5.5 Báze vektorového prostoru

DEFINICE 9. *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V, *právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. M *je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Věta 4. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Věta 5 (Alternativní definice lineární nezávislosti). *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je podmnožina vektorového prostoru V. Pak M je* **lineárně nezávislá** *právě tehdy, když žádný z vektorů množiny M není lineární kombinací ostatních vektorů M.*

5.6 Dimenze vektorového prostoru

DEFINICE 10. *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi**, *jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 6 (O existenci báze). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi**.

Důsledek 4. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

Příklad: Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.

a) $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$,

b) $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$.

6 Průnik, spojení a sjednocení podprostorů

OTÁZKA: Pokud jsou W_1 a W_2 podprostory vektorového prostoru V, jsou jeho podprostory také množiny $W_1 \cap W_2$ a $W_1 \cup W_2$?

Příklady:

1. $W_1 = \{[x,y] \in R^2;\ y = 2x\}$, $W_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y = -x\}$.

2. $W_1 = \{[x,y,z] \in R^3;\ y - z = 0\}$, $W_2 = \{[x,y,z] \in R^3;\ y + z = 0\}$.

3. $W_1 = \{[r,2r,3r]; r \in R\}$, $W_2 = \{[2s+t, s-t, 3s+t], s,t \in R\}$.

ÚKOL: U každé z množin W_1 a W_2 určete alespoň jeden její systém generátorů.

6.1 Spojení podprostorů

Platí:

$$W_1 \subseteq\subseteq V, W_2 \subseteq\subseteq V \qquad \Rightarrow \qquad W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq V,$$
$$W_1 \subseteq\subseteq V, W_2 \subseteq\subseteq V \qquad \not\Rightarrow \qquad W_1 \cup W_2 \subseteq\subseteq V!$$

DEFINICE 11. *Nechť W_i, $i \in I$ (I je tzv. indexová množina) jsou podprostory vektorového prostoru V. Podprostor*

$$W = \left[\bigcup_{i \in I} W_i\right]$$

(tj. lineární obal sjednocení podprostorů W_i) nazýváme **spojením podprostorů** W_i, $i \in I$ *a značíme*

$$\bigvee_{i \in I} W_i.$$

Poznámka: Uvažujme dva podprostory $W_1, W_2 \subseteq\subseteq V$. Jejich spojení potom zapíšeme takto:

$$W_1 \bigvee W_2.$$

Věta 7. *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak $W_1 \bigvee W_2$ je množina všech vektorů z V, které lze napsat ve tvaru $\vec{u}_1+\vec{u}_2$, kde $\vec{u}_1 \in W_1$, $\vec{u}_2 \in W_2$.*

Věta 8 (O dimenzi spojení a průniku.). *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V. Potom:*

$$\dim\left(W_1 \bigvee W_2\right) + \dim\left(W_1 \cap W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Poznámka: Uvedený vztah budeme používat hlavně v následujícím tvaru:

$$\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 \bigvee W_2\right).$$

Při zkoumání vzájemných poloh bodových podprostorů ho potom nahradíme stručnějším zápisem

$$h + k = p + s,$$

kde $h = \dim W_1$, $k = \dim W_2$, $p = \dim\left(W_1 \cap W_2\right)$ a $s = \dim\left(W_1 \bigvee W_2\right)$.

Příklad: Určete dimenzi podprostoru $W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq R^4$, jestliže $W_1 = [(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)]$, $W_2 = [(-3, 0, 2, 0)]$.

Věta 9 (O průniku podprostorů.). *Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů $\{W_i\}_{i\in I}$ vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V. Zapisujeme*

$$\bigcap_{i\in I} W_i \subseteq\subseteq V.$$