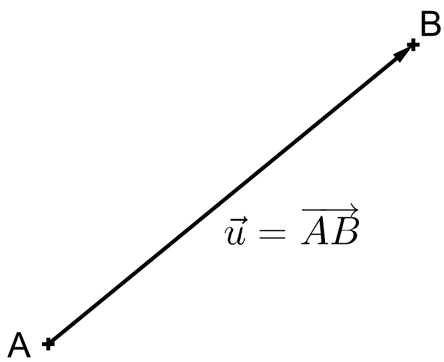
2 Vektorový prostor

Pojem „vektor“ znáte ze střední školy - z fyziky, kde jste ho používali pro znázornění velikosti a směru vektorové veličiny (tzv. „fyzikální vektor“), a z geometrie, kde jste vektor používali k vyjádření směru (a velikosti posunutí v tomto směru) např. při zápisu parametrických rovnic přímky (tzv. „geometrický vektor“).

Vektory jste znázorňovali „orientovanými úsečkami“ (šipkami) konkrétního směru a velikosti. Ve fyzice většinou záleží na umístění počátečního bodu této orientované úsečky, jedná se o tzv. „vázané vektory“. V geometrii většinou na umístění počátečního bodu nezáleží (všechny orientované úsečky téhož směru a téže velikosti jsou rovnocenné), hovoříme o tzv. „volných vektorech“.

Geometrickým vektorem tak vlastně rozumíme *množinu všech orientovaných úseček stejného směru a velikosti.* Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny pak nazýváme *umístěním vektoru.* Tohoto vztahu mezi dvojicí bodů (tj. počátečním a



Obrázek 4: Geometrický vektor $\vec{u}$, jehož umístěním je orientovaná úsečka AB

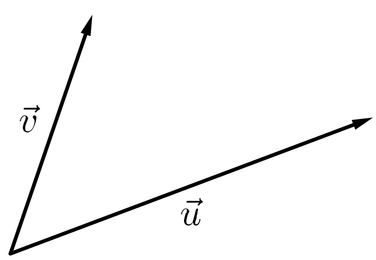
koncovým bodem orientované úsečky) a vektorem budeme dále využívat. Například vektor $\vec{u}$ na Obr. 4, který je dán orientovanou úsečkou (svým umístěním) AB, budeme zapisovat také jako $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ nebo $\vec{u} = B - A$.

PŘÍKLAD 2.1. *Pro geometrické vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, které jsou dány svými umístěními určete graficky výsledky následujících operací:*

a) $\vec{u} + \vec{v}$,

b) $\vec{u} - \vec{v}$,

c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$.



2.1 Vybrané algebraické struktury

Vlastnosti početní operace (např. sčítání, odčítání, násobení a dělení) prováděné s nějakými čísly závisí na množině, z níž tato čísla pocházejí. Liší se vlastnosti operace sčítání na množině přirozených čísel a na množině celých čísel, liší se vlastnosti dělení na množině celých čísel a na množině racionálních čísel apod. Má proto smysl hovořit o operaci ve spojení s množinou, na jejíž prvcích operaci provádíme.

Algebraickou strukturou rozumíme množinu spolu s jednou nebo i více operacemi, které jsou na ní (neomezeně) definované. Zapisujeme $(M, *)$ nebo $(K, \diamond, \circ)$, kde M, K jsou množiny a $*, \diamond, \circ$ jsou operace na nich definované ($*$ je operace na M a $\diamond$ spolu s $\circ$ jsou operacemi na K).

Příklady algebraických struktur

1. Množina celých čísel (Z) spolu s operací sčítání „+“: $(Z, +)$.
2. Množina reálných čísel (R) spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“: $(R, +, \cdot)$.
3. Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic (konkrétního) $n-$tého řádu spolu s operací násobení matic „·“: $(M_{n\times n}, \cdot)$.
4. Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání „$\oplus$“ a násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku: $(M, \oplus, \otimes)$.

2.1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa)**.** *Grupou* $(M, *)$ *rozumíme množinu* M *spolu s operací* $*$ *na* M*, která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\ \ x * y \in M,$
Operace $*$ *je neomezeně definovaná na* M*.*
(Množina M *je uzavřená vzhledem k operaci* $*$*.)*

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\ \ x * (y * z) = (x * y) * z,$
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\ \ x * e = e * x = x,$
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\ \ x * y = y * x = e.$
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ *navíc* **komutativní**, *nazývá se* **komutativní grupa** *nebo též* **Abelova grupa**.

PŘÍKLAD 2.2. *Rozhodněte, zda algebraická struktura* $(Z, +)$ *je „komutativní grupou“.*

Příklady grup

1. $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,
2. $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

$\circ$	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

PŘÍKLAD 2.3. *Rozhodněte, zda množina geometrických vektorů v rovině spolu s operací skládání (sčítání) vektorů tvoří grupu.*

2.1.2 Těleso

PŘÍKLAD 2.4. *Určete vlastnosti algebraické struktury* $(R, +, \cdot)$.

Těleso je algebraickou strukturou, jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá* **těleso***, právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$*, kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$*, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T **komutativní těleso***.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

2.2 Vektorový prostor

Příklad: Množina všech vektorů v rovině (v prostoru), jak je známe ze středoškolské geometrie (geometrické vektory).

Definice 3 (Vektorový prostor)**.** *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme* **vektorovým prostorem nad tělesem** T*, právě když jsou na V definovány dvě operace:*

i) **sčítání:** *libovolné dvojici $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$,*

ii) **násobení prvkem z tělesa T (skalárem):** *výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$,*

které splňují následující vlastnosti:

a) *Struktura $(V, +)$ je* **komutativní grupa**.

b) **Distributivnost***:*

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

c) *Existence* **jednotkového prvku skalárního násobení***:*

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Poznámky.
1. Prvky množiny V nazýváme **vektory**.
2. Vektor $\vec{o}$, tj. nulový prvek grupy $(V, +)$, nazýváme **nulový vektor**.
3. Vektor $-\vec{u}$ nazýváme **opačný vektor k vektoru** $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}.$$

4. Prvky tělesa T se nazývají **skaláry**.

PŘÍKLAD 2.5. *Ukažte, že množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem, definovanými následujícím způsobem, je vektorový prostor:*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

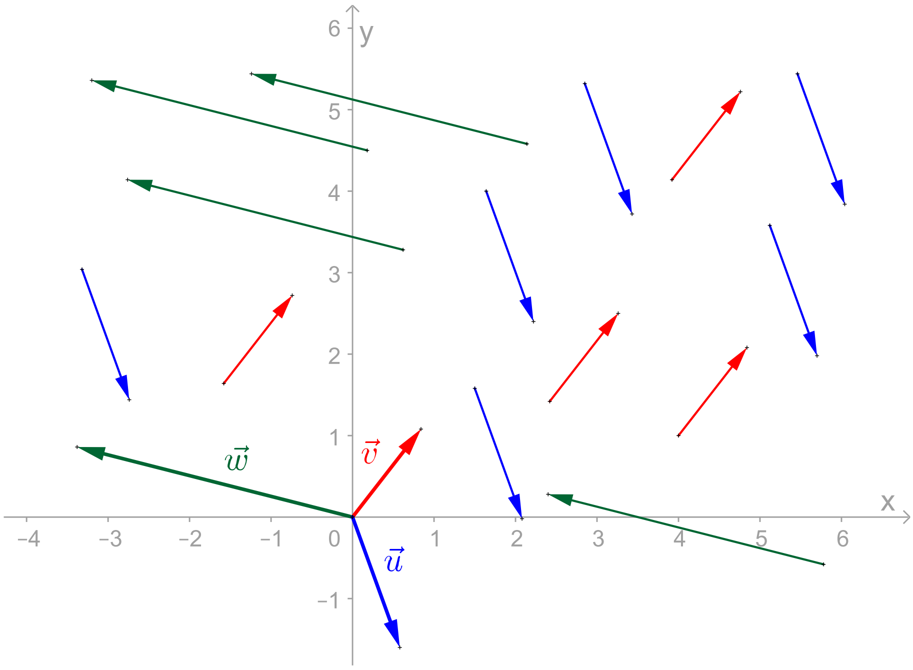
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Poznámky.
1. Jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel.
2. Tento prostor můžeme reprezentovat prostřednictvím bodů v rovině, kterou opatříme soustavou souřadnic.

PŘÍKLAD 2.6. *Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:*

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

PŘÍKLAD 2.7. *Ukažte, že geometrické vektory v rovině tvoří vektorový prostor.*[1]



Obrázek 5: Vektor jako množina orientovaných úseček stejné velikosti a stejného směru. Orientovaná úsečka jako umístění vektoru.

Poznámka. U geometrických vektorů nás zajímá pouze jejich velikost a směr, nikoliv jejich působiště, jsou to tzv. volné vektory, viz Obr. 5. Proto je můžeme při zachování jejich směru a působiště libovolně přemisťovat. Vektorový prostor si tak můžeme představovat jako množinu všech vektorů se společným počátečním bodem (který většinou volíme v počátku soustavy souřadnic).

Některé důsledky definice vektorového prostoru

a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$,

b) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$,

c) $c \cdot \vec{o} = \vec{o}$,

d) $c \cdot \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = \vec{o}$.

[1]Geometrickým vektorem rozumíme množinu všech orientovaných úseček stejného směru a stejné velikosti, viz skupiny barevných orientovaných úseček na Obr. 5. Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny, se kterou pracujeme, potom nazýváme *umístění vektoru*.

Příklady vektorových prostorů

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie.

2. Samotné těleso T spolu s operacemi „$+, \cdot$“ definovanými na T tvoří vektorový prostor nad tělesem T.

3. Aritmetický vektorový prostor R^2 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

4. Aritmetický vektorový prostor R^3 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných trojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

5. Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:
$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

6. Prostor F_X všech reálných (komplexních) funkcí na nějaké množině X (nad tělesem $\mathbb{R}$).

7. Množina $C_{\langle a,b\rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

8. Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznámka. Vektorový prostor V nad tělesem T někdy značíme takto:
$$(V, +, T).$$

PŘÍKLAD 2.8. *Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.*