Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost - Cvičení

Příklad 1: Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{b} = (1, 1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, -2, -6)$. Vypočítejte:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

b) $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$,

c) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

Příklad 2: Zjistěte, která dvojice čísel c_1, c_2 splňuje vztah

a) $c_1(-3, 4) + c_2(1, 2) = (0, 0)$;

b) $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{o}$, jestliže $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-6, 3)$, $\vec{o} = (0, 0)$.

Příklad 3: Zjistěte, při které hodnotě c je vektor $\vec{b} = (7, -2, c)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\vec{a}_3 = (1, -6, 1)$.

Příklad 4: Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 5, 5, 1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

Příklad 5: Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $q_1(x) = x + 1$, $q_2(x) = x - 1$, $q_3(x) = (x + 1)^2$, $q_4(x) = (x + 1)^3$, která je rovna polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$.

Příklad 6: Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $a_1(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $a_2(x) = 1 + x + 4x^2$, $a_3(x) = 1 + 7x^2$, která je rovna polynomu $b(x) = 3 - 2x + x^2$.

Příklad 7: Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.

a) $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (6, 3, 4)$, $\vec{c} = (5, -2, 3)$,

b) $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

c) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, 2, 0)$, $\vec{c} = (-5, -1, 9)$.

d) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$,

e) $\vec{a} = (3, -8, 1)$, $\vec{b} = (-6, 16, -2)$,

f) $\vec{a} = (3, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, 0, 3)$,

g) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (5, 4, 2)$,

h) $\vec{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 1, 1)$,

i) $\vec{a} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 0, 3)$, $\vec{d} = (1, 0, 3, 0)$.

Příklad 8: Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé i tyto vektory:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad 3\vec{u} + \vec{v}.$$

Příklad 9: Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou tyto vektory lineárně nezávislé:

$$2\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

Příklad 10: Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x.$$

Příklad 11: Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x,\ p_4(x) = x^2 - 1.$$

Příklad 12: Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) množiny funkcí:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x.$$

Příklad 13: Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$f_1(x) = x^2 - 3,\ f_2(x) = 2 - x,\ f_3(x) = (x - 1)^2.$$

Příklad 14: Rozhodněte, zda jsou dané funkce lineárně závislé či nezávislé:

a) $2 - x^2,\ 3x,\ x^2 + x - 2,$
b) $3x - 1,\ x(2x + 1),\ x(x - 1),$
c) $e^x,\ e^{x+1},$
d) $\sin x,\ \sin(x + 1),$
e) $e^x,\ e^{x+1},\ e^{x+2},$
f) $\sin x,\ \sin(x + 1),\ \sin(x + 2),$
g) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
h) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x},$

Příklad 15: Nechť vektory $\mathbf{u} = \cos^2 x$, $\mathbf{v} = \sin^2 x$ tvoří bázi vektorového prostoru V. Zjistěte, který z uvedených vektorů leží ve V:

a) $2,$
b) $\sin 2x,$
c) $0,$
d) $\cos 2x,$
e) $2 + 3x,$
f) $3 - 4\cos 2x.$