

5.1 Lineární kombinace vektorů

DEFINICE 4. *Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru V nad tělesem T . Řekneme, že vektor \vec{u} je **lineární kombinací vektorů** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, \dots, a_n \in T$ tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^n a_i\vec{v}_i.$$

*Prvky a_1, a_2, \dots, a_n nazýváme **koeficienty lineární kombinace**.*

*Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace **triviální**, jinak se nazývá **netriviální**.*

Příklad: Ověřte, zda vektor $\vec{u} = (4, -1, 3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

Příklad: Ověřte, zda vektor $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.

ÚKOL: Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.

5.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Příklad: Množina $M = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru R^3 . Rozhodněte, zda je některý z těchto vektorů lineární kombinací ostatních.

DEFINICE 5. *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ z vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývají:*

a) *vektory **lineárně nezávislé**, právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in T; \sum_{i=1}^n a_i\vec{u}_i = \vec{0} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \dots \wedge a_n = 0).$$

b) vektory **lineárně závislé**, právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in T; \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee \dots \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka: Jak je to pro $n = 1$, tj. je jeden vektor lineárně závislý nebo nezávislý? Vektor \vec{u} je **lineárně nezávislý**, právě když je $\vec{u} \neq \vec{o}$.

Příklad: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:

a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, 3)$.

b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, 1, 0)$.

Věta 1. Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$, kde $k > 1$, z vektorového prostoru V nad T jsou **lineárně závislé** právě tehdy, když **aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních**.

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že ve větě není vůbec specifikováno, zda se jedná o kombinaci **triviální** či **netriviální**.

Důsledek 1. Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.

Důsledek 2. Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ závislé.

Věta 2. Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ ($k > 1$) z vektorového prostoru V nad tělesem T lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.

Důsledek 3. Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ z vektorového prostoru V nad T lineárně závislé, jsou závislé i vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, kde \vec{u}_{k+1} je libovolný vektor z V .