10 Eukleidovský bodový prostor

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.

10.1 Transformace lineární soustavy souřadnic

10.1.1 Transformace souřadnic ve vektorovém prostoru V_n

PŘÍKLAD 10.1. *Vektor $\vec{u}$ je dán souřadnicemi $\vec{u}_B = (u'_1, u'_2)$ vzhledem k bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Určete jeho souřadnice vzhledem k bázi $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.*

Řešení:

$$\vec{u} = u'_1\vec{b}_1 + u'_2\vec{b}_2 = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{bmatrix}$$

Matice přechodu of báze A k bázi B :

$$P(A, B) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Pokračujeme v řešení dosazením do (25):

$$\begin{aligned} u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 &= u'_1(p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2) + u'_2(p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2) \\ u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 &= (u'_1p_{11} + u'_2p_{21})\vec{a}_1 + (u'_1p_{12} + u'_2p_{22})\vec{a}_2 \end{aligned}$$

Porovnáním levé a pravé strany poslední rovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u'_1p_{11} + u'_2p_{21} \\ \vec{u}_2 &= u'_1p_{12} + u'_2p_{22} \end{aligned}$$

což můžeme zapsat maticovou rovností:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 & u'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

nebo ještě stručněji pomocí vektorů:

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B \cdot P(A,B). \tag{28}$$

PŘÍKLAD 10.2. *Vektor $\vec{u}$ má vzhledem k bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ vektorového prostoru V_3 souřadnice $\vec{u}_M = (2, 1, -3)$. Určete jeho souřadnice vzhledem k bázi $N = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, jestliže platí:*

$$\vec{u}_1 = 4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3, \quad \vec{u}_2 = -3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3, \quad \vec{u}_3 = -2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 11\vec{v}_3.$$

10.1.2 Transformace souřadnic v afinním bodovém prostoru A_n

PŘÍKLAD 10.3. *V afinní rovině jsou dány dva repéry $\mathcal{R} = \{P; \vec{u}, \vec{v}\}$, $\mathcal{R}' = \{P'; \vec{u}', \vec{v}'\}$. Nechť $P' = P + 2\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u}' = \vec{u} - 3\vec{v}$, $\vec{v}' = -\vec{u} + \vec{v}$. V lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathcal{R}$ jsou dány body $A = [-1, 3]$, $B = [2, 2]$, $C = [0, 0]$. V lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathcal{R}'$ jsou dány body $D' = [0, 3]$, $E' = [-1, -1]$, $F' = [1, 2]$. Určete souřadnice bodů A, B, C, (D', E', F') vzhledem k $\mathcal{R}'$ $(\mathcal{R})$.*

Řešení:

$$\mathcal{R} = \{P; \vec{u}, \vec{v}\}, \quad \text{báze zaměření je potom : } \quad Q = \{\vec{u}, \vec{v}\}$$
$$\mathcal{R}' = \{P'; \vec{u}', \vec{v}'\}, \quad \text{báze zaměření je potom : } \quad Q' = \{\vec{u}', \vec{v}'\}$$

Potom:

$$X = X' \cdot P(Q, Q') + P' \tag{29}$$

$$X' = X \cdot P^{-1}(Q, Q') - P' \cdot P^{-1}(Q, Q') \tag{30}$$

Poznámky.

1. $P^{-1}(Q, Q') = P(Q', Q)$

2. Matice přechodu mezi dvěma bázemi je vždy **regulární**. Dokažte to.

PŘÍKLAD 10.4. *Najděte matici přechodu od báze M k bázi N a naopak, od N k M, jestliže: $M = \{(1, 1), (0, 2)\}$, $N = \{(2, 1), (1, 2)\}$.*

Řešení:

$$N = P(M, N) \cdot M \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P(M, N) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10.2 Ortogonální matice

PŘÍKLAD 10.5. *Matice otočení kolem počátku soustavy souřadné o úhel α.*

Řešení:

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Jestliže matici R zapíšeme obecně ve tvaru $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$, potom pro její prvky platí tyto vztahy:

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 = r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1,$$
$$r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} = 0.$$

Definice 27 (Ortogonální matice)**.** *Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici A, pro kterou platí:*

$$A \cdot A^T = I.$$

Poznámka. Po ortogonální matici A zřejmě platí

$$A^T = A^{-1}.$$

Ortogonální matice řádu 2 :

Matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ je ortogonální, právě když platí:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad \text{a zároveň} \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$$

Ortogonální matice řádu n :

Matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ je ortogonální, právě když platí:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \quad \text{a zároveň} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0; (i \neq k).$$

Shrnutí:

V **ortogonální matici** je skalární součin dvou **různých** řádků roven **nule**, skalární součin **stejných** řádků je roven **jedné**. Symbolicky zapsáno:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \delta_i^k.$$

10.2.1 Determinant ortogonální matice

Protože je A čtvercová matice, platí:

$$A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A)^2 = \det(I) = 1$$

tj.

$$|\det(A)| = 1$$
$$\det(A) = \pm 1$$

Úkol: Ukažte, že obrácené tvrzení neplatí, tj. pokud je $\det(A) = \pm 1$, **nemusí** být matice A ortogonální.

10.2.2 Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi

PŘÍKLAD 10.6. *Určete matici přechodu od báze* $A = \{(1,0),(0,1)\}$ *k bázi* $B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$.

Věta 58. *Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 nebo -1.*

(Pech:AGLÚ/str.99 - V.4.1)

Další vlastnosti ortogonálních matic (o.m.):

1. Součin dvou o.m. je opět o.m.
2. Inverzní matice k o.m. je opět o.m.

PŘÍKLAD 10.7. *Dokažte, že matice přechodu mezi dvěma bázemi je vždy regulární.*