13 Vybrané věty z planimetrie

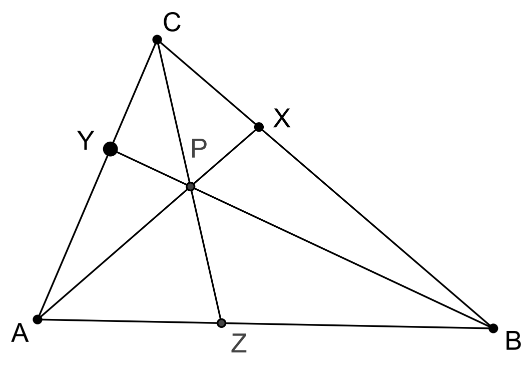
13.1 Cevova věta a její užití

Giovanni Ceva byl italský matematik žijící na přelomu 17. a 18. století. *Cevova věta* stanovuje podmínku, kdy mají tři přímky procházející vrcholy trojúhelníku společný bod.

Věta 53 (Cevova věta)**.** *V trojúhelníku ABC se přímky AX, BY a CZ, kde body X, Y, Z leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Důkaz: Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky, viz Obr. 33.



Obrázek 33: Cevova věta

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{BZC} - S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}},$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA} - S_{BXP}}{S_{CXA} - S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}},$$

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB} - S_{CYP}}{S_{AYB} - S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$

Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{S_{ACP}}{S_{BPC}}\cdot\frac{S_{BPA}}{S_{CPA}}\cdot\frac{S_{CPB}}{S_{APB}}=1.$$

Q.E.D.

Klasický, ale i počítačový důkaz Cevovy věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [6].

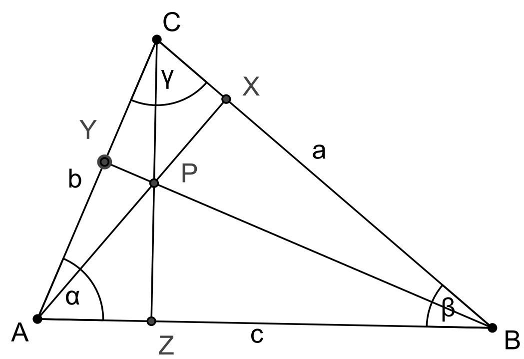
PŘÍKLAD 13.1. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.*

Řešení: Body X, Y, Z jsou středy stran trojúhelníku. Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1.$$

PŘÍKLAD 13.2. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj. ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).*

Řešení: Viz Obr. 34.



Obrázek 34: Cevova věta pro výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}\cdot\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}\cdot\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}=1.$$

PŘÍKLAD 13.3. *Užitím Cevovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

Věta 54. *Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.*

Cvičení – Cevova věta

75. Nechť X, Y, Z jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě.

76. Nechť ABC, $A'B'C'$ jsou dva různé trojúhelníky, které mají rovnoběžné sobě odpovídající strany. Potom mají přímky AA', BB' a CC' společný bod. Dokažte.