Otázky ke zkoušce z Lineární algebry a geometrie ... KMA/LA2

Letní semestr 2015

1.	**I. Vektorový prostor.** Uveďte několik příkladů vektorových prostorů. Vyslovte definici vektorového prostoru. Jednotlivé vlastnosti z definice ilustrujte na vybraném příkladu. Které z následujících množin splňují definici vektorového prostoru (vysvětlete proč): a) $M_1 = \{(x, y) \in R^2; y = -2x + 1\}$, b) $M_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 5x\}$, c) $M_3 = \{(0,0,0)\}$? **II. Lineární kombinace.** Na jednoduchém příkladu objasněte pojmy lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární obal množiny a množina generátorů vektorového prostoru. Uveďte příklady množin generátorů vektorových prostorů R^2, R^3, R^4, které nejsou jejich bázemi, a správnost těchto příkladů dokažte.
2.	**I. Lineární závislost a nezávislost vektorů.** Definujte pojmy „lineárně závislé vektory“ a „lineárně nezávislé vektory“. Uveďte příklady. Vysvětlete, proč je následující tvrzení pravdivé, ilustrujte ho jednoduchým příkladem: „Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru *V*. Pokud množina *M* obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá.“ **II. Dimenze a báze vektorového prostoru.** Definujte pojem báze vektorového prostoru. Jaký je vztah mezi bází a množinou generátorů vektorového prostoru? Kolika způsoby můžeme zapsat daný vektor pomocí vektorů dané báze příslušného vektorového prostoru? Svou odpověď dokažte. Co rozumíme pojmem dimenze vektorového prostoru? Uveďte příklady množin generátorů a bází vektorových prostorů R^2, R^3, R^4.
3.	**I. Steinitzova věta.** Vyslovte Steinitzovu větu o výměně. Vyjmenujte alespoň tři důsledky této věty. S pomocí Steinitzovy věty o výměně dokažte jednu z následujících dvou vět (Můžete je ilustrovat jednoduchými příklady.): a) „Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru $V \neq \vec{o}$ mají týž počet prvků.“ b) „Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_m\}$ je množina generátorů vektorového prostoru *V*, pak $\dim V \leq m$.“ **II. Řešení soustav lineárních rovnic.** Jak může dopadnout řešení soustavy lineárních rovnic. Ilustrujte též geometricky na příkladu soustav lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých. Vyslovte Frobeniovu větu. Co rozumíme pojmem homogenní soustava lineárních rovnic? Jaký je vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy? Jak můžeme charakterizovat množiny řešení těchto soustav v souvislosti s pojmy vektorový a bodový prostor?
4.	**I. Podprostor vektorového prostoru.** Definujte pojem podprostor vektorového prostoru. Uveďte všechny možné podprostory vektorových prostorů R^2 a R^3. Jaký je „největší“ a „nejmenší“ podprostor daného vektorového prostoru *V*? Jaká je nutná podmínka existence vektorového (pod)prostoru? Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny podprostory v R^3. Své tvrzení zdůvodněte. a) $W_1 = \{(r, 3r, 5r); r \in R\}$, b) $W_2 = \{(2s - t, s + t, s - 2t); s, t \in R\}$, c) $W = \{(r+1, 3r, 5r); r \in R\}$. **II. Afinní soustava souřadnic.** Vysvětlete účel afinní soustavy souřadnic a popište způsob jejího zavedení. Co je to repér? Jaký je vztah mezi souřadnicemi bodu a jeho průvodiče? Co to je kartézská soustava souřadnic? Uveďte výhody jejího použití (výhody ortonormální báze).

5.	**I. Skalární součin.** Vyslovte definici skalárního součinu. Uveďte několik příkladů skalárního součinu. Na příkladu libovolného skalárního součinu vysvětlete jednotlivé vlastnosti z definice této operace. Jak je definována norma vektoru? Jak vypočítáme odchylku dvou vektorů? Co platí pro skalární součin vektorů zadaných souřadnicemi vzhledem k nějaké ortonormální bázi? Jaké jsou další výhody ortonormální báze? **II. Ortogonální vektory.** Co rozumíme pojmem ortonormální báze? K čemu používáme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces? Tuto metodu objasněte při řešení této úlohy: „Určete ortonormální bázi podprostoru W= [(1,2,-1), (0,1,1)].“
6.	**I. Afinní bodový prostor.** Uveďte příklady afinních bodových prostorů. Jak definujeme tento pojem? Jaký je rozdíl mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem. Vysvětlete pojem afinní soustava souřadnic. Jak přejdeme od souřadnic vektoru k souřadnicím bodu? Vysvětlete rozdíl mezi A_3 a V_3. Které z následujících dvou tvrzení je pravdivé: a) „Vektorový prostor V_n je zároveň i afinním bodovým prostorem.“ b) „Afinní bodový prostor A_n je zároveň i vektorovým prostorem.“ **II. Afinní bodový podprostor.** Definujte pojem afinní bodový podprostor. Jaký je jeho vztah k vektorovému podprostoru? Uveďte některé speciální bodové podprostory. Jaké podprostory existují v A_2 *a* A_3? Jak můžeme tyto podprostory zadat? Ilustrujte na příkladech.
7.	**I. Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů.** Druhy zápisů afinních podprostorů a přechody mezi nimi (parametricky, neparametricky). Ilustrujte pomocí rovin a přímky v prostoru A_3. Jaké mohou být vzájemné polohy afinních podprostorů a jak tyto polohy určíme. Jak poznáme, že dva rovnoběžné podprostory jsou incidentní? **II. Určení afinního bodového podprostoru.** Jak byste ukázali pravdivost tvrzení: „Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně (k + 1) lineárně nezávislými body.“ Co to jsou lineárně nezávislé body? Vysvětlete na příkladu roviny v A_3. Jak byste vysvětlili, že je určena 3 nezávislými body?
8.	**I. Svazky a trsy rovin (nadrovin).** Vysvětlete pojem svazek nadrovin (1. a 2. druhu) na příkladu rovin v prostoru A_3 a přímek v A_2. Jaký vztah platí pro obecnou rovnici roviny, která náleží svazku určenému dvěma danými rovinami? Vysvětlete pojem trs nadrovin (1. a 2. druhu) na příkladu rovin v prostoru A_3 a přímek v A_2. Jaký vztah platí pro obecnou rovnici roviny, která náleží trsu určenému třemi danými rovinami? **II. Diskuse vzájemné polohy dvou bodových podprostorů.** Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin. V prostoru jaké dimenze mohou být dvě roviny mimoběžné? Vysvětlete, co rozumíme příčkou mimoběžných podprostorů.
9.	**I. Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny.** Pojem obecná (neparametrická) rovnice nadroviny ilustrujte na příkladu roviny v A_3. Uveďte alespoň čtyři různé postupy jejího odvození i s jejich případnou geometrickou interpretací. Jak určíte obecnou rovnici roviny, znáte-li i) tři body, ii) dva body a vektor ze zaměření roviny, iii) bod a dva vektory ze zaměření roviny? **II. Vzdálenost podprostorů.** Jak definujeme vzdálenost dvou bodů? Odvoďte vztah pro určení vzdálenosti bodu od roviny. Uveďte tento vztah do souvislosti s obecnou rovnicí nadroviny v E_2 a E_3. Jak určíme i) vzdálenost dvou mimoběžek v E_3 a ii) vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v E_3.

10.	**I. Vektorový součin. Ortogonální doplněk n-1 vektorů.** Definujte vektorový součin. Jaké jsou vlastnosti vektorového součinu? Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk *n-1* vektorů? Na příkladu z A_3 ilustrujte použití vektorového součinu při výpočtu obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku. **II. Ortogonální doplněk vektorového podprostoru.** Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk podprostoru? Jaká je dimenze ortogonálního doplňku podprostoru V_k ve vektorovém prostoru V_n? Ilustrujte na příkladu V_3. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy ortogonální doplněk podprostoru a ortogonální doplněk n-1 vektorů.
11.	**I. Kolmost podprostorů.** Jak určíme, zda je vektor kolmý k podprostoru? Vysvětlete pojmy „kolmé podprostory“ a „totálně kolmé podprostory“. Ilustrujte na příkladu podprostorů V_3. Jaká je nutná a postačující podmínka pro kolmost dvou podprostorů? **II. Eukleidovský bodový prostor.** Kdy můžeme afinní bodový prostor nazvat Eukleidovským bodovým prostorem? Co rozumíme pojmem kartézská soustava souřadnic? Jak definujeme vzdálenost bodů? Uveďte několik vlastností vzdálenosti bodů. Jak počítáme vzdálenost bodů v kartézské soustavě souřadnic?
12.	**I. Vnější součin. Objem simplexu.** Vysvětlete geometrický význam vnějšího součinu v prostoru dimenze 3 a proveďte jeho odvození. Co rozumíme pojmem simplex? Jak vypočítáme jeho objem? Uveďte příklad simplexu v E_3. Vypočtěte jeho objem. Jak můžeme využít vnější součin při výpočtu obsahu trojúhelníku. **II. Odchylka podprostorů.** Co rozumíme odchylkou přímky od roviny v E_3? Jak tuto odchylku spočítáme? Jak určíme kolmý průmět jednoho vektoru do směru jiného vektoru? Jak určíme odchylku dvou rovin E_3?