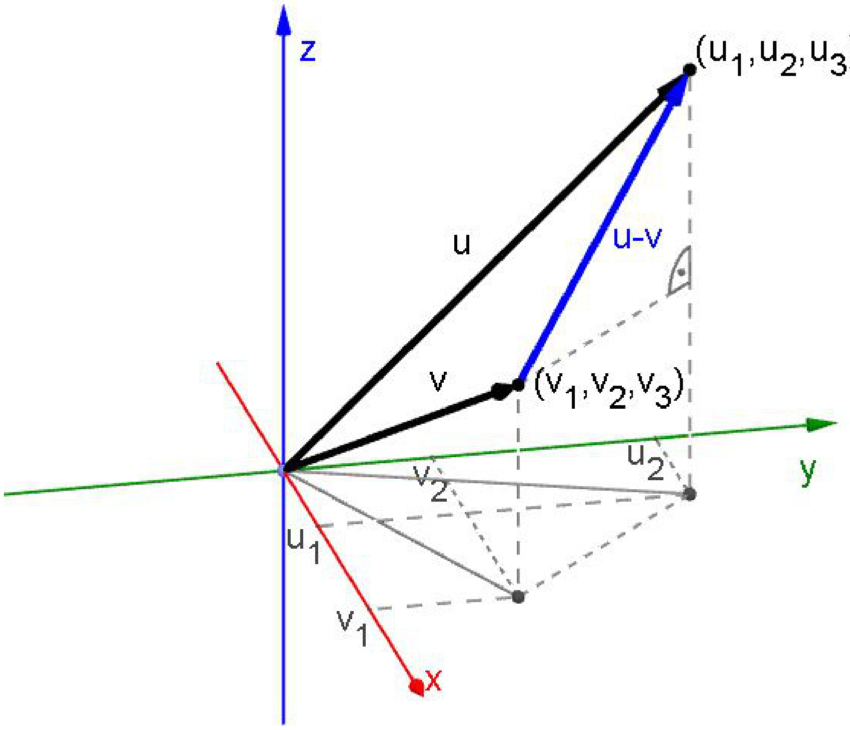
6 Skalární součin

Skalární součin[1] je operace, která dvěma vektorům (je to tedy *binární operace*) přiřazuje skalár (v našem případě jde o reálné číslo, obecně se jedná o prvek nějakého tělesa T). Dovoluje nám zavedení *metriky* v afinním bodovém prostoru, tj. umožňuje nám určovat vzdálenosti, odchylky, obsahy a objemy.

Pojem *skalární součin* znáte ze střední školy. Konkrétně se jednalo o tzv. *Eukleidovský skalární součin*, který je pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dán vztahem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{16}$$



Obrázek 7: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u}-\vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

Motivaci pro zavedení skalárního součinu v podobě dané formulí (16) lze nalézt při úpravě vztahu pro výpočet velikosti vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ (viz Obr. 7). Připomeňme, že velikost (též. normu; u geometrického vektoru se jedná o délku orientované úsečky, která je jeho umístěním) vektoru $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ značíme $|\vec{w}|$ a platí $|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$. Potom pro vektor $\vec{u} - \vec{v}$ platí

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

[1] Pro další studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

(jedná se vlastně o opakované uplatnění Pythagorovy věty v trojrozměrném prostoru, viz Obr. 7), odkud po umocnění obou stran na druhou dostaneme vztah

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2,$$

jehož pravou stranu upravíme na následující tvar

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

a pomocí vztahů pro velikosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přepíšeme do podoby

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3). \tag{17}$$

Požadavek zápisu rovnosti (17) ve tvaru

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

nás potom vede k definování skalárního součinu $\vec{u}\cdot\vec{v}$ formulí (16). Aby vše „fungovalo“, musí mít tato operace určité vlastnosti. Ty jsou specifikovány v následující definici 12, která zavádí *skalární součin* jako obecnější operaci, než je výše uvedený *Eukleidovský skalární součin*. Ten se tak stává jenom jednou z mnoha operací vyhovujících této definici.

Definice 12 (Skalární součin)**.** *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u},\vec{v}\in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u}\cdot\vec{v}\in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$,
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0 \;\wedge [\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

Poznámky.

1. Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru V. Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

2. Nejčastěji se setkáme s některým z následujících tří způsobů zápisu skalárního součinu vektorů $\vec{u},\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{nebo} \quad <\vec{u},\vec{v}> \quad \text{nebo} \quad [\vec{u},\vec{v}].$$

6.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny. Za skalární součin považujeme každou operaci, která splňuje definici 12. Uveďme si zde několik příkladů:

1. **Eukleidovský skalární součin**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

2. **Vážený skalární součin**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2.$$

   Obecně zapíšeme vážený skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ formulí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i,$$

   kde c_i je **váha** součinu $i-$tých souřadnic těchto vektorů.

3. Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 4u_2 v_2.$$

4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

PŘÍKLAD 6.1. *Ověřte, že operace definovaná předpisem $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2$ pro $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ je skutečně skalárním součinem.*

6.2 Norma (velikost) vektoru

Ke každému skalárnímu součinu je následující definicí zavedena norma vektoru.

Definice 13. *Normou (velikostí) vektoru $\vec{u} \in V_n$ rozumíme číslo*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Je třeba mít na paměti, že definice 13 zavádí normu vektoru pomocí skalárního součinu. Hodnota normy tedy závisí na tom, jaký skalární součin použijeme!

PŘÍKLAD 6.2. *Je dán vektor $\vec{a} = (2, -3, 5)$. Vypočítejte jeho normu pro*

a) Eukleidovský skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$,

b) vážený skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2 - u_3v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Poznámky.

1. Pro normu vektoru používáme též označení $\|\vec{u}\|$ (potřebujeme-li ji odlišit od absolutní hodnoty reálného čísla).

2. Vektor s normou $|\vec{u}| = 1$ nazýváme **jednotkový vektor**.

3. Součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ zkracujeme na $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Potom je zřejmé, že platí

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2. \tag{18}$$

4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice 13 norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:

a) $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|$, (tzv. 1-norma)
b) $\|\vec{u}\|_{\inf} = \max\{|u_1|, |u_2|, ..., |u_n|\}$,
c) $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$, Eukleidovská norma (též 2-norma)

V některých situacích bude výhodné nahradit daný vektor vektorem stejného směru, ale jednotkové velikosti. Hovoříme o tzv. **normování vektoru**. Vektor $\vec{u}$ (z)normujeme tak, že ho vydělíme jeho velikostí (normou), výsledný vektor označíme třeba $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \tag{19}$$

PŘÍKLAD 6.3. *Normujte vektor $\vec{a} = (3, -4, 0)$.*

6.3 Důležité nerovnosti

Při zkoumání vlastností vektorových prostorů se skalárním součinem nám výrazně pomohou následující dvě nerovnosti:

1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost (en.wikipedia.org: Cauchy–Schwarz inequality),

2) Trojúhelníková nerovnost (en.wikipedia.org: Triangle inequality).

Ukážeme si, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

6.3.1 Cauchyova–Schwarzova nerovnost

Věta 16 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a pro jakýkoliv skalární součin platí*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|. \tag{20}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ lineárně závislé (tj. rovnoběžné).

Důkaz. Uvažujme vektor $\vec{u} + k\vec{v}$. Potom dle definice skalárního součinu a normy vektoru platí

$$\|\vec{u} + k\vec{v}\|^2 \ge 0,$$
$$\|\vec{u}\|^2 + 2k\vec{u} \cdot \vec{v} + k^2\|\vec{v}\|^2 \ge 0. \tag{21}$$

Když levou stranu nerovnosti (21) vhodně přeuspořádáme

$$\|\vec{v}\|^2 k^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}\, k + \|\vec{u}\|^2 \ge 0,$$

můžeme na ni nahlížet jako na kvadratický trojčlen $Ak^2 + Bk + C$ s proměnnou k. Potom je kvadratická nerovnost (21) vzhledem k této proměnné splněna právě tehdy, když je diskriminant $B^2 - 4AC$ tohoto trojčlenu menší nebo roven nule

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \le 0.$$

Odtud dostaneme po několika úpravách nerovnost (20), kterou chceme dokázat

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \le \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2,$$
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \le \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

□

Poznámka. Používáme různé zápisy Cauchyovy–Schwarzovy (dále jen „C–S“) nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

PŘÍKLAD 6.4. *Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, pro která platí:*

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete maximální možnou hodnotu e.

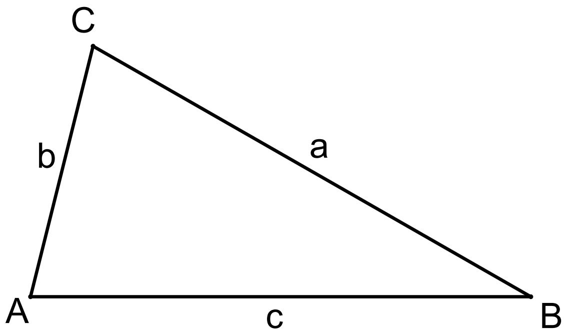
Nápověda: Dané rovnice upravte na tvary

$$a + b + c + d = 8 - e$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2.$$

a uvažujte C–S nerovnost pro vektory $\vec{u} = (a, b, c, d)$ a $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

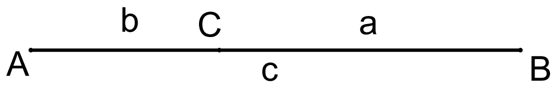
6.3.2 Trojúhelníková nerovnost

Mají-li tři úsečky a, b, c tvořit strany trojúhelníku ABC (viz Obr. 8), musí pro jejich délky platit, že součet každých dvou z nich je větší než ta třetí (tj. $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$). Nastane-li v některém z těchto případů rovnost, body A, B, C leží v přímce



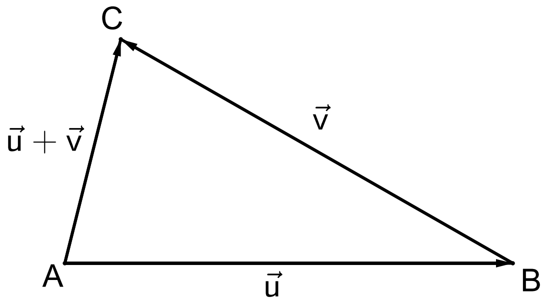
Obrázek 8: Úsečky délek a, b, c jsou stranami trojúhelníku

(trojúhelník degeneruje v úsečku, viz Obr. 9). Tyto skutečnosti jsou popsány tzv.



Obrázek 9: Pro $a + b = c$ leží vrcholy „trojúhelníku“ v přímce

trojúhelníkovou nerovností. Pokud do stran trojúhelníku ABC vhodně umístíme vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{u} + \vec{v}$, jak ilustruje Obr. 10, můžeme tuto nerovnost formulovat i pro vektory a jejich normy (viz Věta 17).



Obrázek 10: Trojúhelníková nerovnost pro vektory

Věta 17 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \tag{22}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když existuje $k \in R, k \geq 0$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$ nebo $\vec{v} = k\vec{u}$.

Důkaz. Ukážeme, že platnost nerovnosti (22) je důsledkem platnosti C-S nerovnosti (20). Nejprve obě strany nerovnosti (22) umocníme na druhou

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2,$$

pravou stranu při tom vyjádříme ve tvaru příslušného trojčlenu

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

Potom u členů, které jsou druhými mocninami norem vektorů, užijeme vztah (18) a zapíšeme je ve tvaru skalární mocniny

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2.$$

Po úpravě levé strany

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$$

a náležitém zjednodušení dostáváme nerovnost

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

jejíž pravdivost vyplývá z pravdivosti C–S nerovnosti ($|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$) a z definice absolutní hodnoty ($\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}|$). □

PŘÍKLAD 6.5. *Dokažte následující nerovnost:*

$$|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|| \leq \|\vec{a}-\vec{b}\|; \quad \vec{a},\vec{b} \in V_n.$$

Řešení: Postupujeme úplně stejně jako při výše uvedeném důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

PŘÍKLAD 6.6. *Zapište skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pouze užitím normy vektoru.*

Řešení: Využijeme vztah (18), tj. toho, že platí: $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. Nejprve uvažujeme vektor $\vec{u}-\vec{v}$. Dle (18) platí

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

Odtud potom můžeme vyjádřit skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pomocí norem vektorů takto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2). \tag{23}$$

Další možností je uvažovat vztahy $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ a $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Odečteme-li první od druhého, dostaneme vztah $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$, ze kterého vyjádříme skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ takto

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2). \tag{24}$$

6.4 Odchylka vektorů

Vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů můžeme definovat jako důsledek C–S nerovnosti (20). Z nerovnosti $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ vyplývá vztah

$$\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right| \leq 1.$$

Uvážíme-li definici funkce cos, je potom zřejmé, že pro každé dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{V}_n$ existuje jediné reálné číslo $\varphi\in\langle 0,\pi\rangle$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Toto číslo nazveme *odchylkou* nenulových vektorů $\vec{u},\vec{v}$.

Definice 14 (Odchylka vektorů). *Odchylkou dvou nenulových vektorů $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{V}_n$ rozumíme reálné číslo $\varphi\in\langle 0,\pi\rangle$, které je dáno vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \tag{25}$$

PŘÍKLAD 6.7. *Vypočítejte úhel mezi vektory $\vec{v}=(1,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,1)$.*

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+2v_2w_2+3v_3w_3$.

PŘÍKLAD 6.8. *Určete odchylku přímek p,q : p : $x=1+3t, y=1+t, z=1+2t$; $t\in R$, q : $x=2s, y=3+9s, z=-1+6s$; $s\in R$.*

PŘÍKLAD 6.9. *Určete hodnotu parametru $c\in R$ tak, aby vektory $\vec{a}=(-2,3,c), \vec{b}=(5,c,-8)$ byly na sebe kolmé.*

Poznámka. Dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\cos\varphi=0$ tj.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0.$$

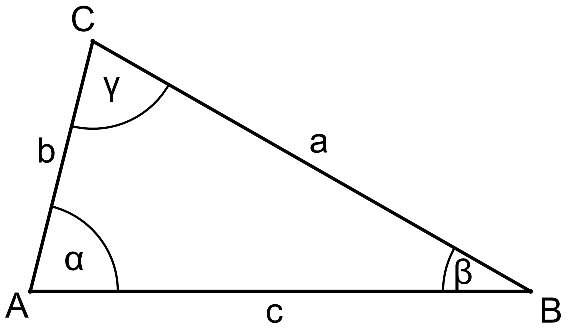
Tuto skutečnost využijeme zanedlouho k zavedení obecnějšího pojmu *ortogonální* vektory.

6.4.1 Kosinová věta

Získané poznatky o skalárním součinu vektorů a jejich normě nyní využijeme k důkazu kosinové věty.

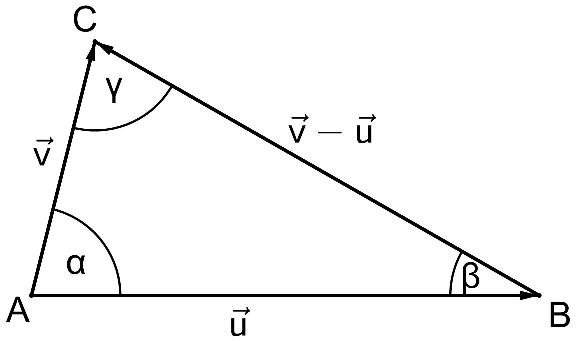
Věta 18 (Kosinová věta). *Pro libovolný trojúhelník ABC s vnitřními úhly α,β,γ protilehlými stranám délek a,b,c (viz Obr. 11) platí*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\beta\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned}$$



Obrázek 11: Trojúhelník ABC

Důkaz. Uvažujme vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$, jejichž umístěními jsou strany AB a AC trojúhelníku ABC. Strana BC je potom umístěním vektoru $\vec{v} - \vec{u}$ (viz Obr. 12) a pro normy uvedených vektorů platí $\|\vec{u}\| = c, \|\vec{v}\| = b, \|\vec{v} - \vec{u}\| = a$. Při



Obrázek 12: Užití vektorů k důkazu kosinové věty

využití zkušeností z důkazu věty 17 a řešení příkladu 6.6 můžeme psát

$$a^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u}^2 = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{u}\|^2 = b^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + c^2.$$

Nyní stačí za skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{u}$ dosadit podle vztahu (25) pro výpočet odchylky dvou vektorů a dostaneme vztah

$$a^2 = b^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos \alpha + c^2, \tag{26}$$

který je po dosazení dle rovností $\|\vec{v}\| = b$ a $\|\vec{u}\| = c$ již shodný s rovností $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Zbývající rovnosti dokážeme analogicky. □

6.4.2 Pythagorova věta

Pythagorovu větu můžeme chápat jako speciální případ kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník. Uvažujme, že trojúhelník ABC z obrázku 12 má při vrcholu A pravý úhel (tj. $\alpha = 90^\circ$ a $\cos \alpha = 0$). Potom dle (26) platí

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

kde a je přepona a b, c jsou odvěsny tohoto pravoúhlého trojúhelníku.