich obrazy  $X'[x'_1, x'_2]$ ,  $Y'[y'_1, y'_2]$  vztah  $|X'Y'| = |XY|$ , z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (75)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (76)$$

Nyní do levé strany (76) dosadíme z (72) (protože se body  $X[x_1, x_2]$ ,  $Y[y_1, y_2]$  zobrazují v daném pořadí na body  $X'[x'_1, x'_2]$ ,  $Y'[y'_1, y'_2]$ , dosazujeme takto:  $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$ ,  $x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$ ;  $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$ ,  $y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$ ). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (77)$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy  $(y_1 - x_1)$  a  $(y_2 - x_2)$ . Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (78)$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými  $(y_1 - x_1)$  a  $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (79)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (79) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost  $|X'Y'| = |XY|$  nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice  $A$  (tj. koeficienty soustavy (72)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (80)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (72) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (82)$$

**kde  $E$  je jednotková matice**, jinak řečeno, když je matice  $A$  **ortonormální**.

Podobu rovnic shodnosti v rovině lze díky podmínce (81) podstatně zjednodušit. Říká nám, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

Potom je ale zřejmé, že existuje úhel  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha, \\ a_{21} &= \sin \alpha, \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota  $\varepsilon$  určuje, zda se jedná o shodnost přímkou ( $\varepsilon = 1$ ) nebo nepřímou ( $\varepsilon = -1$ ). Každou přímkou shodnost v rovině potom můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2\end{aligned}$$

a každou nepřímou shodnost v rovině rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

### Poznámky.

1. Platí  $A^T \cdot A = E$ . Potom je ale  $A^T = A^{-1}$  a platí tedy i rovnost  $A \cdot A^T = E$ .
2. Zobrazení, pro která platí  $|\det A| = 1$  nazýváme ekviafinitní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?
3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi eukleidovskými prostory různých dimenzí není matice  $A$  čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka  $A^T \cdot A = E$ .

## 11.4 Klasifikace shodností roviny

**Myšlenka úplné klasifikace shodností:** Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou)

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (83)$$

### I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \end{aligned} .$$

### Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1 \\ -x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2. \end{aligned} \quad (84)$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (84) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

#### 1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

### Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0 \\ -u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda - \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (86)$$

Úpravou (86) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že  $\sin \alpha = 0$  a zároveň  $\cos \alpha = 1 = \lambda$  nebo  $\cos \alpha = -1 = \lambda$ . Pro  $\cos \alpha = -1$  tak dostáváme

## 2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 + b_1 \\ x'_2 &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Za podmínky, že  $\cos \alpha = 1$  dostaneme, pro  $b_1 = b_2 = 0$ ,

## 3) IDENTITU

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 \end{aligned}$$

a pro  $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$  dostáváme

## 4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2. \end{aligned}$$

## II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2. \end{aligned}$$

## Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha) & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda + \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad (87)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

kteřá odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro  $\lambda = 1$ , se zachovává, druhý, pro  $\lambda = -1$ , se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa  $x$  měla směr odpovídající  $\lambda = 1$ . Směr osy  $y$  pak zřejmě odpovídá  $\lambda = -1$ . Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je  $b_1 = 0$ , má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

#### 5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je ale  $b_1 \neq 0$ , má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

#### 6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

### Ilustrace myšlenky úplné klasifikace řešeným příkladem

**PŘÍKLAD 11.7.** Zjistěte, zda existuje shodnost  $E_2$ , při které se bod  $K = [10; 0]$  zobrazí na počátek  $K' = [0; 0]$  a bod  $L = [25; 20]$  na bod  $L' = [0; 25]$ . V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda  $|K'L'| = |KL|$ .

*Řešení v programu wxMaxima:*

Definujeme obecnou podobu matic  $A, B$  z rovnice (83).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o30) (a11 a12)
      (a21 a22)
```



$$(\%o31) \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

Do rovnice (83) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojice rovnic  $s1$  a  $s2$ . Třetí skupinu rovnic  $s3$  dostaneme z podmínky  $A^T \cdot A - I = 0$ .

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

$$(\%o32) \begin{pmatrix} b1 + 10 a11 \\ b2 + 10 a21 \end{pmatrix}$$

$$(\%o33) \begin{pmatrix} b1 + 20 a12 + 25 a11 \\ b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o34) \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21 a22 + a11 a12 \\ a21 a22 + a11 a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznamých  $a11$ ,  $a12$ ,  $a21$ ,  $a22$ ,  $b1$ ,  $b2$ .

```
(%i35) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

$$(\%o35) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

```
(%i36) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$(\%o36) [[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body  $K, L$  na body  $K', L'$  (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici  $\text{RovTr}$  pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i37) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

$$(\%o37) \begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$\begin{aligned} x1 &= \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - 8 \\ y1 &= \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6 \end{aligned}$$

Definujeme matice A1, B1 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

(%i38) `A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);`

$$(\%o38) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o39) \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(%i40) `R1:ev(RovTr,res[1]);`

$$(\%o40) \begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body najdeme řešením rovnice  $X = A \cdot X + B$ , pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ .

(%i41) `RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);`

$$(\%o41) \begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o42) [[x = 5, y = -15]]$$

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod  $S = [5, -15]$ .

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (71) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

(%i43) `CharA1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);`

$$(\%o43) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o44) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o45) \left[ \lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x_1 = -\frac{4x}{5} + \frac{3x}{5} + 8$$

$$y_1 = \frac{3x}{5} + \frac{4z}{5} - 6$$

Definujeme matice A2, B2 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

(%i46) `A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);`

$$(\%o46) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o47) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(%i48) `R2:ev(RovTr,res[2]);`

$$(\%o48) \begin{pmatrix} x_1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y_1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body najdeme řešením rovnice  $X = A \cdot X + B$ , pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ .

(%i49) `RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]], [x,y]);`

$$(\%o49) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

(%o50) `[]`

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (71) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o51) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o52) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o53) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla  $\lambda$  do soustavy (její matice) (70) a řešíme.

```
(%i54) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o54) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i55) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o55) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o56) [[u = -3 \%r3, v = \%r3]]$$

První samodružný směr je určen vektorem  $\vec{u}_1 = (-3, 1)$ .

```
(%i57) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o57) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o58) [[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$$

Druhý samodružný směr je určen vektorem  $\vec{u}_2 = (1, 3)$ .

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

## 11.5 Cvičení – Shodnosti v rovině

**66.** Určete parametr  $s$  tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body  $[0, 0]$ ,  $[3, 4]$  po řadě na body  $[5, 0]$ ,  $[9, s]$ . Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu  $[5, 0]$ . [2]

**67.** Určete  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tak, aby rovnice  $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$ ,  $y' = ax + cy - 1$  vyjadřovaly shodnost. [3]

**68.** Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a)  $x' = x + \frac{1}{2}y + 1$ ,  $y' = ax + \frac{1}{2}y - 1$ ,  $z' = bx + cy + 3$ ,

b)  $x' = x + by - 2$ ,  $y' = \frac{1}{2}y + 1$ ,  $z' = ax + cy - 3$ .

Určete koeficienty  $a, b, c$ . [3]

**69.** Najděte souřadnice obrazu bodu  $B = [1, 2]$  v otočení v  $E_2$  kolem středu  $S = [3, -4]$  o úhel  $\alpha = 420^\circ$ . Napište rovnice této shodnosti. [1]

**70.** Určete  $p$ ,  $q$  tak, aby existovala shodnost zobrazující body  $[3, 0]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[-1, -1]$  po řadě na body  $[1, 4]$ ,  $[p, 2]$ ,  $[2, q]$ . Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení. [2]

**71.** Napište rovnice středové souměrnosti v  $E_2$  podle středu  $S = [-4, 5]$ . [1]

**72.** Napište rovnice shodnosti roviny  $E_2$ , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x - 2y = 0$ . [3]

**73.** Rotace kolem bodu  $S = [2; 1]$  v  $E_2$  zobrazuje bod  $A = [1; 1]$  na bod  $A'$ . Najděte souřadnice bodu  $A'$ , jestliže pro úhel rotace  $\alpha$  platí  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ . [2]

**74.** Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi:  $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$ ,  $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$ . [2]

**75.** Najděte rovnice obrazu přímky  $p$  v rotaci v  $E_2$  kolem středu  $S = [-2; 1]$  o úhel  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , jestliže  $p : x - y + 1 = 0$ . [3]

## 11.6 Klasifikace shodností prostoru $E_3$

**Věta 43.** Každé shodné zobrazení v prostoru  $E_3$  lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.

**Některá shodná zobrazení v prostoru:**

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení  $f$  v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned}f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3,\end{aligned}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (88)$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (88) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \quad (89)$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (90)$$

kde  $E$  je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé  $\lambda$ . Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (90) ho označme  $\lambda_0$ . Shodnost v  $E_3$  má tak vždy alespoň jeden samodružný směr  $\vec{u}$ ;  $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$ . V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí  $\|\vec{u}'\| = \|\lambda_0 \vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ . Potom je zřejmé, že hodnota  $\lambda_0$  bude 1 nebo  $-1$ . Předpokládejme, že vektor  $\vec{u}$  je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa  $z$  směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 && + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && + b_2 \\ x'_3 &= && \pm x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os  $x, y$  připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \text{pro } \sin \alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme  $\pm z$ ). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ( $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ) nebo POSUNUTÍ

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2 \\ x'_3 &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY ( $b_1 = b_2 = 0$ ) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se  $z$  ( $b_3 = 0$ ) nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se  $z$  složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  ( $b_3 = 0$ ) nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

**Poznámka.** Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

**Poznámka.** Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.



### 11.6.1 Shodností prostoru $E_3$ - Úlohy

76. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení  $E_3$  na sebe, najděte jeho samodružné body a směry. [3]

77. Napište rovnice posunutí v  $E_3$ , v němž se bod  $M = [-2, 3, 1]$  zobrazí na bod  $M' = [5, 0, -4]$ . Najděte souřadnice obrazu bodu  $A = [1, 1, 1]$  v tomto posunutí. [1]

### 11.7 Shodná zobrazení v prostoru $E_n$

**Věta 44.** *Ke každé shodnosti  $f$  v  $E_n$  existuje  $k$  souměrností podle nadrovin tak, že  $f$  je jejich složením,  $k < n + 2$ .*

## 11.8 Skládání shodných zobrazení

### 11.9 Shodnosti přímé a nepřímé

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

### 11.10 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu<sup>1</sup>. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

**PŘÍKLAD 11.8.** *Ověřte následující tvrzení:*

(a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu  $G_S$ .*

(b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu  $G'_S$  grupy  $G_S$ .*

(c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*

(d) *Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy  $G'_S$ .*

**PŘÍKLAD 11.9.** *Trojúhelník  $ABC$  byl převeden otočením daného smyslu se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\omega = 120^\circ$  v trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , který byl dále převeden posunutím  $\mathcal{T}(A_1 \rightarrow A_2)$  v trojúhelník  $A_2B_2C_2$ . Určete otočení, které převádí přímo  $\triangle ABC$  v  $\triangle A_2B_2C_2$ .*

**PŘÍKLAD 11.10.** *Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

---

<sup>1</sup>Množinu  $G$ , v níž je definována operace  $\circ$  nazýváme grupou vzhledem k operaci  $\circ$  (značíme  $(G, \circ)$ ), právě když:

a) Výsledek operace  $\circ$  je pro každou dvojici prvků  $G$  opět prvkem  $G$  (říkáme, že operace  $\circ$  je na  $G$  neomezeně definovaná, nebo, že množina  $G$  je uzavřená vzhledem k operaci  $\circ$ ).

b) Operace  $\circ$  je asociativní v množině  $G$ .

c) Operace  $\circ$  má neutrální prvek  $n \in G$ .

d) Ke každému prvku  $k \in G$  existuje inverzní prvek  $k^{-1} \in G$  vzhledem k operaci  $\circ$ .

Je-li navíc operace  $\circ$  komutativní v množině  $G$ , nazýváme algebraickou strukturu  $(G, \circ)$  komutativní grupou.

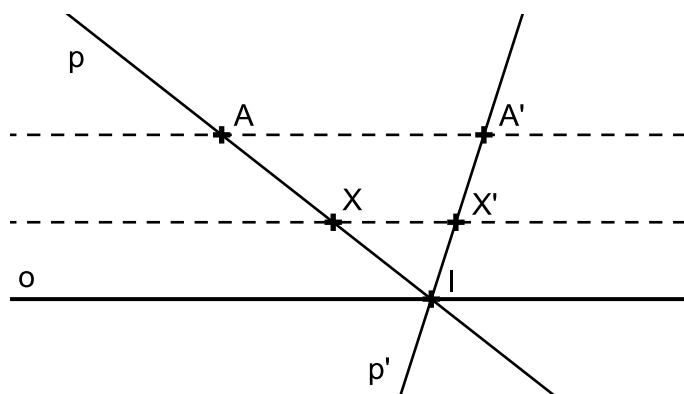
## 12 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

### 12.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru  $A_n$ . Příklady základních afinit jsou „osová afinita v  $A_2$ “, „osová souměrnost v  $E_2$ “ nebo „rovinová souměrnost v  $E_3$ “.

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 30: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

### 12.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou  $o$ , směrem  $s$  a charakteristikou  $\kappa$ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$ .

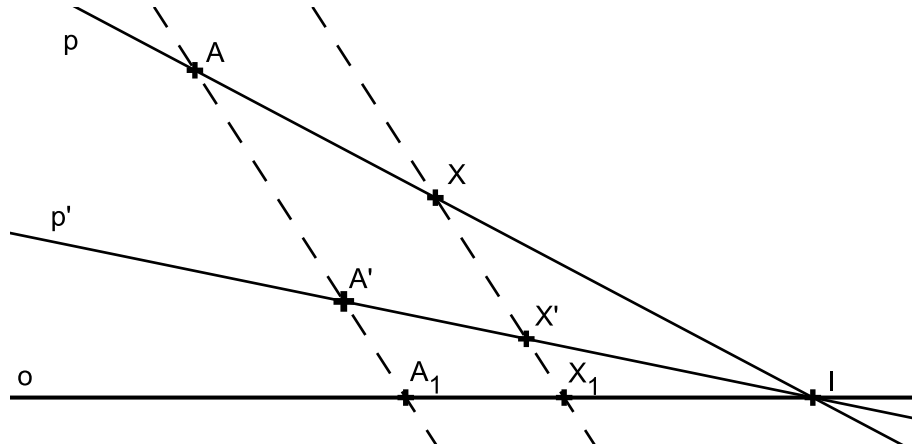
**PŘÍKLAD 12.1.** V osově afinitě určené osou  $o$  a dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$  zobrazte bod  $X$  a přímku  $p$ .

*Řešení:* Viz Obr. 31. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

#### Vlastnosti osové afinity

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.



Obrázek 31: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 12.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku  $p = \overleftrightarrow{AX}$  a určíme její průsečík  $I$  s osou afinity  $o$ . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka  $p'$ , která je obrazem přímky  $p$ , také prochází bodem  $I$ . Z vlastnosti (3) pak plyne, že  $p'$  prochází rovněž bodem  $A'$ . Sestrojíme tedy přímku  $p' = \overleftrightarrow{A'I}$ . Obraz bodu  $X$ , bod  $X'$ , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík  $p'$  s přímkou jdoucí bodem  $X$  rovnoběžně s  $\overleftrightarrow{AA'}$ .

### Charakteristika osově afinity

Charakteristikou osově afinity  $\kappa$  rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body  $A, A'$  jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod  $A_1$  je průsečík přímky  $AA'$  s osou afinity  $o$ , viz Obr. 31. Charakteristika osově afinity je rovna jejímu modulu, proto se  $\kappa$  nazývá také modul osově afinity.

**Poznámka.** „Osová souměrnost v rovině“ je zvláštním případem osově afinity, jejíž směr  $\vec{s}$  je kolmý na osu  $o$  ( $\vec{s} \perp o$ ) a jejíž charakteristika  $\kappa$  je rovna  $-1$  ( $\kappa = -1$ ).

**PŘÍKLAD 12.2.** Je dána přímka  $o$ , trojúhelník  $ABC$  a dvojice bodů  $X, X'$ . Sestrojte obraz trojúhelníka  $ABC$  v osově afinitě s osou  $o$ , v níž je obrazem bodu  $X$  bod  $X'$ .

**Věta 45.** Rovnoběžné přímky  $a \parallel b$  se v osově afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky  $a' \parallel b'$ .

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity.  $\square$

**Věta 46.** *Dělicí poměr se v osové afinitě zachovává, tj.  $(ABC) = (A'B'C')$ .*

Důsledky věty 46:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

**PŘÍKLAD 12.3.** *Je dána přímka  $o$  a trojúhelník  $ABC$ . Sestrojte obraz  $A'B'C'$  trojúhelníka  $ABC$  v takové osové afinitě s osou  $o$ , aby byl trojúhelník  $A'B'C'$  rovnostranný.*

*(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)*

**Věta 47.** *Nechť  $P$  je obsah trojúhelníka  $ABC$  a  $P'$  obsah jeho obrazu  $A'B'C'$  v osové afinitě s charakteristikou  $\kappa$ . Potom  $P' = |\kappa| \cdot P$ .*

Z výše uvedených vět 45, 46, 47 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

### Invarianty osové afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

### Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'X X_1),$$

kde  $X_1$  je průsečík  $\overleftrightarrow{XX'}$  s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

### Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna  $-1$ .

### 12.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 12.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*
2. Dokažte Větu 47.

## 13 Podobnosti v rovině

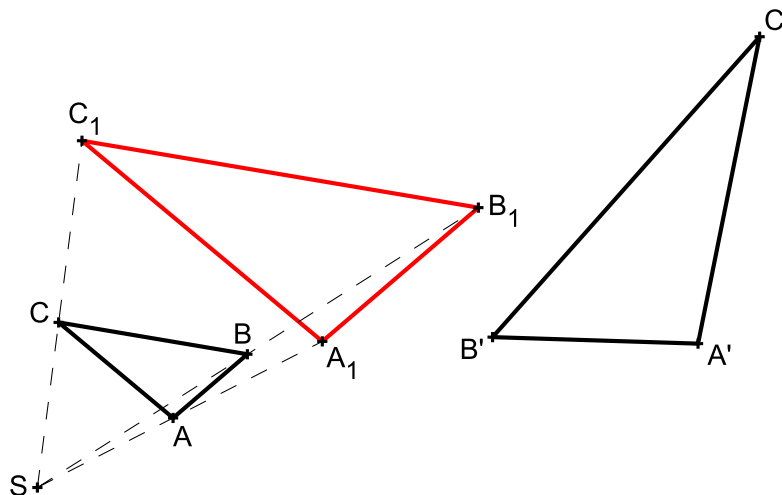
Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): Zobrazení  $f$  roviny (euklidovského prostoru  $E_2$ ) na sebe se nazývá „*podobnou transformací roviny*“ (též „*podobností v rovině*“), jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  roviny a jejich obrazy  $X', Y'$  platí:

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo  $k$  se nazývá *koeficient podobnosti*  $f$ .

### Poznámky.

1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme *vlastní podobností*.



Obrázek 32: Každou podobnost lze rozložit na stejnoolehlost a shodnost

**Věta 48.** Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti  $k$  lze rozložit na stejnoolehlost  $H(S, k)$  a shodnost  $Z$ . Přitom střed stejnoolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost  $Z$  je tím určena jednoznačně.

**Věta 49** (O určenosti podobnosti v rovině). Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem  $ABC$  a jeho obrazem  $A'B'C'$  takovým, že  $|A'B'| = k|AB|$ ,  $|B'C'| = k|BC|$ ,  $|A'C'| = k|AC|$ , kde  $k, k > 0$ , je koeficient této podobnosti.

### Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru  $E_n$  spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru*  $E_n$ .

## 13.1 Podobnosti eukleidovské roviny

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti a shodnosti*.

**1. Stejnolehlost**  $H$  volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $k > 0$ :

$$H : X \mapsto \bar{X}; \quad \begin{aligned} \bar{x} &= kx \\ \bar{y} &= ky. \end{aligned}$$

**2. Shodnost**  $S$  je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \bar{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' &= \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení  $S \circ H$  je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost:
$\begin{aligned} x' &= kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\ y' &= kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\ y' &= kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q. \end{aligned}$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

**Věta 50.** *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*



### 13.1.1 Úlohy – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod  $[1, 0]$  zobrazí na bod  $[4, -2]$  a bod  $[2, 3]$  na bod  $[2, -8]$ . [2]

2. **Eulerovými body** se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*) [3]

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod  $[0, 2]$ , bod  $[1, 1]$  na počátek a bod  $[2, 0]$  na bod  $[2, p]$ . Určete  $p$  a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti. [2]

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu  $[5, -3]$  je bod  $[1, 1]$ . [2]

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod  $[1, 1]$  a směr vektoru  $(1, 1)$  samodružné. [2]

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body  $[1, 2]$  a  $[0, 1]$  po řadě na body  $[3, -1]$ ,  $[4, 2]$ . Rozložte je na stejnoolehlost a shodnost. [2]

7. V rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Určete obraz bodu  $C$  v podobnosti, která zobrazuje body  $A, B, S$  po řadě na body  $B, D, C$ . Určete samodružný bod této podobnosti. [2]

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AB| : |AC| = 3 : 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\rho = 1,8\text{cm}$  (poloměr kružnice vepsané). [2]

9. Sestrojte kosodélník  $ABCD$ , je-li dáno  $|\angle DAB| = \alpha$ ,  $|\angle ABD| = \varepsilon$ ,  $|AC| = e$ . [2]

10. Je dána kružnice  $k$  a bod  $A$ , který je bodem vnější oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $A$  a pro jejichž průsečíky  $X, Y$  s kružnicí platí  $|AX| = 2|AY|$ . [2]

11. Je dána kružnice  $k(S; 4\text{cm})$ , její tečna  $t$  a bod  $M \in k$  tak, že  $|Mt| = 2\text{cm}$ . Sestrojte úsečku  $XY$  procházející bodem  $M$  tak, aby  $X \in k, Y \in t$  a  $|MX| : |MY| = 3 : 2$ . [1]

**12.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $P \in a \cap b$  je bodem vnitřní oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $a, b$  i kružnice  $k$ . [2]

**13.** Dokažte následující věty (za důkaz každé věty [4] body):

**Věta 51** (Menelaova věta). *Je dán trojúhelník  $ABC$  a přímka  $p$ , která neprochází žádným z bodů  $A, B, C$ , ale protíná přímky  $AB, BC, CA$  v bodech  $C', A', B'$ . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

*Naopak, platí-li uvedený vztah, body  $A', B', C'$  leží na přímce.*

**Věta 52** (Pappova věta). *Nechť jsou  $A', B', C', D'$  rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů  $A, B, C, D$  přímky  $p$  na přímku  $p'$ ;  $p' \neq p$ . Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

**Věta 53** (Cevaova věta). *Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $M$ , který neleží na žádné z přímek  $AB, BC, CA$ . Průsečíky přímek  $AM, BM, CM$  s přímkami  $BC, CA, AB$  (různé od bodů  $A, B, C$ ) označme postupně  $A', B', C'$ . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

*Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky  $AA', BB', CC'$  buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.*

**14.** Zobrazení  $f$  euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi:  $x' = 2x + ay - 1$ ,  $y' = x + by + 2$ ,  $z' = y + 1$ . Určete koeficienty  $a, b$  tak, aby bylo zobrazení  $f$  podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení  $f$ ?

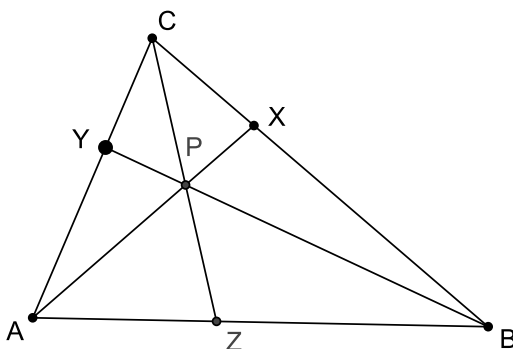
**15.** Určete  $p, q, r$  tak, aby byla rovnicemi  $x' = x - 2y + 2z + 4$ ,  $y' = px + 2y + z - 2$ ,  $z' = qx + ry + 2z - 2$  dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.

## 14 Cevova věta a její užití

**Věta 54** (Cevova věta). *V trojúhelníku  $ABC$  se přímky  $AX$ ,  $BY$  a  $CZ$ , kde body  $X, Y, Z$  leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

*Důkaz:* Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky, viz Obr. 33.



Obrázek 33: Cevova věta

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{BZC} - S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}},$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA} - S_{BXP}}{S_{CXA} - S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}},$$

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB} - S_{CYP}}{S_{AYB} - S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$

Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}} \cdot \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} = 1.$$

*Q.E.D.*

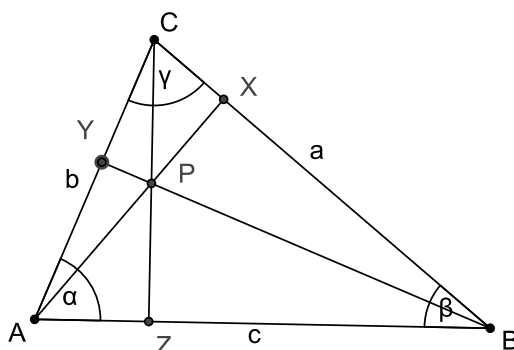
**PŘÍKLAD 14.1.** Užitím Cevovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.

*Řešení:* Body  $X, Y, Z$  jsou středy stran trojúhelníku. Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

**PŘÍKLAD 14.2.** Užitím Cevovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj. ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).

*Řešení:* Viz Obr. 34.



Obrázek 34: Cevova věta pro výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1.$$

**PŘÍKLAD 14.3.** Užitím Cevovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

**Věta 55.** Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.

### 14.1 Cevova věta – Úlohy na domácí přípravu

**78.** Nechtě  $X, Y, Z$  jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě.

**79.** Nechtě  $ABC, A'B'C'$  jsou dva různé trojúhelníky, které mají rovnoběžné sobě odpovídající strany. Potom mají přímky  $AA', BB'$  a  $CC'$  společný bod. Dokažte.