9 Afinní bodový prostor

Afinní bodový prostor je zobecněním nám dobře známých bodových množin (prostorů) - dvourozměrného prostoru (tj. „roviny“), který známe z planimetrie a z analytické geometrie, a třírozměrného prostoru (stručně „prostoru“), který známe ze stereometrie a z analytické geometrie.

Zajímá nás:

- **popis** vybraných **podmnožin** (body, přímky, roviny, nadroviny, ...) těchto prostorů
- a **vztahy** (incidence, různoběžnost, rovnoběžnost, mimoběžnost, ...) mezi nimi.

V prostém afinním bodovém prostoru **neumíme měřit vzdálenosti a úhly**. To je umožněno až zavedením skalárního součinu v jeho zaměření. Potom hovoříme o *Eukleidovském bodovém prostoru.*

Poznámka. *Affinis* znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil *Leonhard Euler* (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení. Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

9.1 Definice afinního bodového prostoru

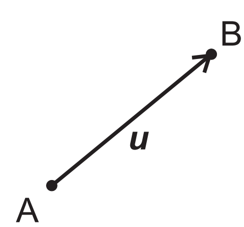
Skutečnost, že **každými dvěma body je určen vektor** nám umožňuje při definici afinního bodového prostoru využít axiomů definujících **vektorový prostor**.

Klíčovou roli v tomto postupu hraje **zobrazení**

$$g: \ A_n \times A_n \to V,$$

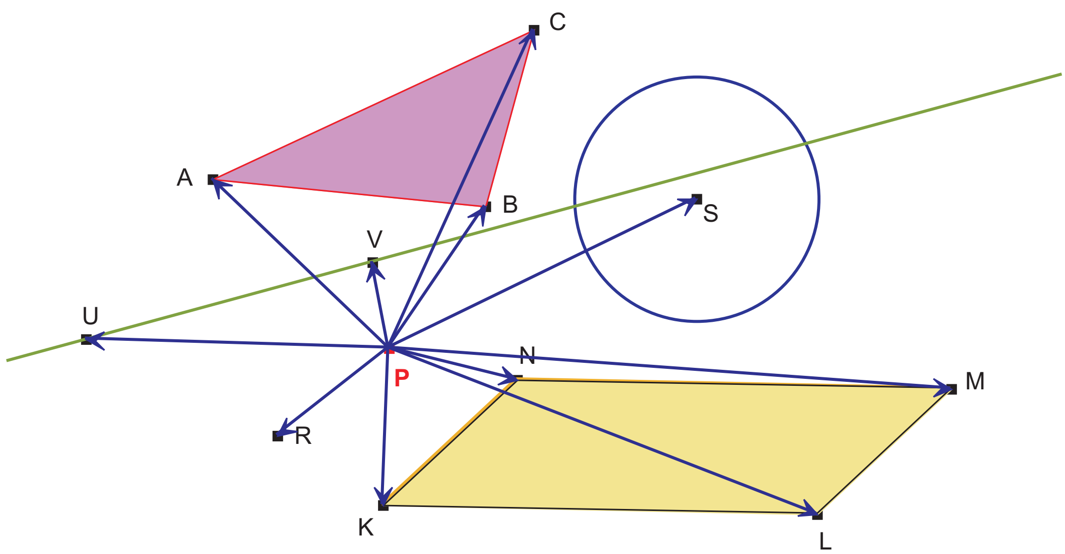
které každé dvojici bodů $A, B \in A_n$ **přiřadí vektor** $\vec{u}$ **z prostoru** V_n :

$$\vec{u} = g(A, B) \qquad \text{nebo} \qquad \vec{u} = B - A. \qquad (16)$$



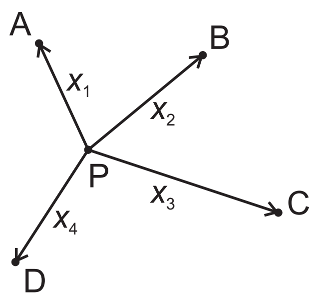
Problém: Různým dvojicím bodů může příslušet stejný vektor (volný vektor má nekonečně mnoho různých umístění). Jak zařídíme, aby zobrazení bodového prostoru A_n na vektorový prostor V_n bylo **vzájemně jednoznačné**?

Řešení: Zavedeme v bodovém prostoru „pevný bod"



Obrázek 3: Přiřazení vektorů bodům pomocí „pevného bodu "

Zvolíme-li pevný bod P, je možno každému bodu prostoru jednoznačně přiřadit vektor:



$$A \to \vec{x}_1 = A - P, \qquad B \to \vec{x}_2 = B - P, \qquad C \to \vec{x}_3 = C - P,$$
$$D \to \vec{x}_4 = D - P, \qquad P \to \vec{o} = P - P.$$

a naopak, každému vektoru příslušného vektorového prostoru je tím jednoznačně přiřazen bod:

$$\vec{x}_1 \to A = P + \vec{x}_1, \qquad \vec{x}_2 \to B = P + \vec{x}_2, \qquad \vec{x}_3 \to C = P + \vec{x}_3,$$
$$\vec{x}_4 \to D = P + \vec{x}_4, \qquad \vec{o} \to P = P + \vec{o}.$$

Zavedli jsme dvě nové operace:

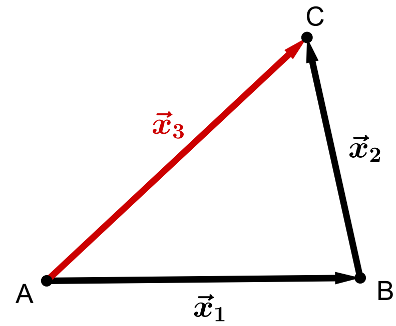
- **Odčítání bodů.** Výsledkem je vektor: $\vec{u} = B - A$.
- **Sčítání bodu a vektoru.** Výsledkem je bod: $B = A + \vec{u}$.

Víme, že pro vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ na obrázku vpravo platí vztah

$$\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,$$

který můžeme zapsat pomocí umístění (tj. orientovaných úseček) uvedených vektorů

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \tag{17}$$



nebo, pomocí rozdílů příslušných bodů

$$C - A = (B - A) + (C - B). \tag{18}$$

Vlastnost (17),(18) (tzv. Chaslesův vztah) se dá zapsat pomocí zobrazení (16) také takto:

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Požadujeme její platnost v každém afinním bodovém prostoru.

PŘÍKLAD 9.1. *Součet $\vec{x}_5 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4$ znázorněte pomocí vhodných umístění vektorů $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ a $\vec{x}_5$. Zapište Chaslesův vztah pomocí odpovídajících bodů.*

Definice 18 (Afinní bodový prostor)**.** *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$ těchto vlastností:*

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{t.j.} \qquad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru A_n.

(Pech:AGLÚ/str.14)

Příklady afinního bodového prostoru

1. Bod, tj. jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$ je afinní **bodový prostor dimenze 0**.

2. Přímka je afinním **bodovým prostorem dimenze 1** se zaměřením $V_1 = \{\vec{u}\}$, kde $\vec{u}$ je jejím směrovým vektorem.

3. Sám **vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem**. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

Poznámka. Pozor, výše uvedený příklad 2 neplatí naopak. **Nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.**

PŘÍKLAD 9.2. *Rozhodněte, zda jsou uvedené množiny P afinními bodovými prostory.*

a) $P = R^3,\ V_3 = R^3,\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$

b) $P = R^3,\ V_2 = R^2,\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2),$

c) $P = R^n,\ V_n = R^n,\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n),$

Poznámka (1)**.** Afinní bodový prostor A_n zapisujeme také takto:

$$A_n = (A, V_n, g),$$

kde A je množina bodů, V je zaměření vektorového prostoru a g je zobrazení $g : A_n \times A_n \to V$.

Poznámka (2)**.** Afinní bodový prostor A_n nazýváme plným jménem „afinní bodový prostor nad tělesem T," kde T odpovídá tělesu, nad nímž je definováno zaměření V_n.

Věta 30 (Pravidla pro počítání s operacemi „+" a „–")**.** *Nechť A, B, C, D jsou libovolné body afinního prostoru A_n a $\vec{u}$, $\vec{v}$ libovolné vektory ze zaměření V_n. Potom:*

1. $A - A = \vec{o},$
2. $A - B = -(B - A),$
3. $(A + \vec{u}) - B = (A - B) + \vec{u},$
4. $B - (A + \vec{u}) = (B - A) - \vec{u},$
5. $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}),$

6. $(A - B) + (C - D) = (A - D) + (C - B)$,

7. $A - B = D - C \Leftrightarrow A - D = B - C$,

8. $A + \vec{u} = B + \vec{v} \Leftrightarrow A - B = \vec{v} - \vec{u}$.

(Pech:AGLÚ/str.15 - Věta 2.1)

Poznámka. Výrazy $A + B$, $\vec{u} - A$ nemají smysl.

PŘÍKLAD 9.3. *Označme M množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ a W_A vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = o$. Dokažte, že* **množina M je afinním bodovým prostorem se zaměřením** W_A.

Cvičení:
Afinní bodový prostor

1. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$, kde $K = [1, 3]$, $L = [-1, 9]$, $M = [-2, -4]$, $N = [0, -10]$, je rovnoběžník.

2. V rovině $\mathbb{E}_2$ jsou dány body $K = [2, -2]$, $L = [-1, 0]$, $M = [0, 3]$. Určete bod $N \in \mathbb{E}_2$ tak, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl rovnoběžník.

3. Body $A = [-1, 2]$ a $B = [4, 0]$ jsou dva sousední vrcholy rovnoběžníku v $\mathbb{E}_2$, jehož střed je v bodě $S = [2, 2]$. Najděte souřadnice zbývajících dvou vrcholů.

4. Body $A = [1, 2]$ a $C = [3, 8]$ jsou protilehlé vrcholy čtverce $ABCD$. Určete souřadnice jeho zbývajících vrcholů B, D.

5. Zjistěte, zda body $A = [3, 5, 8]$, $B = [-7, -3, 10]$, $C = [8, 9, 9]$ leží na jedné přímce.

6. Dokažte, že body $A = [2, 1, 1]$, $B = [5, 5, 6]$, $C = [6, 11, 14]$, $D = [3, 7, 9]$ jsou vrcholy rovnoběžníka.

7. Určete vrcholy trojúhelníka, jsou-li dány středy $A' = [-2, 1]$, $B' = [3, -1]$, $C' = [1, 5]$ jeho stran.