3.8 Průnik, spojení a sjednocení podprostorů

OTÁZKA: Pokud jsou W_1 a W_2 podprostory vektorového prostoru V, jsou jeho podprostory také množiny $W_1 \cap W_2$ a $W_1 \cup W_2$?

PŘÍKLAD 3.14. *Pro dané podprostory W_1, W_2 určete $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ a rozhodněte, zda se jedná o vektorové podprostory.*

1. $W_1 = \{[x, y] \in R^2;\; y = 2x\}$, $W_2 = \{[x, y] \in R^2;\; y = -x\}$.

2. $W_1 = \{[x, y, z] \in R^3;\; y - z = 0\}$, $W_2 = \{[x, y, z] \in R^3;\; y + z = 0\}$.

3. $W_1 = \{[r, 2r, 3r]; r \in R\}$, $W_2 = \{[2s + t, s - t, 3s + t], s, t \in R\}$.

PŘÍKLAD 3.15. *U každé z výše uvedených množin W_1 a W_2 určete alespoň jeden její systém generátorů.*

3.9 Spojení podprostorů

Platí:

$$\begin{aligned} W_1 \subseteq\subseteq V, W_2 \subseteq\subseteq V \quad &\Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq V, \\ W_1 \subseteq\subseteq V, W_2 \subseteq\subseteq V \quad &\not\Rightarrow \quad W_1 \cup W_2 \subseteq\subseteq V! \end{aligned}$$

Definice 12. *Nechť W_i, $i \in I$ (I je tzv. indexová množina) jsou podprostory vektorového prostoru V. Podprostor*

$$W = \left[\bigcup_{i \in I} W_i \right]$$

(tj. lineární obal sjednocení podprostorů W_i) nazýváme **spojením podprostorů** *W_i, $i \in I$ a značíme*

$$\bigvee_{i \in I} W_i.$$

Poznámka: Uvažujme dva podprostory $W_1, W_2 \subseteq\subseteq V$. Jejich spojení potom zapíšeme takto:

$$W_1 \bigvee W_2.$$

Věta 11. *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak $W_1 \bigvee W_2$ je množina všech vektorů z V, které lze napsat ve tvaru $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, kde $\vec{u}_1 \in W_1$, $\vec{u}_2 \in W_2$.*

Věta 12 (O dimenzi spojení a průniku.)**.** *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V. Potom:*

$$\dim (W_1 \bigvee W_2) + \dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Poznámka: Uvedený vztah budeme používat hlavně v následujícím tvaru:

$$\dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \bigvee W_2).$$

Při zkoumání vzájemných poloh bodových podprostorů ho potom nahradíme stručnějším zápisem

$$h + k = p + s,$$

kde $h = \dim W_1$, $k = \dim W_2$, $p = \dim (W_1 \cap W_2)$ a $s = \dim (W_1 \bigvee W_2)$.

PŘÍKLAD 3.16. *Určete dimenzi podprostoru $W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq R^4$, jestliže* $W_1 = [(1, 0, 2, -3), (3, 2, 1, -5), (-1, 2, 1, -2)]$, $W_2 = [(-3, 0, 2, 0)]$.

Věta 13 (O průniku podprostorů.)**.** *Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů $\{W_i\}_{i \in I}$ vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V. Zapisujeme*

$$\bigcap_{i \in I} W_i \subseteq\subseteq V.$$