3.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 4. *Nechť* $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ *jsou prvky vektorového prostoru* V *nad tělesem* T. *Řekneme, že vektor* $\vec{u}$ *je* **lineární kombinací vektorů** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, *právě když existují prvky* $a_1, a_2, ..., a_n \in T$ *tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, ..., a_n$ *nazýváme* **koeficienty** *lineární kombinace.*
Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace **triviální**, *jinak se nazývá* **netriviální**.

PŘÍKLAD 3.4. *Ověřte, zda vektor* $\vec{u} = (4, -1, 3)$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

PŘÍKLAD 3.5. *Ověřte, zda vektor* $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

ÚKOL: Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.

3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

PŘÍKLAD 3.6. *Množina* $M = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ *je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru* R^3. *Rozhodněte, zda je některý z těchto vektorů lineární kombinací ostatních.*

Definice 5. *Vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ *z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *se nazývají:*
a) *vektory* **lineárně nezávislé**, *právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge ... \wedge a_n = 0).$$

b) *vektory* **lineárně závislé**, *právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka: Jak je to pro $n = 1$, tj. je jeden vektor lineárně závislý nebo nezávislý? Vektor $\vec{u}$ je **lineárně nezávislý**, právě když je $\vec{u} \neq \vec{o}$.

PŘÍKLAD 3.7. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:*
a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{v}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (4, -1, 3)$.
b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{u}_2 = (-2, 1, 1),\ \vec{u}_2 = (-1, 1, 0)$.

Věta 4 (Alternativní definice lineární závislosti)**.** *Vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$, *kde* $k > 1$, *z vektorového prostoru* V *nad* T *jsou* **lineárně závislé** *právě tehdy, když* **aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních***.*

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že ve větě není vůbec specifikováno, zda se jedná o kombinaci **triviální** či **netriviální**.

Důsledek 1. *Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.*

Důsledek 2. *Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory* $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \ldots,\ \vec{u}_n$ *závislé.*

Věta 5. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *(*$k > 1$*) z vektorového prostoru* V *nad tělesem* T *lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.*

Důsledek 3. *Jsou-li vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *z vektorového prostoru* V *nad* T *lineárně závislé, jsou závislé i vektory* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, *kde* $\vec{u}_{k+1}$ *je libovolný vektor z* V.

3.3 Lineární obal množiny vektorů

ÚKOL: Uvažujte následující množinu vektorů M a pokuste se charakterizovat množinu všech jejich lineárních kombinací:
a) $M = \{(0, 0)\}$,
b) $M = \{(1, 2)\}$,
c) $M = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$,

Definice 6. *Nechť* $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ *je podmnožina vektorového prostoru* V *(tj. je to množina obsahující* k *vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny* M *rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$. *Lineární obal množiny* M *značíme* $[M]$ *a platí, že* $[M] \subseteq V$.

Poznámka: Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ značíme $[M]$ nebo také $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}]$.

PŘÍKLAD 3.8. *Uvažujme množinu* $M = \{(2, -3, 0), (1, 0, 3)\}$. *Potom lineárním obalem* $[M]$ *množiny* M *je množina všech vektorů* $\vec{v}$, *které se dají zapsat ve tvaru* $\vec{v} = a(2, -3, 0) + b(1, 0, 3)$, *kde* $a, b \in R$.

Definice 7. *Nechť* $[M] = V$, *kde* V *je vektorový prostor. Množina* M *se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru* V. *Říkáme, že množina* M *generuje vektorový prostor* V.

ÚKOL: Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory (Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů):

a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.

b) Aritmetický vektorový prostor R^2.

c) Aritmetický vektorový prostor R^1.

d) Aritmetický vektorový prostor R^3.

e) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R.

ÚKOL: Uvažujte množinu vektorů $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal. Ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah $[M]$ k aritmetickému vektorovému prostoru R^3?