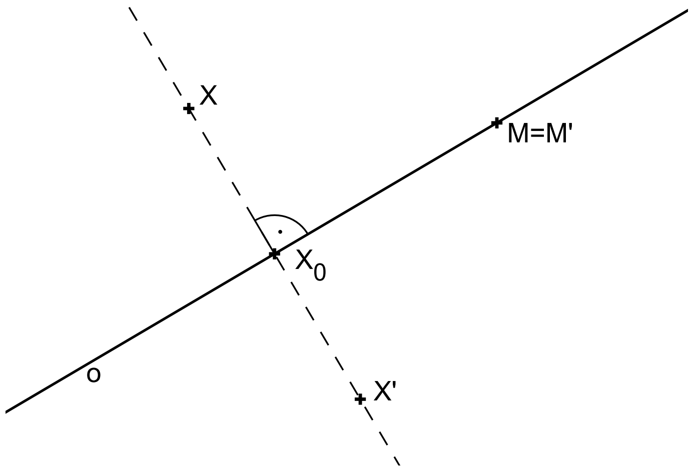
## 3.1 Osová souměrnost

**Definice 11.** *Nechť je dána přímka $o$, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz $M'$ libovolného bodu $M$ této přímky $o$ platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu $X$, který neleží na přímce $o$, sestrojíme obraz $X'$ následujícím způsobem: Bodem $X$ vedeme kolmici $k$ na přímku $o$ a její patu označíme $X_0$. Na polopřímce opačné k polopřímce $X_0X$ sestrojíme bod $X'$ tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *$o$ a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*

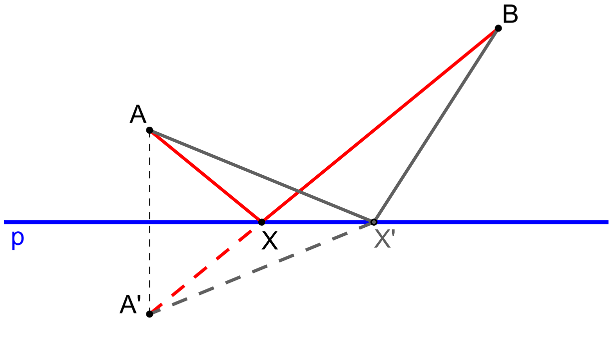



Obrázek 7: Definice osové souměrnosti

**Poznámky:**

1. O bodech $X$, $X'$ říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy $o$.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

**PŘÍKLAD 3.2.** *Je dána přímka $p$ a body $A, B$ v téže polorovině s hraniční přímkou $p$. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*




Obrázek 8: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 8

**Věta 5.** *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

### Samodružné body a směry osové souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

**Věta 6** (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

**Věta 7.** *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

**Věta 8.** *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

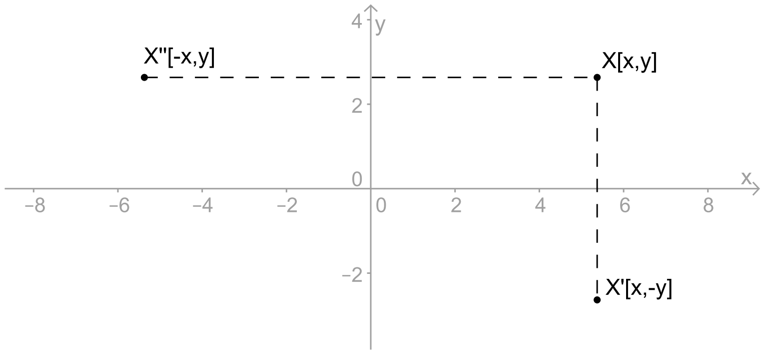
**Věta 9.** *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

**Věta 10.** *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

### 3.1.1 Analytické vyjádření osové souměrnosti O($o$) v rovině

**PŘÍKLAD 3.3.** *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose $x$ ($y$).*

*Řešení:* Dle obrázku 9 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.




Obrázek 9: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose $x$ ($y$)

*Osová souměrnost s osou $x$:*

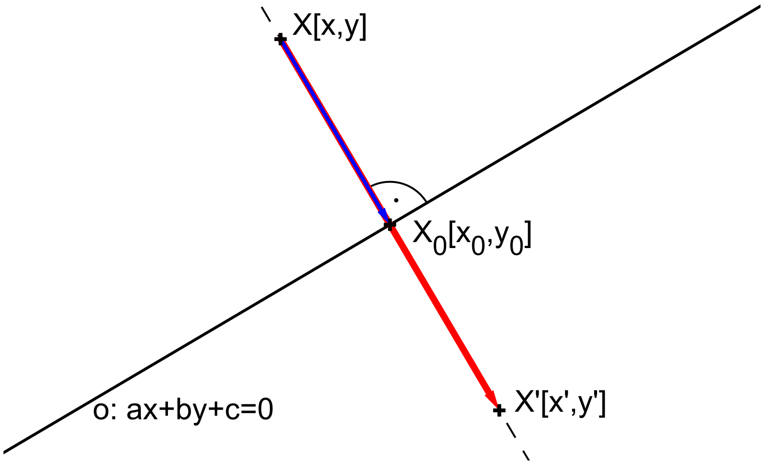
$$x' = x$$
$$y' = -y$$

*Osová souměrnost s osou $y$:*

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

**Osová souměrnost podle osy $o$ dané rovnicí** $o : ax + by + c = 0$




Obrázek 10: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Dle obrázku 10 platí

$$\begin{aligned} X' - X &= 2(X_0 - X), \\ X_0 - X &= k(a, b). \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy $o$: $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2}\,(ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2}\,(ax + by + c) \end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 3.4.** *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p : 3x - 4y + 1 = 0$. *Napište rovnice této souměrnosti.*