5.3 Lineární obal množiny vektorů

ÚKOL: Uvažujte následující množinu vektorů M a pokuste se charakterizovat množinu všech jejich lineárních kombinací:
a) $M = \{(0,0)\}$,
b) $M = \{(1,2)\}$,
c) $M = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$,

DEFINICE 6. *Nechť $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ je podmnožina vektorového prostoru V (tj. je to množina obsahující k vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny M rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$. Lineární obal množiny M značíme $[M]$ a platí, že $[M] \subseteq V$.*

Poznámka: Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ značíme $[M]$ nebo také $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}]$.

Příklad: Uvažujme množinu $M = \{(2,-3,0),(1,0,3)\}$. Potom lineárním obalem $[M]$ množiny M je množina všech vektorů $\vec{v}$, které se dají zapsat ve tvaru $\vec{v} = a(2,-3,0) + b(1,0,3)$, kde $a, b \in R$.

DEFINICE 7. *Nechť $[M] = V$, kde V je vektorový prostor. Množina M se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru V. Říkáme, že množina M generuje vektorový prostor V.*

ÚKOL: Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory (Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů):

a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.

b) Aritmetický vektorový prostor R^2.

c) Aritmetický vektorový prostor R^1.

d) Aritmetický vektorový prostor R^3.

e) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.