11 Vzdálenost podprostorů

11.1 Vzdálenost bodů

Eukleidovský bodový prostor E_n = afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**. **(Pech:AGLÚ/str.126)**

Definováním skalárního součinu je umožněno měření vzdáleností bodů prostoru. Můžeme proto též říci, že **eukleidovský bodový prostor = afinní bodový prostor + vzdálenost bodů**.

Definice 35 (Vzdálenost bodů)**.** *Vzdálenost dvou bodů* $A, B \in E_n$ *je rovna normě vektoru* $B - A$*, tj.:*

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{(B - A)^2}.$$

(Pech:AGLÚ/str.126 - D.10.2)

Věta 63 (Vlastnosti vzdálenosti bodů)**.** *Pro* $A, B, C \in E_n$:

1) $|AB| = |BA|$,

2) $|AB| \geq 0$, $|AB| = 0$ *právě když* $A = B$,

3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ *(Trojúhelníková nerovnost)*

(Pech:AGLÚ/str.126 - V.10.1)

Definice 36 (Kartézská soustava souřadnic)**.**

$$\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\},$$

kde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ *je ortonormální báze.*

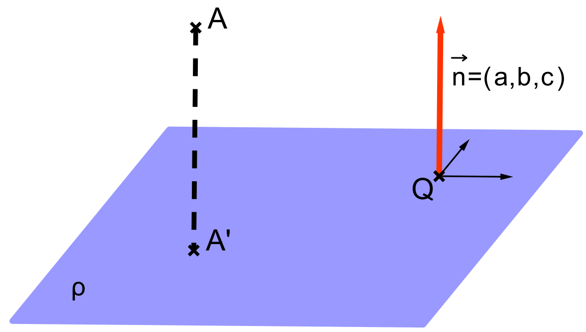
(Pech:AGLÚ/str.127 - D.10.3)

Výhoda ortonormální báze: Pro $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ je

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}.$$

11.2 Vzdálenost bodu od nadroviny

PŘÍKLAD 11.1. *Určete vzdálenost bodu* $A = [3, 6, 1]$ *od roviny* $x + 10y + 7z - 78 = 0$.



Vzdálenost $|A\rho|$ bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do roviny ρ, tj.

$$|A\rho| = |AA'|.$$

Pro vzdálenost bodu A od roviny ρ, určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$, platí:

$$|A\rho| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{37}$$

Poznámka. Pravou stranu vztahu (37) pro $|A\rho|$ můžeme interpretovat jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - Q$ do směru vektoru $\vec{n}$.

Stejný vztah jako (37) platí i pro vzdálenost bodu od nadroviny E_{n-1} :

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{38}$$

(Pech:AGLÚ/str.140 - V.15.1)

11.3 Rovnice nadroviny E_{n-1}

PŘÍKLAD 11.2. *Napište rovnici roviny, která je určená body* $A = [1, -2, 3]$, $B = [-4, 5, 6]$, $C = [7, 8, -9]$.

Neparametrickou rovnici nadroviny v prostoru E_{n-1} můžeme zapsat takto:

$$(x - Q) \cdot \vec{n} = 0, \tag{39}$$

kde Q je bod nadroviny, $\vec{n}$ je vektor kolmý na nadrovinu ($\vec{n} \in V_{n-1}^{\perp}$) a $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ je obecný bod nadroviny. **(Pech:AGLÚ/str.139)**

11.4 Vzdálenost bodu od podprostoru

Věta 64 (Vzdálenost bodu od podprostoru).

(Pech:AGLÚ/str.142 - V.15.2)

Závěr: Vzdálenost bodu A od podprostoru E_k je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do tohoto podprostoru.

PŘÍKLAD 11.3. *V eukleidovském prostoru E_4 je dán bod $B = [7, 6, 11, 0]$ a rovina $\omega : X = M + k\vec{u} + l\vec{v}$, kde $M = [1, 1, 1, 1]$, $\vec{u} = (3, 2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 0)$. Napište vektorovou rovnici kolmice spuštěné z bodu B na rovinu ω a určete její průsečík B' s rovinou ω. Určete vzdálenost bodu B od roviny ω.*

PŘÍKLAD 11.4. *V eukleidovském prostoru E_3 určete vzdálenost bodu $A = [7, 9, 7]$ od přímky $p : x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t; t \in R$.*

Poznámka. Příklad 11.4 buď řešíme stejně jako 11.3, nebo můžeme použít následující vzorec.

Výpočet vzdálenosti bodu od přímky v prostoru E_3:

Pro vzdálenost bodu A od přímky $p : X = Q + t\vec{u}; t \in R$ platí:

$$|Ap| = \frac{|(Q - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \tag{40}$$

ÚKOL: Odvoďte vztah (40).

11.5 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3

PŘÍKLAD 11.5. *Určete vzdálenost dvou mimoběžek p, q v E_3 :*
$p : X = A + t\vec{u}, A = [-2, -3, 2], \vec{u} = (4, 2, -1),$
$p : X = B + t\vec{v}, B = [1, 6, 2], \vec{v} = (0, 1, -1).$

Vzdálenost $v = |pq|$ dvou mimoběžek je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru (úsečky) $\overrightarrow{AB}$ do směru vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$|pq| = \frac{|(A - B) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \tag{41}$$

11.6 Vzdálenost dvou podprostorů

Věta 65 (Vzdálenost dvou podprostorů). *Nechť E_r, E_s jsou dva podprostory eukleidovského prostoru E_n, které nemají společný bod. Potom existují body $A' \in E_r$ a $A'' \in E_s$ takové, že přímka $A'A''$ je kolmá k oběma podprostorům. Vzdálenost podprostorů je rovna vzdálenosti bodů $A'A''$.*

(Pech:AGLÚ/str.144 - V.16.1)

PŘÍKLAD 11.6. *V eukleidovském prostoru E_4 určete vzdálenost rovin ω, ρ :*

$$\omega : X = [3, 5, -2, -3] + k(2, 0, -1, -1) + l(0, 4, -2, -3),$$

$$\rho : X = [1, 5, -6, 8] + k(2, 1, 2, 0) + l(0, -1, 1, 1).$$

11.7 Vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů

PŘÍKLAD 11.7. *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\rho : 2x+3y-6z+14 = 0$, $\sigma : 2x + 3y - 6z - 35 = 0$.*

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

Pro vzdálenost $|\rho\sigma|$ dvou rovnoběžných rovin ρ, σ, daných obecnými rovnicemi $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$, platí:

$$|\rho\sigma| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pokud je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, uvedený vztah se zjednoduší na pěkný tvar:

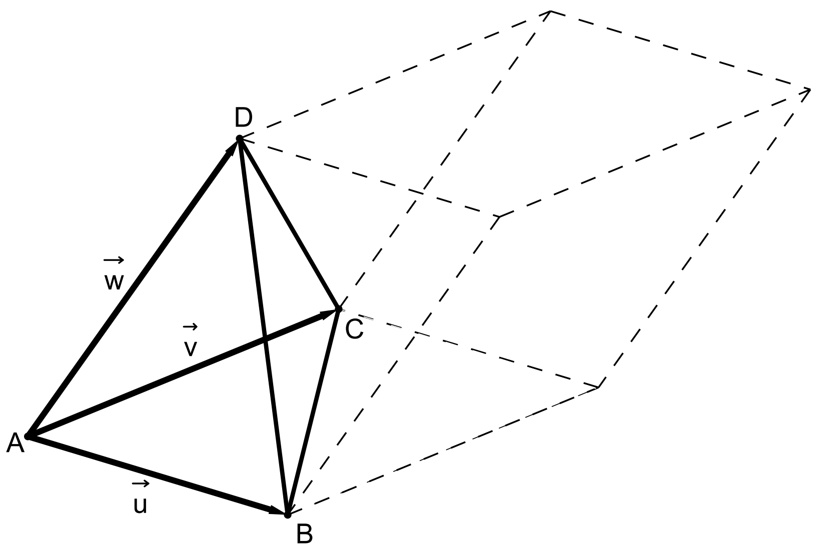
$$|\rho\sigma| = |d - e|.$$

Věta 66 (Vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů)**.** *Jsou-li E_r, E_s dva rovnoběžné podprostory v E_n, a platí-li $r \geq s$, pak je vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in E_s$ od podprostoru E_r.*

PŘÍKLAD 11.8. *Vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou od této roviny.*

12 Objem simplexu

PŘÍKLAD 12.1. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy* $A = [3, 4, 0]$, $B = [9, 5, -1]$, $C = [1, 7, 1]$, $D = [3, 2, 5]$.

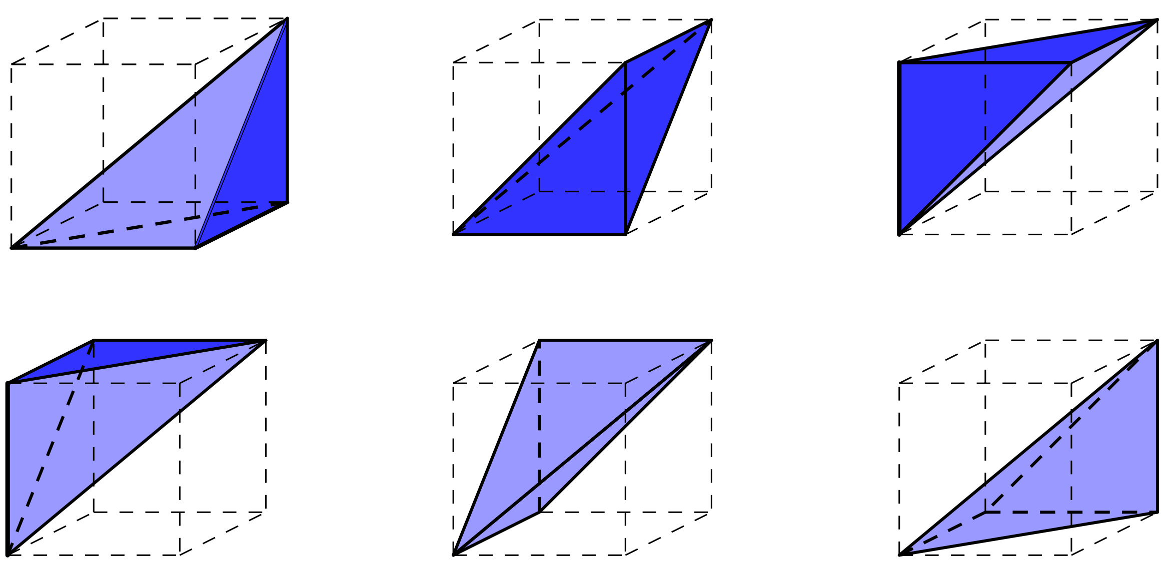


Umíme spočítat objem odpovídajícího rovnoběžnostěnu:

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = |[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Otázkou je, jak souvisí objem čtyřstěnu s objemem rovnoběžnostěnu? Odpověď souvisí s řešením následujícího problému.

PROBLÉM: Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů téhož objemu můžeme rozřezat krychli?

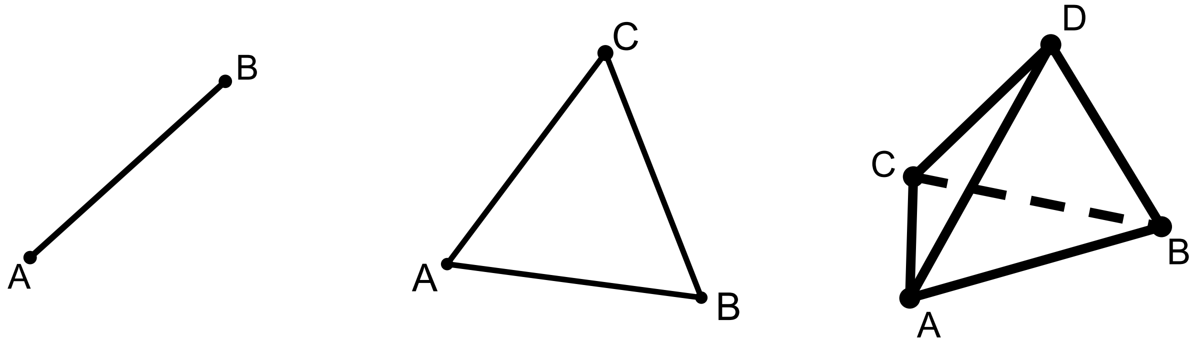


Objem čtyřstěnu $ABCD$:

$$V(A, B, C, D) = \frac{1}{6}|[B - A,\ C - A,\ D - A]|.$$

Simplex

„simplex" = lat. „jednoduchý"



Simplex = konvexní obal $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n. Přitom konvexním obalem množiny bodů rozumíme průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují.

(Pech:AGLÚ/str.128 - D.11.3)

Definice 37 (Objem simplexu)**.** *Objemem simplexu, který je určen $n+1$ body $A_1, A_2, ..., A_{n+1} \in E_n$, nazýváme číslo:*

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left| [A_1 - A_{n+1},\ \ ...,\ \ A_n - A_{n+1}] \right| .$$

(Pech:AGLÚ/str.129 - D.11.4)

Pro vyjádření objemu simplexu můžeme použít i tento vztah:

$$V(A_1, A_2, ..., A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{array} \right\| .$$

E_2 : **Obsah trojúhelníku** ABC

$$V(A,B,C) = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right\| .$$

Poznámka. Heronův vzorec.

E_3 : **Objem čtyřstěnu** $ABCD$

$$V(A,B,C,D) = \frac{1}{6} \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{array} \right\| .$$

Poznámka. Eulerova čtyřbodová relace.

(Pech:AGLÚ/str.135)