# 5 Steinitzova věta o výměně

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

**I. Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.**

**II. Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.**

**Příklad:** Množina $M$ je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z $M$ vektory z množiny $N$ tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

**a)** $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\}$, $N = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$,

**b)** $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\}$, $N = \{(0,1,2),(2,0,2)\}$.

**Věta 11** (Steinitzova věta o výměně). *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Nechť $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *prostoru $V$ a nechť $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k$ jsou* **libovolné lineárně nezávislé vektory** *z $V$. Potom platí:*

**1)** $k \leq n$,

**2)** *při* **vhodném přečíslování** *vektorů $\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n$ můžeme prvních $k$ z nich nahradit vektory $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k$ tak, že množina $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k,\vec{u}_{k+1},\vec{u}_{k+2},...,\vec{u}_n\}$ je* **systémem generátorů** *vektorového prostoru $V$.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme matematickou indukcí podle $k$ (tj. podle počtu lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_i$).

I. Dokážeme, že věta je pravdivá pro $k = 1$

Máme tedy dokázat, že je-li $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ množina generátorů prostoru $V$ a $\vec{v}_1$ je libovolný lineárně nezávislý vektor z $V$, potom:
(1) $1 \leq n$,
(2) při vhodném uspořádání mohu první vektor z množiny $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ nahradit vektorem $\vec{v}_1$.

Je zřejmé, že tvrzení (1) platí; pro všechna $n \in N$ je skutečně $1 \leq n$.
Zaměříme se tedy na důkaz tvrzení (2). To, že $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ je množina generátorů prostoru $V$ lze zapsat rovností $[\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n] = V$. Potom chceme dokázat, že z předpokladů věty vyplývá, že platí také rovnost $[\vec{v}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n] = V$ (tj., že vektor $\vec{u}_1$ můžeme nahradit vektorem $\vec{v}_1$).
Protože $\vec{v}_1 \in V$, lze vektor $\vec{v}_1$ psát jako lineární kombinaci

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n. \tag{14}$$

Potom ovšem platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud k ní přidáme vektor, který je lineární kombinací jejích vektorů). Vektor $\vec{v}_1$ je dle předpokladů věty lineárně nezávislý a proto nemůže být nulový. Alespoň jeden z koeficientů $a_i$ lineární kombinace (14) tak musí být různý od nuly. Věta připouští vhodné uspořádání vektorů $\vec{u}_i$, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je $a_1$. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{a_1}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor $V$ platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Dokázali jsme tak, že lze opravdu při vhodném uspořádání vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ první z nich nahradit vektorem $\vec{v}_1$ a výsledná množina bude stále množinou generátorů prostoru $V$.

II. Dokážeme, že pokud věta platí pro $k = m$, platí i pro $k = m + 1$

Mějme na paměti, že v tomto kroku (říká se mu „indukční krok“) dokazujeme pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m + 1)$ (kde symbolem $SV(j)$ rozumíme výrok „Steinitzova věta je pravdivá pro $k = j$“) nikoliv pravdivost samotného tvrzení věty.

Předpokládáme tedy, že pro $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ a $m$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ z $V$ je (1) $m \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$. Chceme dokázat, že potom platí i to, že máme-li $m + 1$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ z $V$, je (1) $m + 1 \leq n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$.

Protože $\vec{v}_{m+1} \in V$, lze vektor $\vec{v}_{m+1}$ psát jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n$, tj.

$$\vec{v}_{m+1} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_m\vec{v}_m + a_{m+1}\vec{u}_{m+1} + \cdots + a_n\vec{u}_n \tag{15}$$

a platí

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.$$

Protože vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ jsou lineárně nezávislé, je zřejmé, že alespoň jeden z koeficientů $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ lineární kombinace (15) je různý od nuly (promyslete si detailní zdůvodnění). Věta připouští vhodné uspořádání vektorů množiny generátorů, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je $a_{m+1}$. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_{m+1}$ vyjádřit z rovnosti (15) jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}}\vec{v}_{m+1} - \frac{b_1}{a_{m+1}}\vec{v}_1 - \frac{b_2}{a_{m+1}}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{b_m}{a_{m+1}}\vec{v}_m - \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\vec{u}_{m+2} - \cdots - \frac{a_n}{a_{m+1}}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor $V$ platí

$$\begin{aligned}[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] &= [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = \\ &= [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.\end{aligned}$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Opravdu lze při vhodném uspřádání vektorů vektor $\vec{u}_{k+1}$ nahradit vektorem $\vec{v}_{k+1}$. Tím jsme dokázali pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m+1)$, tzv. indukčního kroku důkazu matematickou indukcí. Tím je tento důkaz kompletní a můžeme proto říci, že Steinitzova věta o výměně je dokázána. □

## 5.1 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

**Věta 12. Každé dvě báze** *konečně generovaného vektorového prostoru $V$* **mají týž počet prvků**.

**Věta 13.** *Každá* **skupina lineárně nezávislých vektorů** *libovolného vektorového prostoru* **generovaného** $n-$**prvkovou množinou** *obsahuje* **nejvýše** $n$ **vektorů**.

**Věta 14.** *Je-li* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ **báze vektorového prostoru** $V$ *a jsou-li vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ **lineárně nezávislé**, *je množina* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ **rovněž báze** *vektorového prostoru $V$.*

**Věta 15.** *Nechť* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je* **množina generátorů** *vektorového prostoru $V$, pak*

$$\dim V \leq n.$$