4 Báze vektorového prostoru

Definice 8. *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V*, právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. M *je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Věta 6. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Důkaz. Větu 6 dokážeme sporem. Předpokládáme, že platí její negace, tj., že každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát **aspoň dvěma různými způsoby** jako lineární kombinaci vektorů báze M, a pokusíme se z ní odvodit sporné tvrzení. Pro zjednodušení zápisu se omezíme na prostor V_3, zobecnnění na V_n bude potom zřejmé. Pro každý vektor $\vec{u}$ tedy existují aspoň dvě různé trojice koeficientů a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 takové, že

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \quad \text{a zároveň} \quad \vec{u} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3.$$

Pokud od sebe tyto dvě rovnosti odečteme, dostaneme

$$(b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2 + (b_3 - a_3)\vec{u}_3 = \vec{o}. \tag{11}$$

Dle předpokladu jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé. Jediná jejich lineární kombinace, která může být rovna nulovému vektoru je tak triviální lineární kombinace. Rovnost (11) je potom splněna právě tehdy, když jsou všechny tři koeficienty $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ rovny nule. To může ale nastat jedině tehdy, když $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ a $b_3 = a_3$. Tím dostáváme spor s předpokladem, že trojice a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 jsou různé. □

Věta 7 (Alternativní definice lineární nezávislosti)**.** *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pak M je* **lineárně nezávislá** *právě tehdy, když žádný z vektorů množiny M není lineární kombinací ostatních vektorů M.*

4.1 Dimenze vektorového prostoru

Definice 9. *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi***, jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 8 (O existenci báze)**.** *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi***.*

Důsledek 4. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.*

a) $(1, 2, 3), (1, 2, 1), (-1, 1, 0), (2, -1, 0)$,

b) $(1, 2, 3), (1, 2, 1), (0, 0, 2), (1, 2, -1)$.

Řešení: Na první pohled je zřejmé, že ani jedna z uvedených množin není bází. Maximální počet nazávislých uspořádaných trojic reálných čísel je 3. Je-li jich více, jsou vždycky závislé (Souvisí to s počtem řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Zdůvodněte!). Zbývá vyšetřit, zda se jedná alespoň o systémy generátorů prostoru R^3. Zkoumáme proto, zda lze každý vektor $\vec{v} \in R^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci daných čtyř vektorů.

ad a)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Rovnice (12) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & v_2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & v_3 \end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & v_2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & v_3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & v_1 \\ 0 & 2 & -3 & 6 & 3v_1 - v_3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -2v_1 + v_2 \end{array}\right].$$

Má-li mít příslušná soustava lineárních rovnic řešení (jedno mít nemůže, tak je ve hře nekonečně mnoho řešení) nezávisle na volbě vektoru $\vec{v}$, musí mít matice soustavy dle Frobeniovy věty hodnost 3 (tj. rovnu dimenzi vektorového prostoru R^3, jehož mají být vektory systémem generátorů). Tato podmínka je evidentně splněna. Můžeme tedy říci, že daná množina vektorů je systémem generátorů vektorového prostoru R^3.

ad a)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Rovnice (13) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & v_2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & v_3 \end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & v_2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & v_3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{crcr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -3v_1 + v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2v_1 + v_2 \end{array}\right].$$

Matice příslušné soustavy lineárních rovnic má hodnost 2. Rozšířená matice soustavy má až na případ, kdy $v_2 = 2v_1$, hodnost 3. Dle Frobeniovy věty tedy příslušná soustava nemá pro všechny vektory $\vec{v} \in R^3$ řešení. Daná množina vektorů není systémem generátorů vektorového prostoru R^3 (Můžeme si ale položit otázku, zda není systémem generátorů nějakého podprostoru R^3? Je-li, tak jakého?).

Poznámka. Příklad 4.1 můžeme řešit i rychleji, pouze s využitím matic, jejichž sloupce (nebo řádky) jsou dané vektory. Navrhněte a zdůvodněte postup takového řešení.

4.2 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Dle věty 6 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, respektive jejich vektor, nazýváme souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M.

Definice 10. *Nechť* $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je báze vektorového prostoru* V. *Potom každý vektor* $\vec{u} \in V$ *lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ *nazveme souřadnicemi vektoru* $\vec{u}$ *vzhledem k bázi* M *a značíme*

$$\{\vec{u}\}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

PŘÍKLAD 4.2. *Množina* $M = \{(1,1),(2,3)\}$ *je bází vektorového prostoru* R^2. *Potom pro vektor* $\vec{u} = (7,12) \in R^2$ *platí*

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Tedy souřadnice vektoru $\vec{u} = (7,12)$ *vzhledem k bázi* M *jsou* $(-3,5)$. *Píšeme takto:*

$$\{\vec{u}\}_M = (-3,5).$$

Poznámka: Nabízí se otázka, vzhledem k jaké bázi jsou uvažovány ostatní souřadnice vektorů z uvedeného příkladu. Jedná se o tzv. **kanonickou bázi**.

V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina

$$\{(1,0),(0,1)\}.$$

Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

atd.

ÚKOL: Ověřte, že vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4,-2,1,5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné.

Věta 9. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení*

$$f : V \mapsto T^n$$

definované vztahem

$$f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$$

je **izomorfismus**.

4.3 Podprostor vektorového prostoru

Definice 11. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

1. W **je neprázdná podmnožina** V *($W \subseteq V \wedge W \neq \emptyset$.)*

2. W **je vektorovým prostorem** *vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z tělesa T, které jsou definované na V (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Skutečnost, že W je podprostorem vektorového prostoru V značíme takto:

$$W \subseteq\subseteq V.$$

Poznámka. Význam pojmů uvedených v definici si můžeme ilustrovat na příkladu množiny $U = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$, která je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $V = R^2$ definovaného nad tělesem $T = R$, tj. $U \subseteq\subseteq V$.

PŘÍKLAD 4.3. *Rozhodněte, zda je množina $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x - 1\}$ vektorovým podprostorem prostoru R^2 (tj. zda platí $W \subseteq\subseteq R^2$)*

Nutná podmínka existence vektorového podprostoru: Vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor z (nad)prostoru V.

Poznámky.

1. „Nejmenším“ podprostorem je tzv. **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$.

2. „Největším“ podprostorem je prostor V samotný.

Je nutné při určování podprostoru ověřovat celou definici?

Věta 10 (O určení podprostoru)**.** *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W$,

2. $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W$.

PŘÍKLAD 4.4. *Ověřte, zda* $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

PŘÍKLAD 4.5. *Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru* R^3 *nad* $\mathbb{R}$.

a) *Množina všech řešení* (x, y, z) *homogenní lineární rovnice*

$$3x + 2y - z = 0.$$

b) *Množina všech vektorů, které jsou lineární kombinací vektorů*

$$\vec{v}_1 = (2, -3, 0),\ \vec{v}_2 = (1, 0, 3).$$

Pokuste se o geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).