1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa)**.** *Grupou* $(M, *)$ *rozumíme množinu* M *spolu s operací* $*$ *na* M*, která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\; x * y \in M,$
Operace $*$ *je neomezeně definovaná na* M*.*
(Množina M *je uzavřená vzhledem k operaci* $*$*.)*

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\; x * (y * z) = (x * y) * z,$
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\; x * e = e * x = x,$
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\; x * y = y * x = e.$
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ *navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.*

Příklady grup

1. $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,
2. $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

$\circ$	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ. Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedrální grupě, viz též grupy symetrií).

1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá těleso, právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$*, kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$*, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T *komutativní těleso.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

1.3 Vektorový prostor

Definice 3 (Vektorový prostor)**.** *Nechť* T *je komutativní těleso. Množinu* V *nazveme vektorovým prostorem nad tělesem* T*, právě když jsou na* V *definovány dvě operace:* (i) *sčítání: libovolné dvojici* $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ *je jednoznačně přiřazen prvek* $\vec{u} + \vec{v} \in V$, (ii) *násobení prvkem z tělesa* T *(skalárem): výsledkem násobení vektoru* $\vec{u} \in V$ *skalárem* $a \in T$ *je vektor* $a\vec{u} \in V$*, které splňují následující vlastnosti:*

a) *Struktura* $(V, +)$ *je komutativní grupa.*

b) *Distributivnost:* $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení:* $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Příklady vektorových prostorů

1. Množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel).

2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

1.4 Afinní bodový prostor

Definice 4 (Afinní bodový prostor)**.** *Neprázdnou množinu* A_n *(její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním*[1] *bodovým prostorem dimenze* n*, jestliže je dán vektorový prostor* V_n *dimenze* n *a zobrazení*

$$g: \ A_n \times A_n \to V_n$$

těchto vlastností: 1. Pro každý bod $A \in A_n$ *a pro každý vektor* $\vec{x} \in V_n$ *existuje jediný bod* $B \in A_n$ *tak, že*

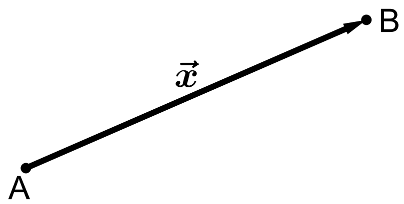
$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{t.j.} \qquad B = A + \vec{x}.$$

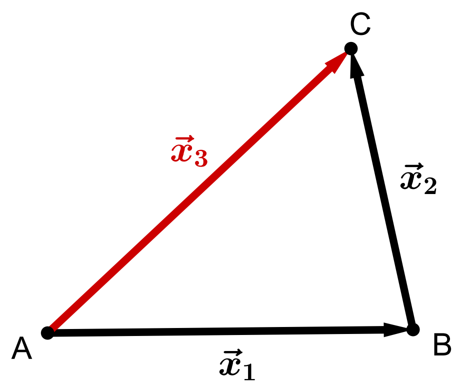
2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ *platí, že*

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

(Jedná se o tzv. Chaslesův vztah. Jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru[2]*.)*

Vektorový prostor V_n *nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru* A_n*.*





Příklady afinního bodového prostoru

1. *Jednoprvková množina se zaměřením* $V_0 = \{\vec{o}\}$ je afinní bodový prostor dimenze 0.

2. *Eukleidovský bodový prostor* E_n, jehož formy pro $n \leq 3$ nazýváme dle dimenze *bod* (značíme E_0), *přímka* (značíme E_1), *rovina* (E_2) a *trojrozměrný prostor* (E_3).

3. Samotný *vektorový prostor* V_n splňuje definici afinního bodového prostoru[2]. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

[1] *Affinis* znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil *Leonhard Euler* (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

[2] Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 15.

[2] Naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.

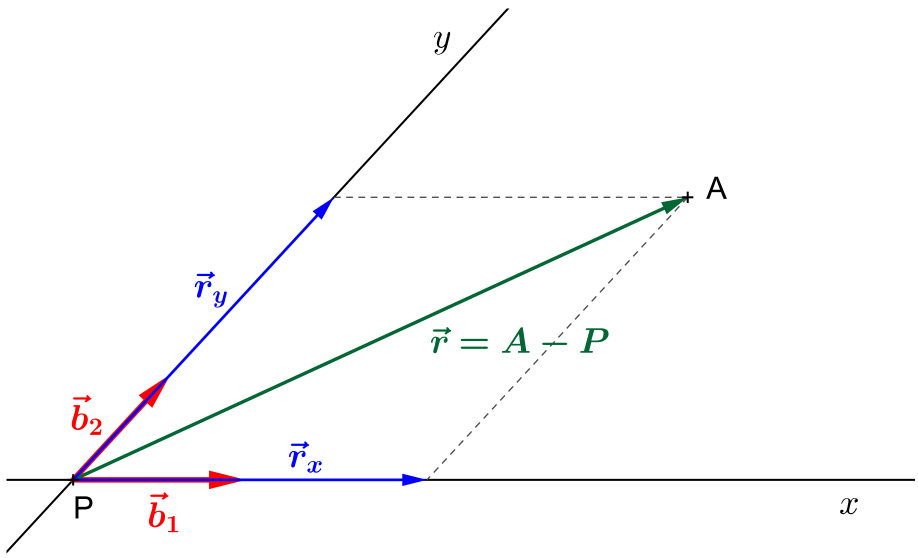
1.5 Afinní souřadnice bodů

Definice 5 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n.

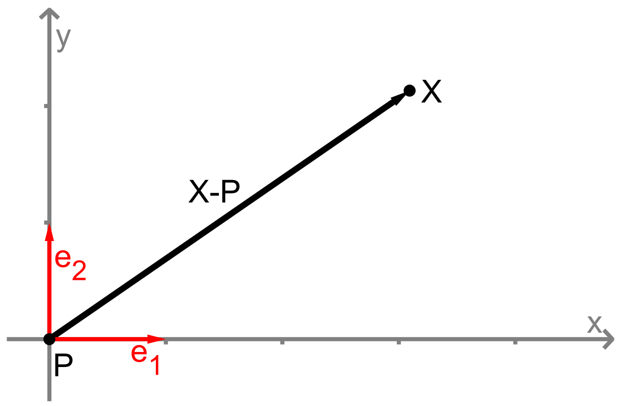
Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.



Obrázek 1: Afinní soustava souřadnic v rovině

Jak je naznačeno na Obr. 1, dosud zavedené pojmy nám dovolují přiřadit souřadnice bodu prostřednictvím jeho průvodiče. Konkrétně se jedná o bod A s průvodičem $\vec{r}$. Můžeme psát $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$. Jistě existují taková čísla $a_1, a_2 \in R$, pro která $\vec{r}_x = a_1 \cdot \vec{b}_1$ a $\vec{r}_y = a_2 \cdot \vec{b}_2$. Potom platí $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$. Vektor $\vec{r}$ má tak vzhledem k dané bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ souřadnice a_1, a_2. Bod $A = P + \vec{r}$ je potom při pevně daném bodě P a bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, tj. při daném repéru $\{P, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, rovněž jednoznačně určen dvojicí čísel a_1, a_2. Říkáme, že bod P má vzhledem k danému repéru souřadnice $[a_1, a_2]$, píšeme $P[a_1, a_2]$.

Definice 6 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic* $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, *kde* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ *je ortonormální báze.*



Obrázek 2: Kartézská soustava souřadnic v rovině

1.6 Eukleidovský bodový prostor

Definice 7 (Eukleidovský bodový prostor)**.** *Eukleidovským bodovým prostorem* E_n *rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován* **skalární součin**.

Definice 8 (Skalární součin)**.** *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů* $\vec{u}, \vec{v} \in V$ *přiřazuje reálné číslo (skalár)* $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ *tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \;\wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

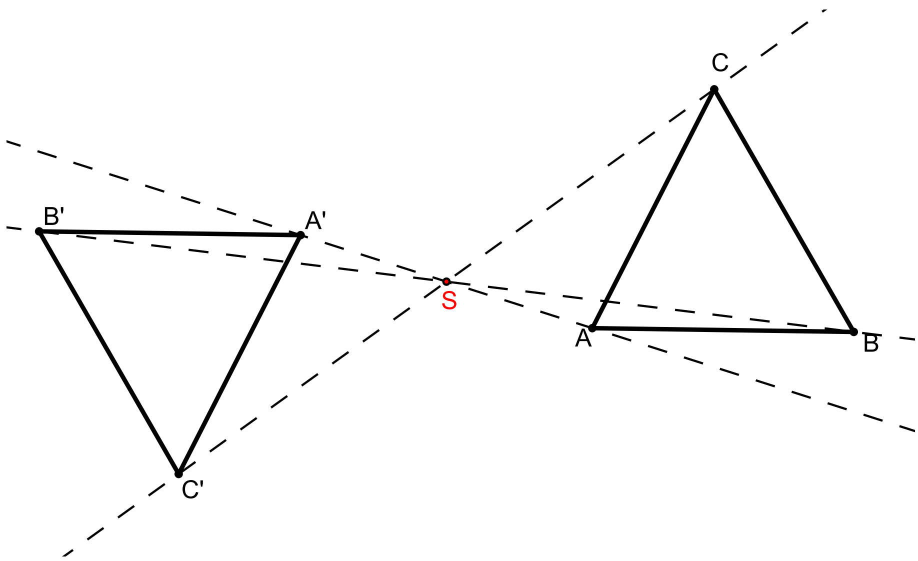
2 Geometrická zobrazení

Definice 9 (Geometrické zobrazení)**.** *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu X (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod $X' = f(X)$.*

Definice 10 (Vzájemně jednoznačné zobrazení)**.** *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různým bodům (vzorům) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

Příklady geometrických zobrazení

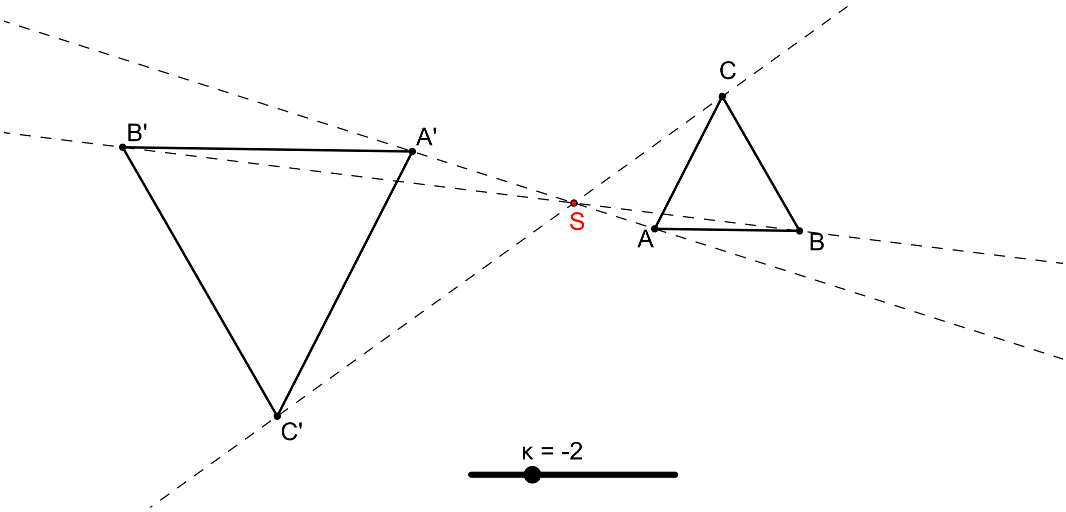
Středová souměrnost, viz Obr. 3[1]



Obrázek 3: Středová souměrnost se středem S

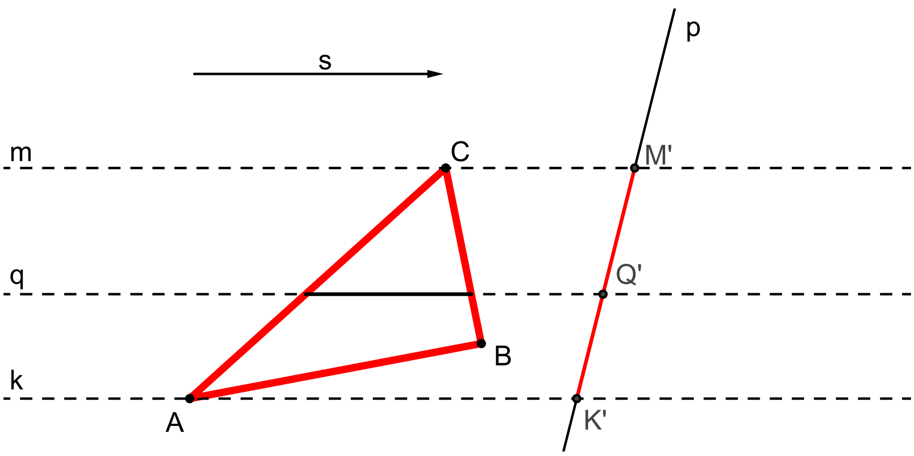
[1]Středová souměrnost je příkladem *vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení* (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnolehlost).

Stejnolehlost (daná středem S a koeficientem κ), viz Obr. 4



Obrázek 4: Stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\kappa = -2$

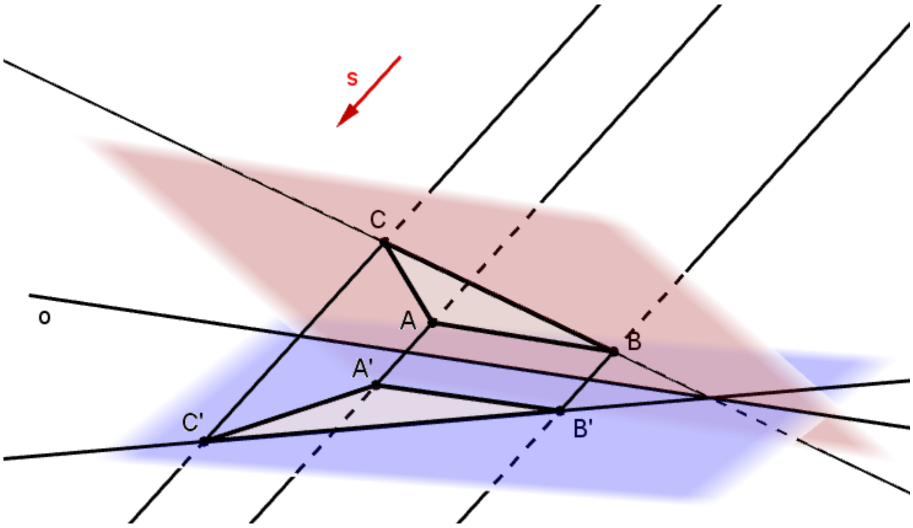
Rovnoběžné promítání do přímky (dané směrem $\vec{s}$ a přímkou p), viz Obr. 5[2]



Obrázek 5: Rovnoběžné promítání ve směru $\vec{s}$ z roviny do přímky p

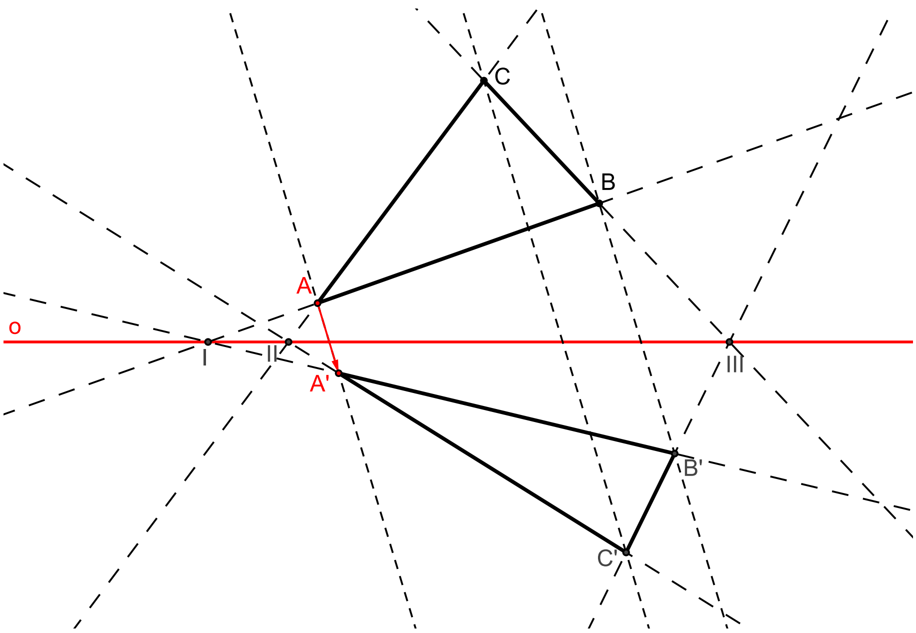
[2]Rovnoběžné promítání do přímky není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem $\vec{s}$ se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek k, m, q se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů K', M', Q'.

Rovnoběžné promítání se směrem $\vec{s}$ mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3, viz Obr. 6.



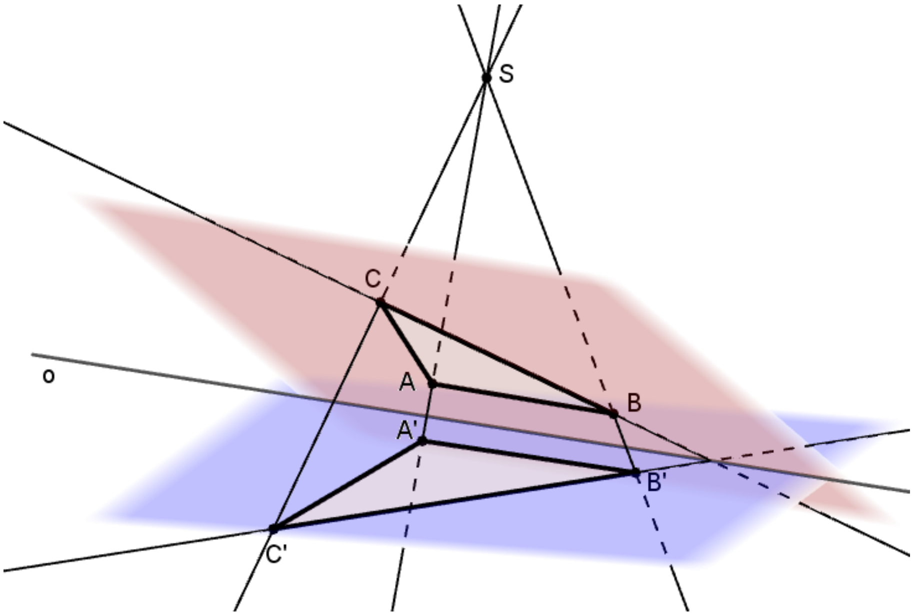
Obrázek 6: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinitě*)

Osová afinita (daná osou o a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 7



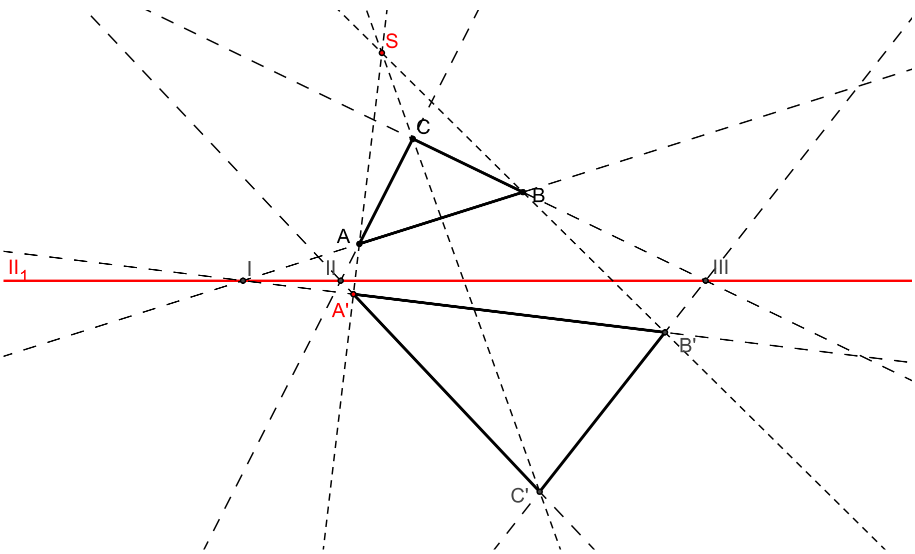
Obrázek 7: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

Středové promítání se středem S mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3, viz Obr. 8.



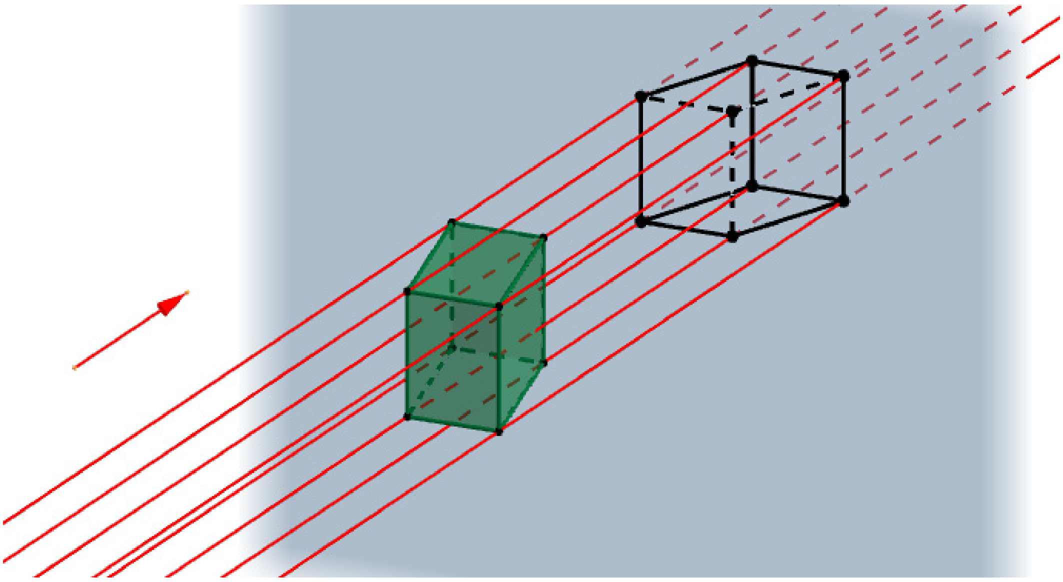
Obrázek 8: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *středové kolineaci*)

Středová kolineace (daná osou o, středem S a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 9



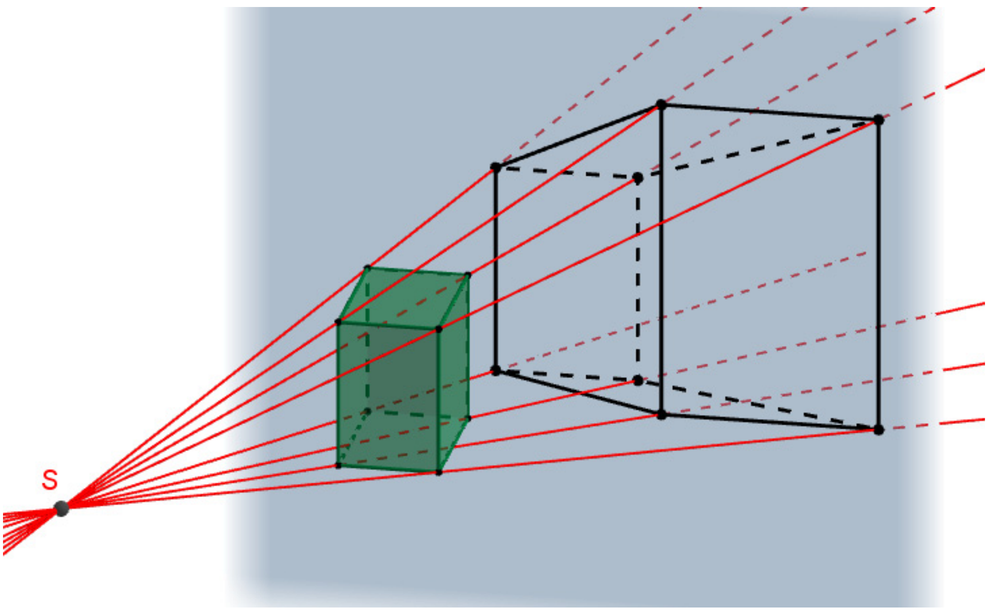
Obrázek 9: Středová kolineace daná středem S, osou o a dvojicí bodů A, A'

Rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané směrem $\vec{s}$), viz Obr. 10.



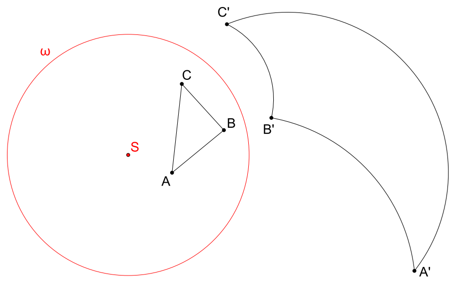
Obrázek 10: Rovnoběžné promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem S), viz Obr. 11



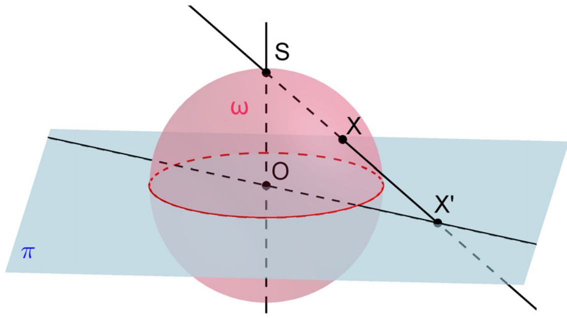
Obrázek 11: Středové promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Kruhová inverze (daná *určující kružnicí* $\omega = (S, r)$ a vztahem $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ mezi vzorem X a obrazem X'), viz Obr. 12

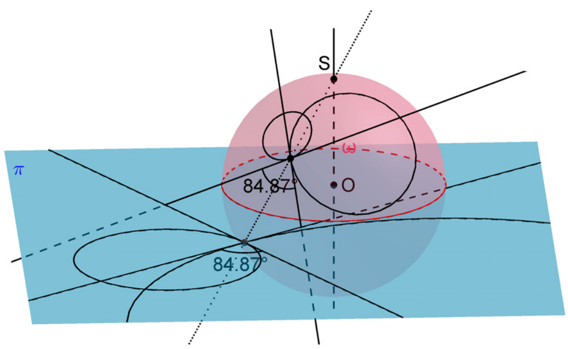


Obrázek 12: Kruhová inverze daná kružnicí ω

Stereografická projekce[3], viz Obr. 13



Obrázek 13: Stereografická projekce



Obrázek 14: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává (tzv. *konformní* zobrazení).

PŘÍKLAD 2.1. *Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.*

[3]Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S