9 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A', f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A''. Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2. Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta 40. *Složením dvou afinních zobrazení f_1, f_2 vznikne afinní zobrazení f. Zobrazení φ asociované k f vznikne složením zobrazení φ_1, φ_2 asociovaných po řadě k f_1, f_2.*

PŘÍKLAD 9.1. *V prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti S a O. Určete zobrazení $Z_1 = SO$ a $Z_2 = OS$.*

PŘÍKLAD 9.2. *V prostoru E_n je dáno posunutí T a středová souměrnost S. Určete zobrazení $Z_1 = TS$ a $Z_2 = ST$.*

9.1 Afinní grupa v A_n

Věta 41 (Inverzní zobrazení). *Uvažujme afinní zobrazení f afinního prostoru A_n na afinní prostor A'_m. Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory A_n, A'_m mají stejnou dimenzi, tj. $m = n$). Pak k zobrazení f existuje zobrazení inverzní f^{-1}, které je rovněž afinním zobrazením.*

Důkaz. Jsou-li B', C', D' tři kolineární body v prostoru A'_n a platí $(B', C', D') = \lambda$, uvažujme vzory B, C bodů B', C' při zobrazení f a na jimi určené přímce BC zvolme bod D tak, že dělící poměr $(B, C, D) = \lambda$. Pak bod $f(D)$ leží na přímce $B'C' = f(B)f(C)$ a platí $(B', C', f(D)) = \lambda$. Protože také $(B', C', D') = \lambda$, je $f(D) = D'$ a dělící poměr $(B', C', D') = (B, C, D)$. □

Jak víme, pojmem „afinita“ se rozumí „vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n na sebe“, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou.

Věta 42. *Všechny afinity prostoru A_n tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. „afinní grupu prostoru A_n“.*

Důkaz. Složením dvou afinit prostoru A_n vznikne opět afinita prostoru A_n. K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (viz Věta 41). Neutrálním prvkem je potom identita. □

9.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (30) mají $b_1 = b_2 = 0$.

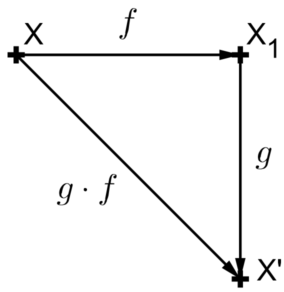
PŘÍKLAD 9.3. *Jsou dána lineární zobrazení f, g :*

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 29. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 29: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 29 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & ax & + & by \\ y_1 & = & cx & + & dy \end{array}; \qquad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{array}{rcrcr} x' & = & Ax_1 & + & By_1 \\ y' & = & Cx_1 & + & Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & A(ax+by) & + & B(cx+dy) & = & (Aa+Bc)x & + & (Ab+Bd)y \\ y' & = & C(ax+by) & + & D(cx+dy) & = & (Ca+Dc)x & + & (Cb+Dd)y \end{array},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Z porovnání (61) a (62) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Rovnost (63) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

PŘÍKLAD 9.4. *Řešení příkladu 9.3 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n.*