

## Cvičení:

### Lineární zobrazení (Homomorfismus)

**Příklad 1:** Homomorfismus je dán předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-8x_1 - 13x_2 + 22x_3, -4x_1 + x_2 + 8x_3, -x_2 + 6x_3, 7x_2).$$

Určete: matici  $A$  zobrazení  $f$ ,  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\dim(\text{Ker } f)$ ,  $\dim(\text{Im } f)$  a rozhodněte, zda se jedná o mono-, epi- či izomorfismus.

**Příklad 2:** Pro homomorfismus  $h : R^3 \mapsto R^4$  platí:  $h(1, 1, 2) = (5, 7, 3, -1)$ ,  $h(1, 0, 1) = (2, 2, 2, 2)$ ,  $h(0, -1, 1) = (-1, -1, -1, -1)$ . Určete jeho předpis, jádro, obraz, dimenze jádra a obrazu a rozhodněte, zda je zobrazení prosté (injekce), na množinu (surjekce) či vzájemně jednoznačné (bijekce).

**Příklad 3:** U daného homomorfismu určete matici  $A$  zobrazení  $f$ ,  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\dim(\text{Ker } f)$ ,  $\dim(\text{Im } f)$  a rozhodněte, zda se jedná o mono-, epi- či izomorfismus:

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 - x_2 - 2x_3)$ ,

b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$ ,

c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, 2x_2 - x_3, 2x_1, x_1 - 4x_2 + 2x_3)$ ,

d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 - x_2 + x_3)$ ,

e)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (-8x_1 - 13x_2 + 22x_3, -4x_1 + x_2 + 8x_3, -x_2 + 6x_3, 7x_2)$ .

**Příklad 4:** U homomorfismu  $f : R^3 \rightarrow R^4$ , který je zadán body  $f((1, 1, 2)) = (3, 3, 6, 0)$ ,  $f((1, 0, 1)) = (2, 1, 3, 1)$  a  $f((-1, 1, 1)) = (0, 2, 2, -2)$  určete jádro, obraz a jejich dimenze. Potom rozhodněte, zda je homomorfismus  $f$  také epi-, mono- či izomorfismem. Nakonec určete  $f((3, 1, -2))$ .

**Příklad 5:** U homomorfismu  $f : R^3 \rightarrow R^4$ , který je zadán body  $f((1, 2, 0)) = (4, 4, 2, 2)$ ,  $f((1, 1, 1)) = (3, 6, 2, 0)$  a  $f((0, 1, 2)) = (1, 4, -3, -1)$ , určete jádro, obraz a jejich dimenze. Potom rozhodněte, zda je homomorfismus  $f$  také epi-, mono- či izomorfismem. Nakonec určete  $f((1, 1, -2))$ .