8.3 Ortogonální matice

Z geometrie víme, že afinní transformace bodového prostoru A_n daná rovnicí

$$X = AX' + B,$$

$X, X' \in A_n$, je shodností právě tehdy, když pro matici A platí vztah

$$A^T A = I, \tag{57}$$

kde I je jednotková matice řádu n[1]. Matice A je čtvercová a uvedený vztah je možné rozepsat rovnicemi pro její prvky. Například pro afinní transformaci roviny, jejíž matice má tvar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

je podmínka (57) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{58}$$

V případě afinní transformace prostoru A_n s maticí

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je podmínka (57) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots n, \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1,\ i = 1, 2, \dots n. \tag{60}$$

Porovnáme-li vztahy (59), (60) s definicí ortonormálních vektorů (viz def. 16), vidíme, že řádkové vektory matice A shodnosti v prostoru A_n jsou ortonormální (platí to i pro sloupcové vektory matice A). Protože ortogonální vektory jsou vždy nezávislé (viz věta 19), můžeme podle definice 17 dokonce říci, že řádkové (sloupcové) vektory matice A tvoří ortonormální bázi. Takovouto matici nazýváme „ortogonální matice“ (někdy též „ortonormální matice“[2]).

[1] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 55
[2] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 57

Definice 18 (Ortogonální matice)**.** *Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici A, pro kterou platí:*

$$A^T \cdot A = I.$$

Poznámky.

1. Po ortogonální matici A zřejmě platí $A^T = A^{-1}$. Potom ale též

$$A \cdot A^T = I.$$

2. V *ortogonální matici* je skalární součin dvou různých řádků roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné. Symbolicky zapsáno:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_i^j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. *Determinant ortogonální matice.* Pro A platí

$$A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \det(A^T \cdot A) = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = \det I = 1.$$

Potom

$$|\det A| = 1,$$

jinak zapsáno

$$\det A = \pm 1.$$

PŘÍKLAD 8.4. *Transformace, pro které je $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinity. Ukažte, že ne každá ekviafinita má matici A ortogonální (tj. ne každá ekviafinita je shodností).*

PŘÍKLAD 8.5. *Ukažte, že*

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

matice otočení kolem počátku soustavy souřadné o úhel α, je ortogonální matice. Spočítejte její determinant.