10 Skalární součin

Skalární součin dovoluje zavedení **metriky** v afinním bodovém prostoru, tj. umožňuje nám určovat vzdálenosti, odchylky, obsahy a objemy.

Příklad: Určete odchylku přímek p, q :

$p: \; x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = 1 + 2t; \; t \in R,$

$q: \; x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s; \; s \in R.$

Poznámka. Použili jsme tzv. **Eukleidovský skalární součin**. Pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \; \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je dán vztahem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Úkol: Pokuste se odhalit nějaké vlastnosti této operace.

DEFINICE 14 (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$ *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$ *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}),$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \; \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}] \, .$ *(POZITIVITA)*

Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru V. Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

(Pech:AGLÚ/str. 85 - D.1.1)

Poznámka. Skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bývá často zapisován ve tvaru $< \vec{u}, \vec{v} >$ nebo $[\vec{u}, \vec{v}]$.

10.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny. Za skalární součin považujeme každou operaci, která splňuje definici 14. Uveďme si zde několik příkladů:

1. **Eukleidovský skalární součin**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2$$

2. **Vážený skalární součin**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2,$$

obecně

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i,$$

kde c_i je **váha** součinu $i-$tých souřadnic.

3. Skalární součin bez jména

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 4u_2 v_2$$

4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $< a; b >$:

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

Příklad: Ověřte, že operace definovaná předpisem $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2$ je skutečně skalárním součinem.

10.2 Norma (velikost) vektoru

Ke každému skalárnímu součinu je následující definicí zavedena norma vektoru.

DEFINICE 15. *Normou (velikostí) vektoru $\vec{u} \in V$ rozumíme číslo*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

(Pech:AGLÚ/str. 88 - D.1.2)

Poznámky.

1. Používáme též označení $\|\vec{u}\|$.

2. Vektor s normou $|\vec{u}| = 1$ nazýváme **jednotkový vektor**.

3. Součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ zkracujeme na $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Potom je zřejmé, že platí

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2.$$

4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:

a) $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|$, (tzv. 1-norma)

b) $\|\vec{u}\|_{\text{inf}} = \max\{|u_1|, |u_2|, ..., |u_n|\}$,

c) $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$, Euklidovská norma (též 2-norma)

11 Důležité nerovnosti

Klíčovou roli při analýze vztahů v bodových (vektorových) prostorech hrají dvě nerovnosti:

1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost,

2) Trojúhelníková nerovnost.

Ukážeme, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

11.1 Cauchyova-Schwarzova nerovnost

Věta 22 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). *Pro jakýkoliv skalární součin platí:*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|,$$

pro všechny vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$. Rovnost nastává právě když jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}$ lineárně závislé (rovnoběžné). **(Pech:AGLÚ/str.90 - V.2.1)**

Důkaz. Uvažujme vektor $\vec{a} + k\vec{b}$. Platí

$$\|\vec{a} + k\vec{b}\|^2 \geq 0,$$

$$\|\vec{a}\|^2 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2\|\vec{b}\|^2 \geq 0.$$

Odtud plyne

$$4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 4\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \leq 0,$$
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2,$$
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

□

Poznámka.

1. Používáme různé zápisy C-S nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

2. Z C-S nerovnosti vyplývá, že pro každé dva vektory $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ existuje jediné reálné číslo $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ pro které platí vztah

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \cos\alpha.$$

Můžeme tak tuto nerovnost využít k definici úhlu mezi dvěma vektory. Pak je zřejmé, že velikost úhlu je, stejně jako délka, závislá na zvoleném skalárním součinu.

Příklad: Vypočítejte úhel mezi vektory $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3.$

Problém: Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, pro která platí:

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete maximální hodnotu e.

11.2 Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost je známa též pod označením „Minkowského věta“.

Věta 23 (Trojúhelníková nerovnost). *Pro normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí:*

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|,$$

pro všechny vektory $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$. Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ závislé (rovnoběžné).

(Pech:AGLÚ/str.91 - V.2.2)

Příklad: Dokažte následujícíc nerovnost:

$$|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V_n.$$

Problém: Zapište skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pouze užitím normy vektoru.
Nápověda: Uvědomte si, že platí tento vztah:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Řešení:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

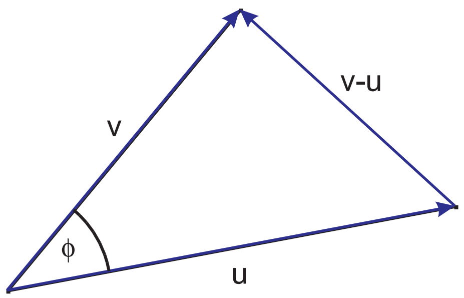
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

11.3 Odchylka vektorů

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

(Pech:AGLÚ/str. 92 - D.2.1)

11.4 Kosinová věta



$(\vec{v}-\vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}\vec{u} + \vec{u}^2$

$(\vec{v}-\vec{u})^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2, \quad \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2,\ \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$

$|\vec{v}-\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\varphi$

(Pech:AGLÚ/str. 92 - V.2.3)

11.5 Pythagorova věta

= kosinová věta pro $\varphi = 90°$, tj. $\cos\varphi = 0$:

$$|\vec{v}-\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2$$

12 Ortogonální a ortonormální vektory

Příklad: Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A = [2,3]$ kolmo na přímku $q:\ x = -5+7t, y = 4-t;\ t\in R$.

DEFINICE 16 (Ortogonální a ortonormální vektory).
Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in V_n$ jsou:
(i) ortogonální $\Leftrightarrow \vec{a}_i\cdot\vec{a}_j = 0$, *pro všechna* $i,j = 1,2,...,k;\ i\neq j$,
(ii) ortonormální $\Leftrightarrow$ *ortogonální* $+\ |\vec{a}_i| = 1$, *pro všechna* $i = 1,2,...,k$.

(Pech:AGLÚ/str.94 - D.3.1)

Poznámky.

1. Ortogonální vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme takto
$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Proto se kromě pojmu „ortogonální vektory" setkáme též s označením „kolmé vektory".

3. Pojmem **ortogonální vektory** označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 16. Tj. skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, když pro každé dva **různé** vektory z nich platí $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$.

4. **Ortonormální** jsou vektory, které jsou **ortogonální** a navíc všechny **jednotkové**, tj. platí:
$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j,$$
kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

12.1 Ortonormální báze

DEFINICE 17.

(Pech:AGLÚ/str.94 - D.3.2)

Příklad: Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:

a) $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$,

b) $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

c) $B_3 = \{(2,0,0),(0,-1,0),(0,0,4)\}$.

Věta 24. *Jsou-li nenulové vektory ortogonální, jsou lineárně nezávislé* **(Pech:AGLÚ/str.94 - V.3.1)**

VÝHODY ORTONORMÁLNÍ BÁZE

1. Skalární součin

Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ určeny souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi B, je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

2. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$. Vektor $\vec{u}$ můžeme tedy psát jako lineární kombinaci vektorů báze B :

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + ... + u_n\vec{b}_n.$$

Potom pro souřadnice (koeficienty této lineární kombinace) u_i vektoru $\vec{u}$ vzhledem k této bázi platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i.$$

Příklad: Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (1, 1, 1)$ vzhledem k ortonormální bázi $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$,

Věta 25 (Existence ortonormální báze). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.*

Věta 25 nám zaručuje existenci ortonormální báze v každém námi zkoumaném vektorovém prostoru. Otázkou je, jak tu bázi najít. Odpovědí se zabývá následující kapitola, ve které se skrývá i důkaz věty 25.

12.2 Gram - Schmidtův ortogonalizační proces

Příklad: Určete ortonormální bázi (pod)prostoru, který je generován vektory $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$.

Příklad: Určete ortonormální bázi vektorového prostoru se skalárním součinem: $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{u}_2 = (5, 8, -2, -3)$, $\vec{u}_3 = (3, 9, 3, 8)$.

Věta 26 (Gram - Schmidtův ortogonalizační proces).

(Pech:AGLÚ/str.95 - V.3.2)