10 Samodružné body a směry afinity

Samodružnými body a směry zobrazení rozumíme body a směry, které se v zobrazují samy na sebe. Například otočení $\mathcal{R}(S)$ má jediný samodružný bod, střed S, a nemá žádný samodružný směr. Osová souměrnost $\mathcal{O}(o)$ má celou přímku samodružných bodů, osu o, a dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou o, druhý kolmý na o (přímky těchto směrů se zobrazí na přímky s nimi rovnoběžné nebo totožné, tj. zobrazí se na přímky se stejnými směrovými vektory). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S,\kappa)$ má jediný samodružný bod, střed S, ale má všechny směry samodružné (tj. každá přímka se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou).

Samodružné prvky má smysl uvažovat jenom v případě, že se uvažovaný bodový prostor (v případě směrů pak jemu příslušející vektorový prostor, tj. zaměření) zobrazuje „do sebe“. Nadále se omezíme pouze na afinity (ty jsou dokonce zobrazeními uvažovaného prostoru „na sebe“) .

10.1 Samodružné body

Samodružným bodem (afinity) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí $X' = X$. Po dosazení do maticové rovnice afinity $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B$ tak dostaneme

$$X = A \cdot X + B,$$

po úpravě

$$(I - A) \cdot X = B, \tag{64}$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A. Za rovnicí (64) se skrývá nehomogenní soustava n rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, souřadnicích hledaných samodružných bodů. Z teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být jedna, žádná nebo nekonečně mnoho uspořádaných $n-$tic $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, tj. jeden, žádný nebo nekonečně mnoho samodružných bodů. Množina řešení, tj. množina samodružných bodů uvažované afinity, má přitom charakter afinního bodového podprostoru (bod, přímka, rovina, …).

Výpočet souřadnic samodružného bodu si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Pokud do rovnic (29) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$ je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů příslušné afinity jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 & = & b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 & = & b_2. \end{array} \tag{65}$$

PŘÍKLAD 10.1. *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$x' = -x + 4,$$
$$y' = -y - 6.$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$2x = 4,$$
$$2y = -6,$$

která má jediné řešení $[x, y] = [2, -3]$. Daná afinita má tedy jediný samodružný bod $S = [2, -3]$.

Poznámka. Protože $A^T \cdot A = I$, kde I je jednotková matice, jedná se o shodnost. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost. O tom, které z nich to je, rozhodnou samodružné směry.

PŘÍKLAD 10.2. *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$x' = x,$$
$$y' = -y.$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$0x = 0,$$
$$2y = 0,$$

která má tentokrát nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru $[x, 0]$; $x \in R$. Jedná se tedy o afinitu jejíž všechny samodružné body leží v přímce o rovnici $y = 0$.

Poznámka. Protože opět platí $A^T \cdot A = I$, je to shodnost. V úvahu teď připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x.

10.2 Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např. $\vec{u}$, říkáme mu „reprezentant“ tohoto směru (takovým reprezentantem pak může být každý jeho násobek). Má-li být směr určený vektorem $\vec{u}$ samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem $\vec{u}$, platit $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poznámka. „Směrem“ rozumíme množinu všech vektorů $k\vec{u}; k \in R$ vektoru $\vec{u} \neq \vec{o}$, tj. jednorozměrný vektorový prostor $[\vec{u}]$. Vektor $\vec{u}$ nazýváme „reprezentantem“ tohoto směru. Pokud chceme zohlednit orientaci, použijeme „orientovaný směr“, tj. množinu všech vektorů $k\vec{u}$, kde ale $k \in \langle 0, \infty)$.

Víme, že zobrazení mezi vektory z vektorového prostoru, který je zaměřením afinního bodového prostoru, v němž operuje uvažovaná afinita (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřeními různých bodových prostorů), zajišťuje tzv. „asociovaný homomorfismus“ (též „lineární zobrazení“), viz definice 20 na str. 20[1].

Po dosazení do maticové rovnice asociovaného homomorfismu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$ tak dostaneme

$$\lambda\vec{u} = A \cdot \vec{u},$$

po úpravě

$$(\lambda I - A) \cdot \vec{u} = \vec{o}, \tag{67}$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A a vektor $\vec{u}$ je sloupcový (aby bylo definováno násobení $A \cdot \vec{u}$).

Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor

Za rovnicí (67) se skrývá homogenní soustava n rovnic o n neznámých $u_1, u_2, \dots, u_n$, souřadnicích reprezentanta hledaného samodružného směru. Z teorie řešitelnosti homogenních soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být buď jenom nulový vektor $\vec{o}$, hovoříme o „triviálním řešení“, nebo je řešením nekonečně mnoho vektorů, které tvoří vektorový podprostor. Nenulové vektory z tohoto prostoru řešení nazýváme „netriviální řešení“. Protože nulový vektor neurčuje žádný směr, zajímají nás při vyšetřování samodružných směrů pouze netriviální řešení homogenní soustavy (67). Homogenní soustava lineárních rovnic má i netriviální řešení (triviální má vždycky) právě tehdy, když je matice soustavy singulární, tj. její determinant je roven nule. Afinita $X' = A \cdot X + B$ má proto samodružné body právě tehdy, když

$$|\lambda I - A| = 0. \tag{68}$$

[1] Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:

$$\begin{array}{lll} (1) & \varphi(\vec{u} + \vec{v}) & = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) & \varphi(k\vec{u}) & = k\varphi(\vec{u}). \end{array}$$

Uvažujme afinitu f prostoru E_n. Potom „asociovaným (tj. jednoznačně přiřazeným) homomorfismem“ afinity f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V_n prostoru E_n do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \tag{66}$$

kde X, Y a $f(X), f(Y)$ jsou body z E_2, $\vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$.

Rovnici (68) říkáme „charakteristická rovnice“ příslušného homomorfismu φ. Jedná se o algebraickou rovnici $n-$tého stupně pro neznámou λ. Každé číslo λ, které je řešením této charakteristické rovnice, pak nazýváme „vlastní číslo“ homomorfismu φ. Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme „vlastním vektorem“ homomorfismu φ (příslušnou hodnotu λ pak nazýváme „vlastní číslo homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\vec{u}$“). Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny „charakteristický vektor“ a „charakteristické číslo“.

Výpočet samodružných směrů si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Asociovaný homomorfismus φ afinity f je v tomto případě dán soustavou

$$\begin{aligned}\varphi:\ u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2\\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2,\end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi:\ \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\varphi:\ \vec{u}' = A\cdot\vec{u}. \tag{69}$$

Samodružný směr afinity (tj. vektory těchto směrů, pro které platí $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$) jsou potom „netriviálním“ řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0\\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0.\end{aligned} \tag{70}$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustava (69) má tedy nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{71}$$

Postup určení samodružných směrů afinity v rovině si nyní budeme ilustrovat na zobrazeních použitých v příkladech 10.1 a 10.2.

PŘÍKLAD 10.3. *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4,\\ y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0,\\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo $\lambda = -1$, které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0,\\ 0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$.

Vyšetřovaná afinita má tedy všechny směry samodružné.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že z řešení příkladu 10.1 víme, že daná afinita je shodností a má jediný samodružný bod $S = [2, -3]$, po zjištění, že má všechny směry samodružné, je možno učinit závěr, že se jedná o středovou souměrnost se středem S.

PŘÍKLAD 10.4. *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= x,\\ y' &= -y.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0,\\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou x (tj. s osou souměrnosti).

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose x (tj. k ose souměrnosti).

Daná afinita má tedy dva na sebe kolmé samodružné směry.

Poznámka. Zjištění, že daná afinita má dva na sebe kolmé samodružné směry, přitom jeden rovnoběžný s přímkou samodružných bodů a druhý na ni kolmý, je v souladu s poznatkem z řešení příkladu 10.2, že uvažovaná afinita je osovou souměrností.

PŘÍKLAD 10.5. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.*

Řešení: Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$. V případě této úlohy zvládneme ověření provést zpaměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz http://andrejv.github.io/wxmaxima/)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

(%o2) $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Rovnici $X' = A\cdot X + B$ vyjádříme ve tvaru $A\cdot X + B - X' = O$ a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů K, K' a L, L'. Potom zapíšeme podmínku (79) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru $A^T\cdot A - I = O$. (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic. Jednotkovou matici I druhého stupně zadáme ve wxMaximě příkazem `ident(2)`.)

```
(%i3)  s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
       s3:transpose(A).A-ident(2);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} b1 + 10\,a11 \\ b2 + 10\,a21 \end{pmatrix}$

(%o4) $\begin{pmatrix} b1 + 20\,a12 + 25\,a11 \\ b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25 \end{pmatrix}$

(%o5) $\begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21\,a22 + a11\,a12 \\ a21\,a22 + a11\,a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

```
(%i6)  rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o6) $[b1 + 10\,a11, b2 + 10\,a21, b1 + 20\,a12 + 25\,a11, b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21\,a22 + a11\,a12, a22^2 + a12^2 - 1]$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7)  res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

(%o7) $[[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6],$
$[a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

$$(\%o8)\quad \begin{pmatrix} x1 = a12\,y + a11\,x + b1 \\ y1 = a22\,y + a21\,x + b2 \end{pmatrix}$$

Řešení č. 1:

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

$$(\%o9)\quad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o10)\quad \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

$$(\%o11)\quad \begin{pmatrix} x1 = -\frac{3\,y}{5} + \frac{4\,x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružný bod je bod, pro který platí $X' = X$. Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice $X' = A \cdot X + B$ (pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$) za X' dosadíme X a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými x, y.

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o12)\quad \begin{pmatrix} -\frac{3\,y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o13)\quad [[x = 5, y = -15]]$$

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnici (71)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);
       CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;
       solve(CharR1,%lambda);
```

(%o14) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}-\lambda \end{pmatrix}$

(%o15) $\lambda^2 - \frac{8\,\lambda}{5} + 1 = 0$

(%o16) $[\lambda = -\frac{3\,i-4}{5}, \lambda = \frac{3\,i+4}{5}]$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem $S = [5, -15]$.

Poznámka. K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení α. Jak to uděláme?

Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

(%o17) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o18) $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

(%o19) $\begin{pmatrix} x1 = \frac{3\,y}{5} - \frac{4\,x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body:

```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

(%o20) $\begin{pmatrix} \frac{3\,y}{5} - \frac{9\,x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o21) []

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);
       CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;
       solve(CharR2,%lambda);
```

(%o22) $\begin{pmatrix} -\lambda-\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}-\lambda \end{pmatrix}$

(%o23) $\lambda^2-1=0$

(%o24) $[\lambda=-1,\lambda=1]$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

(%o25) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5}-\lambda\,u-\frac{4\,u}{5} \\ -\lambda\,v+\frac{4\,v}{5}+\frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
       solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

(%o26) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5}+\frac{u}{5} \\ \frac{9\,v}{5}+\frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o27) $[[u=-3\,\%r1, v=\%r1]]$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
       solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

(%o28) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5}-\frac{9\,u}{5} \\ \frac{3\,u}{5}-\frac{v}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o29) $[[u=\frac{\%r2}{3}, v=\%r2]]$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry $\vec{u}=(-3,1), \vec{u}=(1,3)$.

Jedná se o „posunuté zrcadlení“, viz str. **??**.

Poznámka. K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu o a vektor posunutí $\vec{t}$. Jak to uděláme?

10.3 Homotetie, grupa homotetií

Definice 24 (Homotetie). *Každé afinní zobrazení, které má všechny směry samodružné, se nazývá „homotetické zobrazení“, též „homotetie“.*

Poznámka. Pro homotetie se používá také označení „dilatace“.

Každá homotetie je stejnolehlost, posunutí nebo identita (tj. posunutí o nulový vektor). V kapitole 5 věnované stejnolehlosti se dozvíme, že množina těchto tří shodností spolu s operací skládání tvoří grupu, tzv. „grupu homotetií“.

Poznámka. Z výše uvedené existence „grupy homotetií“ vyplývá, že složením dvou zobrazení z množiny homotetií, tj. z množiny $\{$stejnolehlost, posunutí, identita$\}$, vznikne opět jedno z těchto zobrazení.