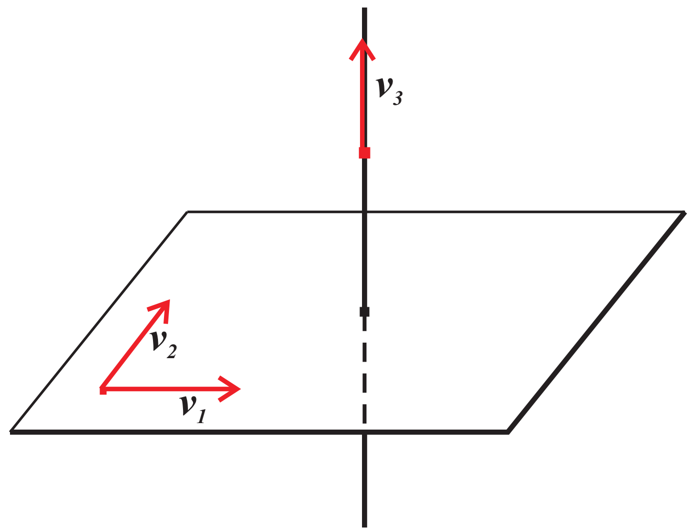
10.3 Kolmost podprostorů

10.3.1 Ortogonální doplněk vektorového prostou

Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou kolmé na všechny vektory v té rovině) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.



Obrázek 4: $V_1 = [\{\vec{v}_3\}], V_2 = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}], \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1, \vec{v}_2; \quad V_1 = V_2^\perp$ a zároveň $V_2 = V_1^\perp$

Definice 28 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru)**.**

$$V_k \subseteq\subseteq V_n; \quad V_k \to V_k^\perp$$

(Pech:AGLÚ/str.101 - D.5.1)

Věta 59 (Dimenze ortogonálního doplňku)**.** *Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n. potom ortogonální doplněk $V_k^\perp$ vektorového podprostoru V_k je vektorový prostor dimenze $n - k$.*

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Definice 29 (Kolmost vektoru k podprostoru)**.**

$$\vec{b} \perp V_k$$

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Věta 60 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru)**.** *Vektor $\vec{b} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\}$.*

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Definice 30 (Kolmost podprostorů).

$$V_r \perp V_s$$

(Pech:AGLÚ/str.102 - V.5.1)

Poznámka. Rozlišujeme:

- prostory **kolmé**: $V_r \perp V_s$
- prostory **totálně kolmé**: $V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$

Prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé. Tvrzení opačné však obecně neplatí. Prostory kolmé nemusí být zároveň totálně kolmé. Uveďte příklad.

PŘÍKLAD 10.8. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory* $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$

Řešení: Dle definice 30:
1) existuje $\vec{x} \in V_2$ kolmý k V_3, $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, tj.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_1 = 0 \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_2 = 0 \\
\vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1\vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2\vec{b}_3 = 0
\end{aligned}$$

2) existuje $\vec{y} \in V_3$ kolmý k V_2, $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$, tj.

$$\begin{aligned}
\vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1\vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2\vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3\vec{a}_1 = 0 \\
\vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1\vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2\vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3\vec{a}_2 = 0
\end{aligned}$$

Aby měly obě uvedené soustavy nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & \vec{a}_1\vec{b}_3 \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & \vec{a}_2\vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{31}$$

menší než 2. Obecně bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů.

Definice 31 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů).

$$V_r \perp V_s \quad \Leftrightarrow \quad h(G) < \min(r, s); \quad G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_1\vec{b}_s \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_2\vec{b}_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a}_r\vec{b}_1 & \vec{a}_r\vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_r\vec{b}_s \end{bmatrix}$$

(Pech:AGLÚ/str.103 - V.5.3)

10.4 Orientace vektorového prostoru

PŘÍKLAD 10.9. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi vektorového prostoru V_2.*

a) $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

Podle znaménka determinantu matice přechodu mezi dvěma bázemi určujeme, zda jsou souhlasné (+), nebo nesouhlasné (-).

Definice 32 (Orientovaný vektorový prostor)**.**

(Pech:AGLÚ/str.105 - D.6.1)

Poznámka. V prostoru dimenze 3 rozlišujeme pravotočivé a levotočivé báze. Konstrukci pravotočivé báze užitím pravidla pravé ruky známe z fyziky.