9 Grupa shodností eukleidovského prostoru

9.1 Shodné zobrazení v rovině

Definice 24. *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení).*

Poznámka. Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \longrightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

Věta 32. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*

Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

PŘÍKLAD 9.1. *V euklidovské rovině E_2 je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel a, b existuje shodné zobrazení roviny E_2 do sebe, zobrazující body $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ po řadě na body $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?*

Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

Věta 33 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1)**.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body K, L, M a třemi nekolineárními body K', L', M', které jsou po řadě jejich obrazy.*

Poznámka. Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení na str. 20 a věta 3 o určenosti afinity v rovině na str. 25).

9.2 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f: \; x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \tag{65}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{66}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f: \; X' = A \cdot X + B. \tag{67}$$

Jak poznáme, že afinita (65) **je shodností?**

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \tag{68}$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{69}$$

Nyní do levé strany (69) dosadíme z (65), upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$ a diskutujeme, za jakých podmínek je splněna její rovnost s pravou stranou. Zjistíme, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (65)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{70}$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice** (65) **je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \tag{72}$$

kde E **je jednotková matice,** jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

9.3 Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2

Osová souměrnost

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o: ax + by + c = 0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 9.2. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p: 3x - 4y + 1 = 0$. *Napište rovnice této souměrnosti.*

PŘÍKLAD 9.3. *Napište rovnice souměrnosti podle přímky* $o: 2x - 3y + 1 = 0$.

PŘÍKLAD 9.4. *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod* $[1, 5]$.

Otočení

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1 \\ y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2 \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.5. *Napište rovnice otočení se středem* $S[1, -2]$ *o úhel* $\alpha = 60°$.

Středová souměrnost

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2s_1 \\ y' &= -y + 2s_2 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.6. *Napište rovnice středové souměrnosti* $\mathbf{S}(S)$ *se středem* $S[-2, 3]$.

Posunutí

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.7. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem* $A = [-1, 3]$ *a jeho obrazem* $A' = [4, 2]$.

Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x:

$$\begin{aligned} x' &= x + p \\ y' &= -y \end{aligned}$$

9.4 Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v E_3

Posunutí

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \\ z' &= z + p_3. \end{aligned}$$

Otočení

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny (x, y):

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z + v_0\alpha. \end{aligned}$$

9.5 Skládání shodných zobrazení

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

9.6 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že *množina shodností* v rovině spolu *s operací skládání zobrazení* tvoří grupu. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

PŘÍKLAD 9.8. *Ověřte následující tvrzení:*

(a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S.

(b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S.

(c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S.

PŘÍKLAD 9.9. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120°$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 9.10. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

9.7 Klasifikace shodností roviny

Cílem klasifikace shodností v rovině (obecně afinních zobrazení v prostoru A_n) je získat úplný (vyčerpávající) přehled těchto zobrazení a jejich analytických vyjádření. Postupujeme od obecné podoby rovnice zobrazení. Z té analýzou všech možných konfigurací samodružných bodů a směrů, které toto zobrazení připouští, dostaneme úplný přehled všech jeho variant.

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou lineárních rovnic)

$$f: \;\; X' = A \cdot X + B. \tag{73}$$

Tento postup si nejprve ilustrujeme řešením následujícího příkladu, poté provedeme obecnou klasifikaci shodností roviny E_2, viz str. 75, a trojrozměrného prostoru E_3, viz str. 80.

PŘÍKLAD 9.11. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$.

Řešení v programu wxMaxima:

Definujeme obecnou podobu matic A, B z rovnice (73).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

(%o30) $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

(%o31) $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Do rovnice (73) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojice rovnic `s1` a `s2`. Třetí skupinu rovnic `s3` dostaneme z podmínky $A^T \cdot A - I = 0$.

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];
       s3:transpose(A).A-ident(2);
```

(%o32) $\begin{pmatrix} b1 + 10\,a11 \\ b2 + 10\,a21 \end{pmatrix}$

(%o33) $\begin{pmatrix} b1+20\,a12+25\,a11 \\ b2+20\,a22+25\,a21-25 \end{pmatrix}$

(%o34) $\begin{pmatrix} a21^2+a11^2-1 & a21\,a22+a11\,a12 \\ a21\,a22+a11\,a12 & a22^2+a12^2-1 \end{pmatrix}$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznámých `a11, a12, a21, a22, b1, b2`.

```
(%i35) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o35) $[b1+10\,a11, b2+10\,a21, b1+20\,a12+25\,a11, b2+20\,a22+25\,a21-25, a21^2+a11^2-1, a21\,a22+a11\,a12, a22^2+a12^2-1]$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

```
(%i36) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

(%o36) $[[a11=\frac{4}{5}, a12=-\frac{3}{5}, a21=\frac{3}{5}, a22=\frac{4}{5}, b1=-8, b2=-6], [a11=-\frac{4}{5}, a12=\frac{3}{5}, a21=\frac{3}{5}, a22=\frac{4}{5}, b1=8, b2=-6]]$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i37) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

(%o37) $\begin{pmatrix} x1=a12\,y+a11\,x+b1 \\ y1=a22\,y+a21\,x+b2 \end{pmatrix}$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$x1=\frac{4\,x}{5}-\frac{3\,y}{5}-8$$
$$y1=\frac{3\,x}{5}+\frac{4\,y}{5}-6$$

Definujeme matice `A1, B1` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

(%o38) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o39) $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

(%o40) $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3\,y}{5} + \frac{4\,x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

(%o41) $\begin{pmatrix} -\frac{3\,y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o42) $[[x = 5, y = -15]]$

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (64) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);
       CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;
       solve(CharR1,%lambda);
```

(%o43) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o44) $\lambda^2 - \frac{8\,\lambda}{5} + 1 = 0$

(%o45) $[\lambda = -\frac{3\,i - 4}{5}, \lambda = \frac{3\,i + 4}{5}]$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x1 = -\frac{4\,x}{5} + \frac{3\,x}{5} + 8$$
$$y1 = \frac{3\,x}{5} + \frac{4\,z}{5} - 6$$

Definujeme matice `A2, B2` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

(%o46) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o47) $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

(%o48) $\begin{pmatrix} x1 = \frac{3\,y}{5} - \frac{4\,x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

(%o49) $\begin{pmatrix} \frac{3\,y}{5} - \frac{9\,x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o50) []

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (64) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
       CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
       solve(CharR2,%lambda);
```

(%o51) $\begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o52) $\lambda^2 - 1 = 0$

(%o53) $[\lambda = -1, \lambda = 1]$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla λ do soustavy (její matice) (63) a řešíme.

```
(%i54) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

(%o54) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$

```
(%i55) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
       solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

(%o55) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o56) $[[u = -3\,\%r3, v = \%r3]]$

První samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_1 = (-3, 1)$.

```
(%i57) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
       solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

(%o57) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o58) $[[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$

Druhý samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0°; 360°)$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha, \\ a_{21} &= \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1\cos\alpha & - & x_2\sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1\sin\alpha & + & x_2\cos\alpha & + & b_2 \end{array}.$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + x_2\sin\alpha &= b_1 \\ -x_1\sin\alpha + x_2(1-\cos\alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{74}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (74) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (1-\cos\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1-\cos\alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos\alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α:

$$x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha$$
$$x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{array}{rcl} u_1(\lambda - \cos\alpha) + u_2 \sin\alpha & = & 0 \\ -u_1 \sin\alpha + u_2(\lambda - \cos\alpha) & = & 0. \end{array} \tag{75}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda - \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{76}$$

Úpravou (76) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin\alpha = 0$ a zároveň $\cos\alpha = 1 = \lambda$ nebo $\cos\alpha = -1 = \lambda$. Pro $\cos\alpha = -1$ tak dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & -x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2. \end{array}$$

Za podmínky, že $\cos\alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 \\ x_2' & = & x_2 \end{array}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme

4) POSUNUTÍ

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & x_2 & + & b_2. \end{array}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda + \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0, \tag{77}$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

9.8 Cvičení – Shodnosti v rovině

50. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0,0]$, $[3,4]$ po řadě na body $[5,0]$, $[9,s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5,0]$. **[2]**

51. Určete a, b, c tak, aby rovnice $x' = \dfrac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. **[3]**

52. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \dfrac{1}{2}y + 1,\ y' = ax + \dfrac{1}{2}y - 1,\ z' = bx + cy + 3,$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = \dfrac{1}{2}y + 1,\ z' = ax + cy - 3.$

Určete koeficienty a, b, c.

53. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1, 2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3, -4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti.

54. Určete $p,\ q$ tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0], [1, 2], [-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4], [p, 2], [2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

55. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4, 5]$.

56. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0.$

57. Rotace kolem bodu $S = [2; 1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1; 1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

58. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2.$

59. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2; 1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.

9.9 Klasifikace shodností prostoru E_3

Věta 34. *Každé shodné zobrazení v prostoru* E_3 *lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.*

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} f: & x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ & x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ & x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3, \end{array}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f: \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f: \ X' = A \cdot X + B. \tag{78}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (78) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{79}$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{80}$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé λ. Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (80) ho označme λ_0. Shodnost v E_3 má tak vždy alespoň jeden samodružný směr $\vec{u}$; $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $||\vec{u}'|| = ||\lambda_0 \vec{u}|| = ||\vec{u}||$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1. Předpokládejme, že vektor $\vec{u}$ je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & & & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & + & b_2 \\ x_3' & = & & & & \pm & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \text{ pro } \sin\alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nebo POSUNUTÍ

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY ($b_1 = b_2 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z $(b_3 = 0)$ nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z $(b_3 = 0)$ nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Poznámky.

1. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

2. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

9.10 Cvičení – Shodnosti prostoru E_3

60. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

61. Napište rovnice posunutí v E_3, v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí.

9.11 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 35. *Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.*