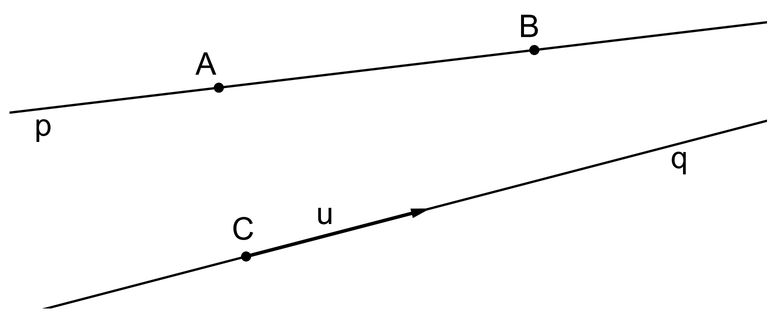
17 Projektivní rozšíření $\bar{E}_n$ prostoru E_n

Projektivním rozšířením eukleidovského prostoru E_n rozumíme jeho doplnění o *nevlastní body*. Výsledný prostor značíme $\bar{E}_n$. Takovéto rozšíření eukleidovského prostoru nám podstatně zjednodušuje popis a zkoumání některých geometrických vztahů. Využívá se třeba při výkladu perspektivy, zavádění kolineace nebo při zkoumání kuželoseček a kvadrik.

17.1 Projektivní rozšíření roviny E_2

Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem), viz Obr. 79. Dvě přímky v rovině, které nejsou totožné, mají buď *jeden společný bod*, nebo nemají žádný společný bod, ale mají *společný směr*.



Obrázek 79: Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem).

Kdybychom směry ztotožnili s body, mohli bychom výše uvedená tvrzení nahradit těmito jednoduššími: *Přímka je určena dvěma body. Dvě přímky v rovině mají vždy alespoň jeden společný bod.*

Řešením je doplnění roviny o tzv. *nevlastní body* N_∞, tj. body *v nekonečnu*, které si můžeme představovat jako směry všech přímek roviny. Důsledkem zavedení těchto nevlastních bodů do eukleidovské roviny je její doplnění také o tzv. *nevlastní přímku* n_∞, která je z nevlastních bodů složena.

Prvotní představa o nevlastním bodu přímky je taková, že je to bod této přímky, který leží v nekonečnu. Proto je logické, že *nevlastní bod přímky ztotožňujeme s jejím směrem.*

Definice 30 (Směr). *Je-li $\vec{u}$ libovolný nenulový vektor, potom množinu všech vektorů $k\vec{u}, k \in R$ nazýváme směrem, značíme $\langle \vec{u} \rangle$. Libovolný vektor daného směru pak nazýváme reprezentantem tohoto směru.*

Potom můžeme projektivně rozšířený prostor $\bar{E}_2$ chápat jako sjednocení eukleidovského prostoru E_2 s množinou všech směrů $\langle V_2 \rangle$ (kde V_2 je zaměřením E_2), tj. s množinou všech nevlastních bodů N_∞;

$$\bar{E}_2 = E_2 \cup N_\infty = E_2 \cup \langle V_2 \rangle.$$

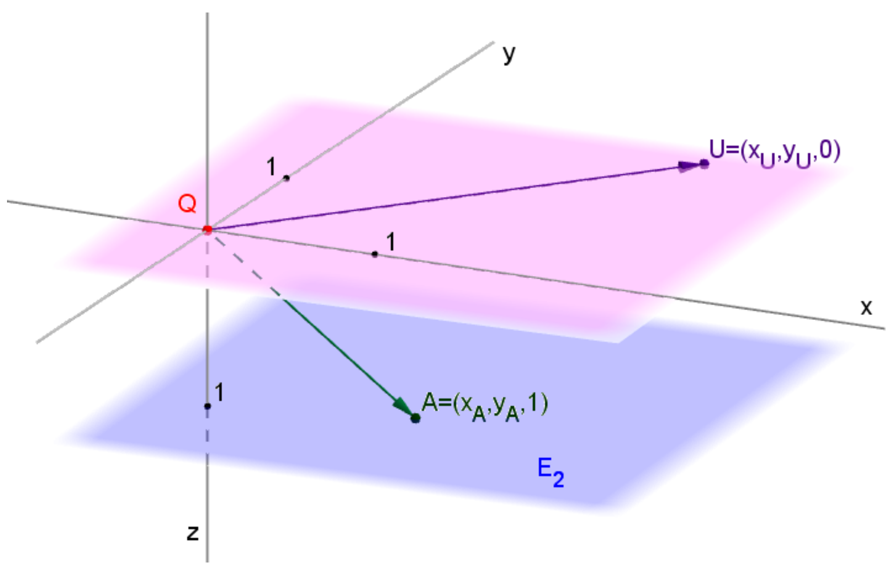
Bodem prostoru $\bar{E}_2$ tak je jak bod, tak jak jej známe (tj. vlastní bod), tak i směr (tj. nevlastní bod).

Poznámka. Každá vlastní přímka má právě jeden nevlastní bod (směr).

17.2 Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$

Je otázka, jak reprezentovat body projektivně rozšířeného prostoru $\bar{E}_2$. Tato reprezentace by měla být na jedné straně jednotná, na druhé straně by však měla dovolovat rozlišovat mezi body vlastními (tj. body původního eukleidovského prostoru E_2) a nevlastními (tj. směry zaměření V_2 původního eukleidovského prostoru E_2).

Tento na první pohled obtížný úkol elegantně řeší zavedení tzv. *homogenních souřadnic.* Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$ jsou výsledkem projektivního rozšíření, to jest ztotožnění vlastních i nevlastních bodů prostoru $\bar{E}_2$ se směry $\langle V_3 \rangle$ prostoru E_3. Souřadnice vektoru z V_3, který ukazuje na konkrétní bod prostoru $\bar{E}_2$ potom nazýváme *aritmetickým zástupcem* tohoto bodu.



Obrázek 80: Myšlenka zavedení homogenních souřadnic.

Myšlenka zavedení homogenních souřadnic je založena na tom, že celou projektivně rozšířenou eukleidovskou rovinu $\bar{E}_2$ „umístíme“ do eukleidovského trojrozměrného prostoru E_3, vhodně v něm zvolíme pevný bod Q a všechny body prostoru $\bar{E}_2$ ztotožníme se směry „pohledů“ z tohoto bodu, tj. s vektory z vektorového prostoru V_3. Možné řešení je zachyceno na Obr. 80. Eukleidovský prostor E_2 je znázorněn modrou (spodní) rovinou, ta tedy představuje množinu *vlastních bodů. Nevlastním bodům*, tj. směrům přímek z E_2, potom odpovídají vektory rovnoběžné s touto rovinou. Pro zjednodušení našich představ volíme umístění všech těchto vektorů v bodě Q. *Nevlastní body* potom vyplňují červenou (horní) rovinu. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic „hostitelského“ prostoru E_3 tak, aby její počátek splýval s bodem Q, osy x, y ležely v rovině rovnoběžné s E_2 a osa z byla orientována tak, že její průsečík s rovinou E_2 má souřadnici 1, jak vidíme na Obr. 80, je zřejmé, že každý vlastní bod X má v této soustavě souřadnice $X = \langle x, y, 1\rangle$, kde x, y jsou kartézské souřadnice bodu X v rovině E_2, zatímco nevlastní bod U má souřadnice $U = \langle u_1, u_2, 0\rangle$. Tak se nám podařilo dosáhnout vytčeného cíle. Uvedený postup není samozřejmě jediný. Není např. nutné, aby třetí souřadnice vlastního bodu byla 1. Protože nám jde o směr „pohledu“ z bodu Q do daného bodu, není nezbytné, aby vektor tohoto směru v příslušném bodě končil. Podstatné je, aby tímto bodem procházela přímka tohoto směru. Obecně tak může být třetí souřadnicí vlastního bodu jakékoliv nenulové číslo.

Pokud však všechny souřadnice tímto nenulovým číslem vydělíme, dostaneme výše uvedený speciální případ homogenních souřadnic, který také odpovídá situaci na Obr. 80. Hovoříme o tzv. it afinních homogenních souřadnicích. Ty nám způsobem svého zavedení umožňují v případě vlastních bodů přejít k afinním (nebo přímo kartézským) souřadnicím v $\bar{E}_n$. V případě nevlastních bodů pak k souřadnicím příslušných směrových vektorů ve $\bar{V}_n$. Pro zjednodušení však budeme nadále používat pro tento typ souřadnic vesměs označení *homogenní souřadnice*.

(Afinní) homogenní souřadnice vlastního bodu $X \in \bar{E}_2$:

$$X = \langle h_1, h_2, h_3\rangle = \left\langle \frac{h_1}{h_3}, \frac{h_2}{h_3}, 1 \right\rangle = \langle x_1, x_2, 1\rangle.$$

(Afinní) homogenní souřadnice nevlastního bodu (směru) $Z \in \bar{E}_2$:

$$Z = \langle z_1, z_2, 0\rangle.$$

Potom $\langle x_1, x_2\rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice bodu X v E_2, zatímco $\langle z_1, z_2\rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice směrového vektoru $\vec{z}$ ve V_2.

Rovnice přímky v $\bar{E}_2$

V $\bar{E}_2$ existují různé způsoby vyjádření přímky, která je v E_2 dána obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$. Uvažujeme-li homogenní souřadnice jejího libovolného bodu X ve tvaru $X = \langle x, y, z \rangle = \langle \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \rangle$, její obecná rovnice je ve tvaru

$$ax + by + cz = 0.$$

Je-li přímka dána dvěma body A, B s homogenními souřadnicemi $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, můžeme ji zadat pomocí rovnice

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

která vyjadřuje její obecný bod X jako lineární kombinaci bodů (směrů) A, B. K vyjádření téhož lze využít i determinant. Rovnice přímky dané body A, B má potom tvar

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

PŘÍKLAD 17.1. *V rovině E_2 je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Vypočtěte (afinní) homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.*

PŘÍKLAD 17.2. *V rovině $\bar{E}_2$ jsou dány body $A = \langle 0, 3, 2 \rangle$, $B = \langle 2, 8, 2 \rangle$. Napište rovnici přímky AB.*

PŘÍKLAD 17.3. *V rovině $\bar{E}_2$ je $A = \langle 1, 2, 0 \rangle, B = \langle 1, 1, -1 \rangle, C = \langle 0, 1, 0 \rangle, D = \langle 1, 0, -3 \rangle$. Určete souřadnice průsečíku přímek AB a CD.*

Rovnice kuželosečky v $\bar{E}_2$

Kuželosečka s algebraickou rovnicí ve tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ má v $\bar{E}_2$ homogenní rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

PŘÍKLAD 17.4. *V rovině E_2 je dána kuželosečka $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 2 = 0$. Vypočtěte její nevlastní body v $\bar{E}_2$.*

17.3 Zobecnění

Myšlenku projektivního rozšíření roviny můžeme zobecnit na prostor dimenze n. Výsledný prostor nazýváme projektivní prostor P_n a lze ho ztotožnit s množinou směrů $\langle V_{n+1}\rangle$:

$$P_n = \bar{E}_n = \langle V_{n+1}\rangle$$

(Afinní) homogenní souřadnice: $X = \langle x_1, ..., x_n, x_{n+1}\rangle$.

PŘÍKLAD 17.5. *Napište rovnici roviny, která prochází body* $A = \langle 2, -1, 1, 2\rangle, B = \langle -1, 0, 0, 1\rangle, C = \langle -3, 2, 2, 3\rangle$.

PŘÍKLAD 17.6. *V prostoru* $\bar{A}_3$ *určete průsečík* P *přímky* AB *s rovinou* CDE; $A = \langle 0, 1, 0, 1\rangle, B = \langle -1, 1, 2, 0\rangle, C = \langle 0, 0, 0, 1\rangle, D = \langle 1, 2, 0, 1\rangle, E = \langle 0, 2, -5, 1\rangle$.

17.4 Cvičení – projektivní rozšíření prostoru

1. V rovině je dána přímka $2x-3y+7 = 0$. Napište její rovnici v příslušných afinních homogenních souřadnicích a vypočtěte její nevlastní bod U.

2. V prostoru $\bar{E}_3$ je přímka popsána v afinních homogenních souřadnicích rovnicemi

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0,$$

$$7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0.$$

Vypočtěte její nevlastní bod U.

3. Napište rovnici roviny, která v prostoru P_3 prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2\rangle, B = \langle -1, 0, 0, 1\rangle, C = \langle -3, 2, 2, 3\rangle$.

4. Každá shodnost může být v homogenních souřadnicích vyjádřena jednou maticí. Pokuste se najít příslušné matice.

5. Určete obrazy bodů $A = [2, 5], B = [-1, 0]$ v rotaci $R(S, \alpha)$; $S = [1, 2], \alpha = \pi/3$. Použijte matici v homogenních souřadnicích.

6. V prostoru $\overline{E}_3$ určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE.

$A = (0, 1, 0, 1),\ B = (-1, 1, 2, 0),\ C = (0, 0, 0, 1),\ D = (2, 0, 1, 1),\ E = (0, 2, -5, 1)$.

7. Rovnice kuželoseček přepište do homogenních souřadnic a určete jejich nevlastní body.

a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,

b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$,

c) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$.

8. V projektivním prostoru $\overline{P}_4$ najděte společný bod M rovin

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & 10x_5 & = & 0, \\ & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 10x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 0. \end{array}$$