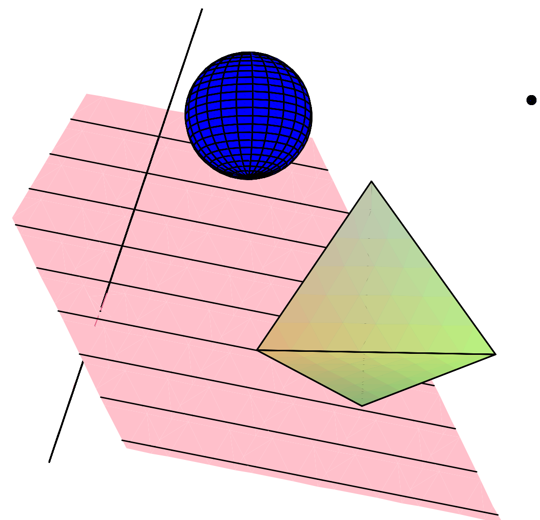
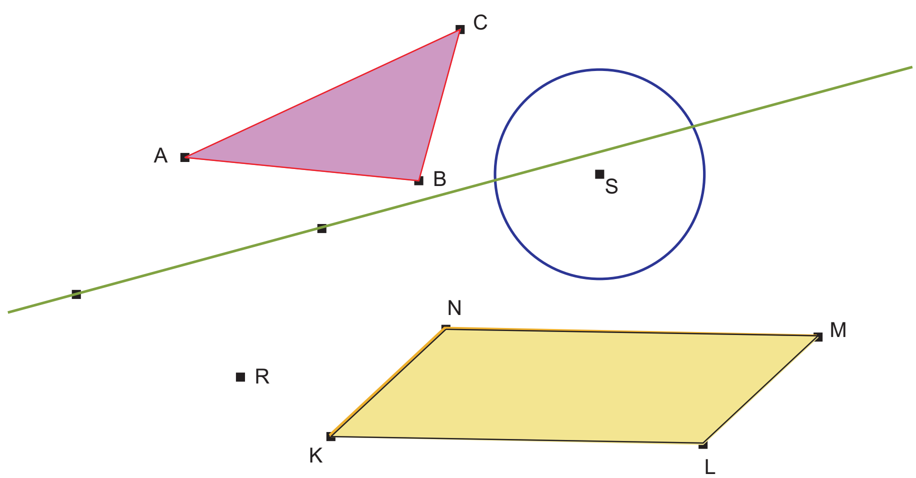
13 Afinní bodový prostor

Afinní bodový prostor je množina bodů. Jedná se o zobecnění nám dobře známých prostorů - dvourozměrného prostoru (tj. „roviny“), který známe z planimetrie a z analytické geometrie, a třírozměrného prostoru (stručně „prostoru“), který známe ze stereometrie a z analytické geometrie.



Obrázek 3: Trojrozměrný bodový prostor a jeho podmnožiny



Obrázek 4: Dvojrozměrný bodový prostor a jeho podmnožiny

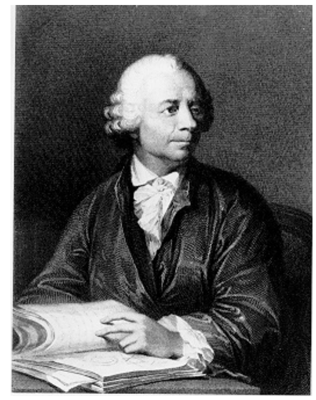
Zajímá nás:

- **popis** vybraných **podmnožin** (body, přímky, roviny, nadroviny ...) těchto prostorů,
- a **vztahy** (incidence, různoběžnost, rovnoběžnost, mimoběžnost, ...) mezi těmito podmnožinami.

V afinním bodovém prostoru **neumíme měřit vzdálenosti a úhly**. To budeme moci provádět až po jeho doplnění o skalární součin vektorů (potom hovoříme o Eukleidovském bodovém prostoru).

Význam pojmu **afinní**:

„Affinis“ znamená latinsky „příbuzný“.



Poprvé tento pojem použil *Leonhard EULER* (1707-1783, Švýcarsko) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*.
Afinní geometrií pak rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

13.1 Definice afinního bodového prostoru

Jsou **dvě cesty, jak definovat afinní bodový prostor** a popisovat jeho podmnožiny a vztahy mezi nimi:

1. **Axiomatická výstavba**

Příklad axiomu: „Dvěma body je určena jediná přímka“

Soustava axiomů euleidovské geometrie
- *Eukleides* (365 př. n. l. - 300 př. n. l., Řecko) - kniha „Základy“(Stoicheia),
- David Hilbert (1862 -– 1943, Německo)

2. **Využití vektorového prostoru**

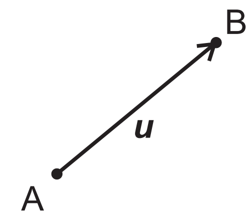
Skutečnost, že **každými dvěma body je určen vektor** nám umožňuje při definici afinního bodového prostoru využít axiomů definujících **vektorový prostor**.

Půjdeme touto druhou cestou.

Klíčovou roli v tomto postupu hraje **zobrazení**

$$g: \ A_n \times A_n \to V,$$

které každé dvojici bodů $A, B \in A_n$ **přiřadí vektor** $\vec{u}$ **z prostoru** V_n :



$$\vec{u} = g(A, B) \qquad \text{nebo} \qquad \vec{u} = B - A. \qquad (7)$$

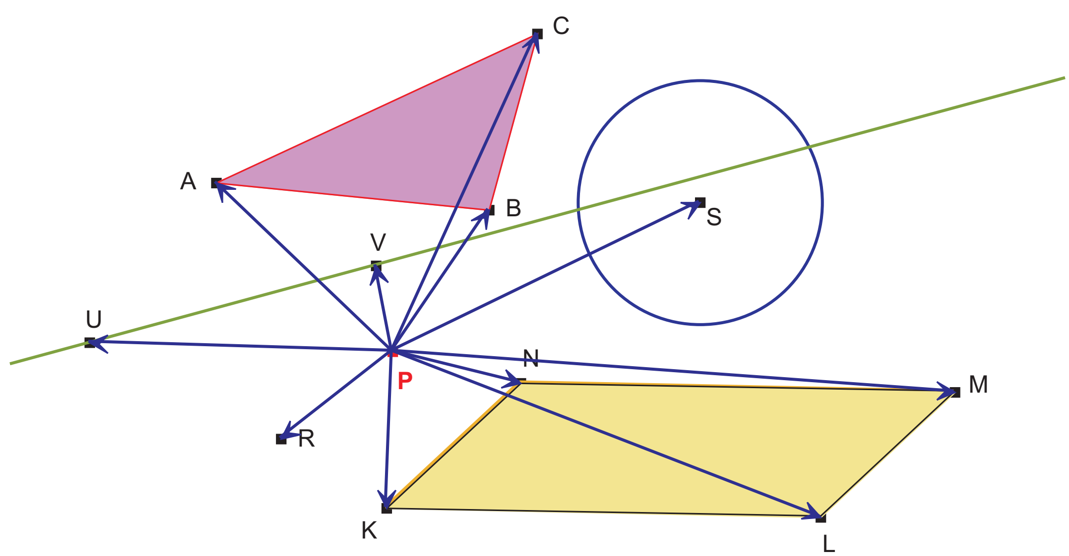
Problém

Různým dvojicím bodů může příslušet stejný vektor (volný vektor má nekonečně mnoho různých umístění).

Jak zařídíme, aby zobrazení bodového prostoru A_n na vektorový prostor V_n bylo **vzájemně jednoznačné**?

Řešení

Zavedeme v bodovém prostoru „pevný bod“

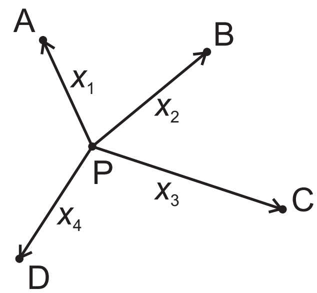


Obrázek 5: Určení polohy bodů v prostoru

Zvolíme-li pevný bod P, je možno každému bodu prostoru jednoznačně přiřadit vektor:

$$A \to \vec{x}_1 = A - P, \qquad B \to \vec{x}_2 = B - P, \qquad C \to \vec{x}_3 = C - P,$$

$$D \to \vec{x}_4 = D - P, \qquad P \to \vec{o} = P - P.$$



a naopak, každému vektoru příslušného vektorového prostoru je tím jednoznačně přiřazen bod:

$$\vec{x}_1 \to A = P + \vec{x}_1, \qquad \vec{x}_2 \to B = P + \vec{x}_2, \qquad \vec{x}_3 \to C = P + \vec{x}_3,$$

$$\vec{x}_4 \to D = P + \vec{x}_4, \qquad \vec{o} \to P = P + \vec{o}.$$

Zavedli jsme dvě nové operace

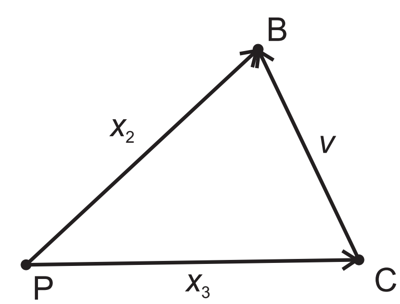
	Znaménko	*Popis*	*Výsledek*	*Příklad*
1)	„–“	„odčítání bodů“	**vektor**	$\vec{u} = B - A$
2)	„+“	„sčítání bodu a vektoru“	**bod**	$B = A + \vec{u}$

Víme, že pro vektory $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ a $\vec{v}$ na vedlejším obrázku platí vztah

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \vec{v},$$

který můžeme zapsat pomocí jejich umístění takto

$$B - P = (C - P) + (B - C). \tag{8}$$



Přitom na volbě umístění nezávisí.

Vlastnost (8) se dá zapsat pomocí zobrazení (7) takto:

$$g(A, B) = g(P, C) + g(C, B).$$

Budeme požadovat její platnost v každém afinním bodovém prostoru.

Definice 18 (Afinní bodový prostor)**.** *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení*

$$g: \; A_n \times A_n \to V$$

těchto vlastností:

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{t.j.} \qquad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru A_n.

(Pech:AGLÚ/str.14)

Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$ je afinní **bodový prostor dimenze 0**.

2. Sám **vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem**. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

Poznámka. Pozor Výše uvedený příklad 2 neplatí naopak. **Nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.**

PŘÍKLAD 13.1. *Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny P afinními bodovými prostory.*

a) $P = R^3, \; V_3 = R^3, \; g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$

b) $P = R^3, \; V_2 = R^2, \; g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2),$

c) $P = R^n, \; V_n = R^n, \; g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n),$

Poznámka (1)**.** Afinní bodový prostor A_n zapisujeme také takto:

$$A_n = (A, V_n, g),$$

kde A je množina bodů, V je zaměření vektorového prostoru a g je zobrazení $g: \ A_n \times A_n \to V$.

Poznámka (2)**.** Afinní bodový prostor A_n nazýváme plným jménem „afinní bodový prostor nad tělesem T," kde T je stejné jako pro zaměření V_n.

Věta 27 (Pravidla pro počítání s operacemi „+“ a „–“)**.** *Nechť A, B, C, D jsou libovolné body afinního prostoru A_n a $\vec{u}$, $\vec{v}$ libovolné vektory ze zaměření V_n. Potom:*

1. $A - A = \vec{o}$,
2. $A - B = -(B - A)$,
3. $(A + \vec{u}) - B = (A - B) + \vec{u}$,
4. $B - (A + \vec{u}) = (B - A) - \vec{u}$,
5. $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$,
6. $(A - B) + (C - D) = (A - D) + (C - B)$,
7. $A - B = D - C \Leftrightarrow A - D = B - C$,
8. $A + \vec{u} = B + \vec{v} \Leftrightarrow A - B = \vec{v} - \vec{u}$.

(Pech:AGLÚ/str.15 - Věta 2.1)

Poznámka. Nemají smysl výrazy: $A + B$, $\vec{u} - A$.

PŘÍKLAD 13.2. *Označme M množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ a W_A vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = o$. Dokažte, že* **množina M je afinním bodovým prostorem se zaměřením W_A.**