

Seznam otázek ke zkoušce z Lineární algebry a geometrie ... KMA/LAG

Letní semestr 2014

1.	<p>I. Vektorový prostor. Uveďte několik příkladů vektorových prostorů. Vyslovte definici vektorového prostoru. Jednotlivé vlastnosti z definice ilustrujte na vybraném příkladu. Které z následujících množin splňují definici vektorového prostoru (vysvětlete proč):</p> <p>a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -2x + 1\}$, b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 5x\}$, c) $M_3 = \{(0, 0, 0)\}$?</p> <p>II. Lineární kombinace. Na jednoduchém příkladu objasněte pojmy lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární obal množiny a množina generátorů vektorového prostoru. Uveďte příklady množin generátorů vektorových prostorů $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$, které nejsou jejich bázemi, a správnost těchto příkladů dokažte.</p>
2.	<p>I. Lineární závislost a nezávislost vektorů. Definujte pojmy „lineárně závislé vektory“ a „lineárně nezávislé vektory“. Uveďte příklady. Vysvětlete, proč je následující tvrzení pravdivé, ilustrujte ho jednoduchým příkladem: „Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pokud množina M obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá.“</p> <p>II. Dimenze a báze vektorového prostoru. Definujte pojem báze vektorového prostoru. Jaký je vztah mezi bází a množinou generátorů vektorového prostoru? Kolika způsoby můžeme zapsat daný vektor pomocí vektorů dané báze příslušného vektorového prostoru? Svou odpověď dokažte. Co rozumíme pojmem dimenze vektorového prostoru? Uveďte příklady množin generátorů a bází vektorových prostorů $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.</p>
3.	<p>I. Steinitzova věta. Vyslovte Steinitzovu větu o výměně. Vyjmenujte alespoň tři důsledky této věty. S pomocí Steinitzovy věty o výměně dokažte jednu z následujících dvou vět (Můžete je ilustrovat jednoduchými příklady.):</p> <p>a) „Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru $V \neq \vec{0}$ mají týž počet prvků.“ b) „Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ je množina generátorů vektorového prostoru V, pak $\dim V \leq m$.“</p> <p>II. Spojení a průnik podprostorů vektorového prostoru. Vysvětlete pojmy průnik, sjednocení a spojení podprostorů vektorového prostoru. Ilustrujte význam těchto pojmů příkladem z prostoru \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3. Vysvětlete rozdíl mezi sjednocením a spojením vektorových podprostorů. Jak určujeme dimenzi průniku dvou podprostorů?</p>
4.	<p>I. Podprostor vektorového prostoru. Definujte pojem podprostor vektorového prostoru. Uveďte všechny možné podprostory vektorových prostorů \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3. Jaký je „největší“ a „nejmenší“ podprostor daného vektorového prostoru V? Jaká je nutná podmínka existence vektorového (pod)prostoru? Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny podprostory v \mathbb{R}^3. Svě tvrzení zdůvodněte.</p> <p>a) $W_1 = \{(r, 3r, 5r); r \in \mathbb{R}\}$, b) $W_2 = \{(2s - t, s + t, s - 2t); s, t \in \mathbb{R}\}$, c) $W = \{(r + 1, 3r, 5r); r \in \mathbb{R}\}$.</p> <p>II. Homomorfismus. Definujte pojem homomorfismus (lineární zobrazení). Uveďte několik příkladů. Uveďte možnosti zadání homomorfismu a tyto možnosti ilustrujte příkladem. Vysvětlete pojmy jádro a obraz homomorfismu. Vzhledem k jakým prostorům jsou jádro a obraz homomorfismu podprostory? Jak určujeme jejich dimenzi? Kdy místo názvu homomorfismus používáme označení monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus? Uveďte příklad navzájem izomorfních vektorových prostorů.</p>

5.	<p>I. Skalární součin. Vyslovte definici skalárního součinu. Uveďte několik příkladů skalárního součinu. Na příkladu libovolného skalárního součinu vysvětlíte jednotlivé vlastnosti z definice této operace. Jak je definována norma vektoru? Jak vypočítáme odchylku dvou vektorů? Co platí pro skalární součin vektorů zadaných souřadnicemi vzhledem k nějaké ortonormální bázi? Jaké jsou další výhody ortonormální báze?</p> <p>II. Ortogonální vektory. Co rozumíme pojmem ortonormální báze? K čemu používáme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces? Tuto metodu objasněte při řešení této úlohy: „Určete ortonormální bázi podprostoru $W = [(1,2,-1), (0,1,1)]$.“</p>
6.	<p>I. Afinní bodový prostor. Uveďte příklady afinních bodových prostorů. Jak definujeme tento pojem? Jaký je rozdíl mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem. Vysvětlíte pojem afinní soustava souřadnic. Jak přejdeme od souřadnic vektoru k souřadnicím bodu? Vysvětlíte rozdíl mezi A_3 a V_3. Které z následujících dvou tvrzení je pravdivé: a) „Vektorový prostor V_n je zároveň i afinním bodovým prostorem.“ b) „Afinní bodový prostor A_n je zároveň i vektorovým prostorem.“</p> <p>II. Afinní bodový podprostor. Definujte pojem afinní bodový podprostor. Jaký je jeho vztah k vektorovému podprostoru? Uveďte některé speciální bodové podprostory. Jaké podprostory existují v A_2 a A_3? Jak můžeme tyto podprostory zadat? Ilustrujte na příkladech.</p>
7.	<p>I. Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů. Druhy zápisů afinních podprostorů a přechody mezi nimi (parametricky, neparаметricky). Ilustrujte pomocí rovin a přímků v prostoru A_3. Jaké mohou být vzájemné polohy afinních podprostorů a jak tyto polohy určíme. Jak poznáme, že dva rovnoběžné podprostory jsou incidentní?</p> <p>II. Určení afinního bodového podprostoru. Jak byste ukázali pravdivost tvrzení: „Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně $(k + 1)$ lineárně nezávislými body.“ Co to jsou lineárně nezávislé body? Vysvětlíte na příkladu roviny v A_3. Jak byste vysvětlili, že je určena 3 nezávislými body?</p>
8.	<p>I. Průnik a spojení bodových podprostorů. Průnik dvou afinních bodových podprostorů. Jak poznáme, že není prázdný (role vektoru $B-A$)? Spojení dvou afinních bodových podprostorů. Určení spojení dvou afinních podprostorů? Jaký je vztah mezi dimenzí s spojení zaměřených bodových podprostorů a dimenzí g spojení těchto podprostorů. Ilustrujte na příkladu přímkou a rovinou v prostoru A_3.</p> <p>II. Diskuse vzájemné polohy dvou bodových podprostorů. Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin. V prostoru jaké dimenze mohou být dvě roviny mimoběžné? Vysvětlíte, co rozumíme příčkou mimoběžných podprostorů.</p>
9.	<p>I. Neparаметrická rovnice nadroviny. Pojem neparаметrická rovnice nadroviny ilustруйте na příkladu roviny v A_3. Uveďte alespoň čtyři různé postupy jejího odvození i s jejich případnou geometrickou interpretací. Jak určíte její neparаметrickou rovnici, znáte-li i) tři body, ii) dva body a vektor ze zaměřených rovin, iii) bod a dva vektory ze zaměřených rovin?</p> <p>II. Vzdálenost podprostorů. Jak definujeme vzdálenost dvou bodů? Odvoďte vztah pro určení vzdálenosti bodu od roviny (nadroviny). Uveďte tento vztah do souvislosti s neparаметrickou rovnicí nadroviny (v E_2 a E_3). Jak určíme i) vzdálenost dvou mimoběžek v E_3 a ii) vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v E_3.</p>

<p>10.</p>	<p>I. Vektorový součin. Ortogonální doplněk n-1 vektorů. Definujte vektorový součin. Jaké jsou vlastnosti vektorového součinu? Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk n-1 vektorů? Na příkladu z A_3 ilustруйте použití vektorového součinu při výpočtu obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku.</p> <p>II. Ortogonální doplněk vektorového podprostoru. Co rozumíme pojmem ortogonální doplněk podprostoru? Jaká je dimenze ortogonálního doplňku podprostoru V_k ve vektorovém prostoru V_n? Ilustруйте na příkladu V_3. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy ortogonální doplněk podprostoru a ortogonální doplněk n-1 vektorů.</p>
<p>11.</p>	<p>I. Kolmost podprostorů. Jak určíme, zda je vektor kolmý k podprostoru? Vysvětlete pojmy „kolmé podprostory“ a „totálně kolmé podprostory“. Ilustруйте na příkladu podprostorů V_3. Jaká je nutná a postačující podmínka pro kolmost dvou podprostorů?</p> <p>II. Euklidovský bodový prostor. Kdy můžeme afinní bodový prostor nazvat Eukleidovským bodovým prostorem? Co rozumíme pojmem kartézská soustava souřadnic? Jak definujeme vzdálenost bodů? Uveďte několik vlastností vzdálenosti bodů. Jak počítáme vzdálenost bodů v kartézské soustavě souřadnic?</p>
<p>12.</p>	<p>I. Vnější součin. Objem simplexu. Vysvětlete geometrický význam vnějšího součinu v prostoru dimenze 3 a proveďte jeho odvození. Co rozumíme pojmem simplex? Jak vypočítáme jeho objem? Uveďte příklad simplexu v E_3. Vypočtete jeho objem. Jak můžeme využít vnější součin při výpočtu obsahu trojúhelníku.</p> <p>II. Odchylka podprostorů. Co rozumíme odchylkou přímky od roviny v E_3? Jak tuto odchylku spočítáme? Jak určíme kolmý průmět jednoho vektoru do směru jiného vektoru? Jak určíme odchylku dvou rovin E_3?</p>