

2.3 Cvičení

Vektorové prostory

1. Ukažte, že následující množiny jsou vektorovými prostory:

a) Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem \mathbb{R} , tj. množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$k \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

b) Množina $F_{\langle a, b \rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ (nad tělesem \mathbb{R}).

c) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} .

d) Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso \mathbb{R} všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.

2. Zkoumejte následující podmnožiny R^2 . Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,

b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,

c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

3. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou roviny v \mathbb{R}^3 definované rovnicemi $3x + 2y - 5z = 0$, resp. $3x + 2y - 5z = 1$. Ukažte, že ρ_1 je vektorovým prostorem, zatímco ρ_2 nikoliv.

4. Ukažte, že $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ je vektorovým prostorem dimenze 3. Najděte bázi tohoto prostoru.

Algebraické struktury

5. Rozhodněte o vlastnostech následujících algebraických struktur (tj. zda se jedná o grupy či tělesa):

- a) Množina $M_{n \times n}$ čtvercových matic n -tého řádu spolu s operací sčítání matic „+“.
- b) Množina $M_{n \times n}$ čtvercových matic n -tého řádu spolu s operací násobení matic „·“.
- c) Množina $M = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ spolu s operací sčítání \oplus na hodinovém ciferníku.
- d) Množina $M = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ spolu s operací násobení „ \otimes “ na hodinovém ciferníku.
- e) Množina $M = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ spolu s operacemi sčítání „ \oplus “ a násobení „ \otimes “ na hodinovém ciferníku.
- f) Množina $K = \{1, i, -1, -i\}$ (i je imaginární jednotka) spolu s operací „·“ násobení.
- g) Množina zákrytových pohybů čtverce (rovnostranného trojúhelníku) v rovině spolu s operací skládání.
- h) Množina celých čísel Z spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“.
- i) Množina znamének $Z = \{+, -\}$ spolu s operací „skládání znamének“ ·.