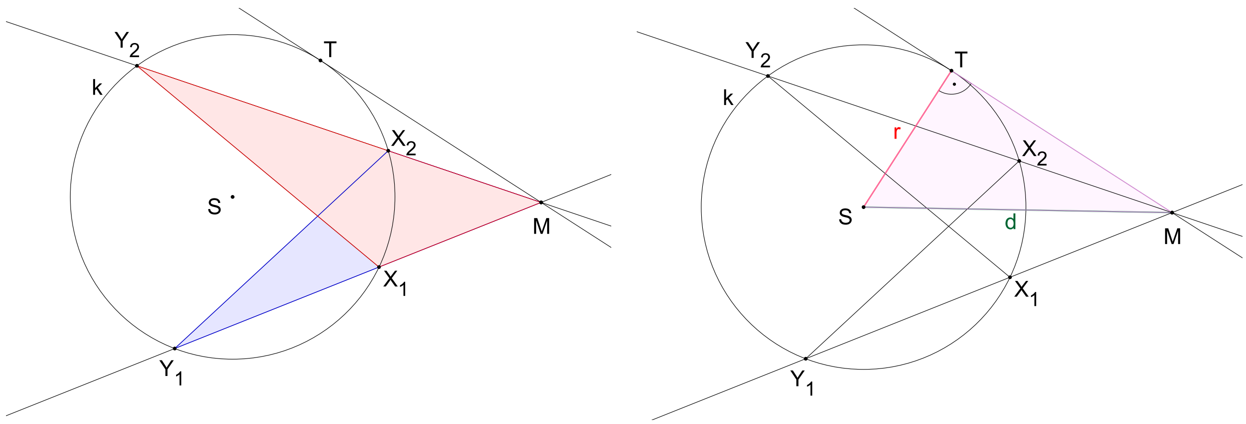
10 Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je reálné číslo, označme ho m, které je dáno polohou bodu vzhledem k příslušné kružnici; pro body vně kružnice je kladné, pro body uvnitř záporné a pro body na kružnici je rovno nule. Toto číslo je zajímavé a užitečné i tím, že jeho hodnota souvisí se vzdálenostmi předmětného bodu od průsečíků libovolné sečny z něj vedené s příslušnou kružnicí. Souvislosti, které přináší mocnost do vztahů kružnic a bodů, se využívají při řešení rozličných geometrických problémů.



Obrázek 115: $|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2| = |MT|^2 = |m|, \quad m = d^2 - r^2$

Nyní si odvodíme hodnotu tohoto čísla a ukážeme si všechny jeho geometrické souvislosti. Uvažujme kružnici $k(S; r)$ a bod M, viz Obr. 115. Nejprve se zaměříme na dvě libovolné sečny vedené z bodu M ke kružnici k, které mají s k po řadě dvojici průsečíků X_1, Y_1 a X_2, Y_2, viz Obr. 115, vlevo. Snadno zjistíme, že trojúhelníky $\triangle MY_1X_2$ a $\triangle MY_2X_1$ jsou dle věty *uu* podobné[26], $\triangle MY_1X_2 \sim \triangle MY_2X_1$. Potom ale platí

$$\frac{|MY_1|}{|MY_2|} = \frac{|MX_2|}{|MX_1|}, \tag{89}$$

po úpravě

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|. \tag{90}$$

Součiny na obou stranách rovnice jsou stejné. Protože jsme příslušné dvě tětivy volili náhodně, můžeme tento poznatek zobecnit. Hodnota součinu $|MX| \cdot |MY|$, kde X, Y jsou průsečíky tětivy z bodu M ke kružnici k, je pro daný bod M a danou kružnici k konstantní,

$$|MX| \cdot |MY| = \text{konst.} \tag{91}$$

[26] Vnitřní úhel při vrcholu M je trojúhelníkům společný, vnitřní úhly $\angle X_1Y_2M$, $\angle MY_1X_2$ jsou shodné, protože se jedná o obvodové úhly příslušející stejnému oblouku X_1X_2

Pokud toto platí pro libovolnou tětivu, musí to platit i pro takovou, jejíž průsečíky s kružnicí k jsou od sebe velmi blízko, nekonečně blízko. Tj. platí to i pro tečnu, kterou můžeme chápat jako tětivu, jejíž body X, Y splynuly v jeden bod T,

$$|MX| \cdot |MY| = |MT|^2 = \text{konst.} \tag{92}$$

Z Obr. 115, vpravo, je patrné, že $\triangle SMT$ je pravoúhlý trojúhelník, v němž platí $|SM|^2 = |MT|^2 + |ST|^2$. Přitom $|ST| = r$. Pokud navíc vzdálenost $|MS|$ označíme d, můžeme psát

$$|MX| \cdot |MY| = |MT|^2 = d^2 - r^2. \tag{93}$$

Tímto, nutno říci, že místy povrchním, rozborem situace jsme odkryli základní vztahy pro mocnost bodu M vzhledem ke kružnici k. Nyní se budeme věnovat jejich bližší specifikaci.

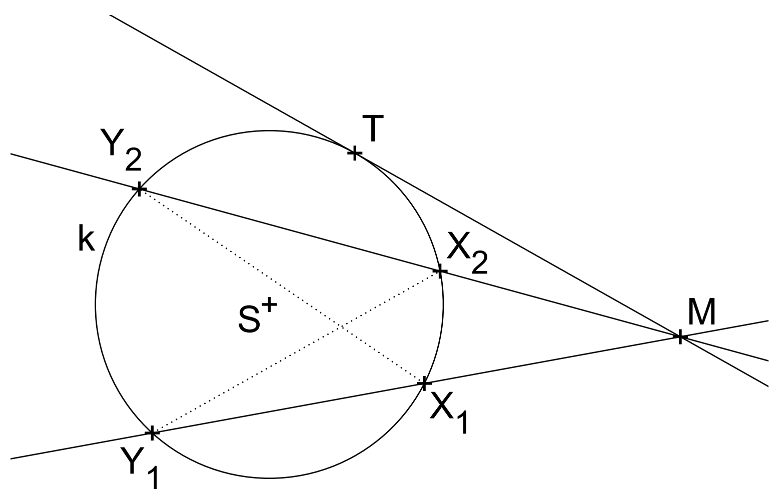
Definice 27 (Mocnost bodu ke kružnici). *Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m, pro které platí:*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M.

(2) Je-li M vnějším bodem kružnice k, je $m > 0$.

(3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k, je $m < 0$.

(4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.



Obrázek 116: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 17. *Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod M, který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k, které procházejí bodem M, jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2, platí*

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Důkaz. Viz odvození vztahu (90) na str. 129. □

Věta 18. *Nechť je dána kružnice $k(S;r)$ a bod M. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí*

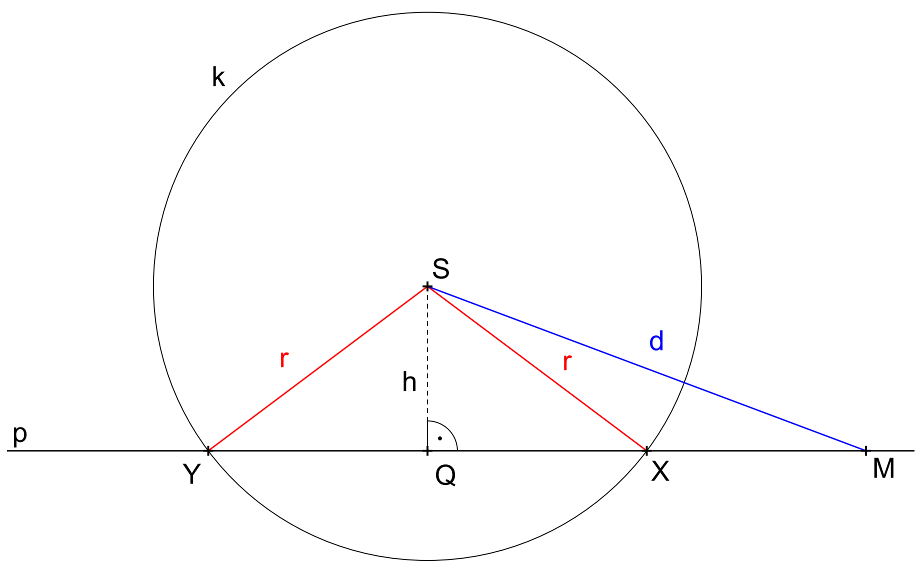
$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k.

Důkaz. Větu dokážeme zvlášť pro případ, kdy je bod M vně k a zvlášť pro případ, kdy je M uvnitř k.

I. <u>Bod M leží vně k:</u> Viz Obr. 117. Platí $|MX| \cdot |MY| = (|MQ| - |QX|) \cdot (|MQ| + |QY|)$. Protože $|QY| = |QX|$ (Q je středem tětivy XY), můžeme při postupném uplatnění vztahu pro rozdíl čtverců a Pythagorovy věty psát

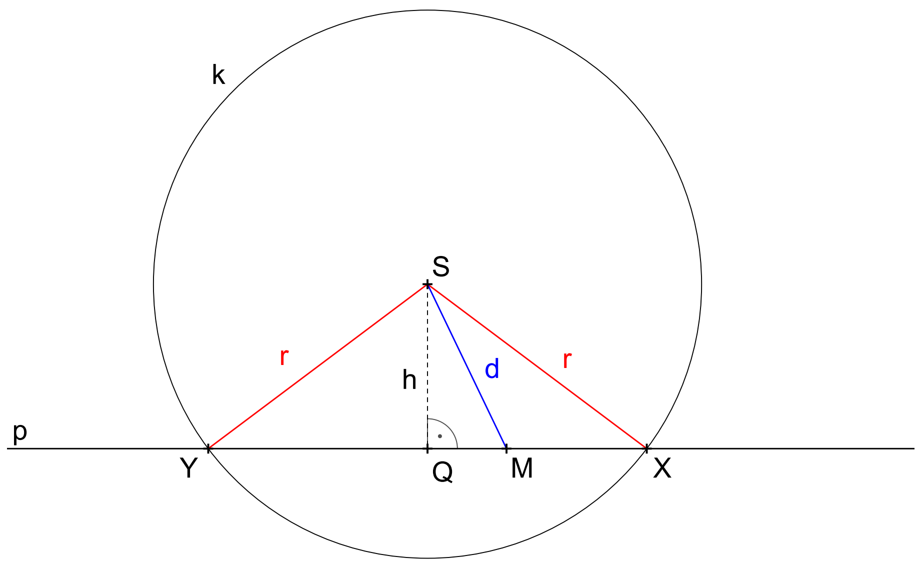
$$\begin{aligned} |MX| \cdot |MY| &= (|MQ| - |QX|) \cdot (|MQ| + |QX|) \\ &= |MQ|^2 - |QX|^2 = d^2 - h^2 - r^2 + h^2 = d^2 - r^2. \end{aligned} \tag{94}$$



Obrázek 117: $|MX| \cdot |MY| = d^2 - r^2$

II. <u>Bod M leží uvnitř k:</u> Viz Obr. 118. Platí $|MX| \cdot |MY| = (|QX| - |QM|) \cdot (|QY| + |QM|)$. Protože $|QY| = |QX|$ (Q je středem tětivy XY), můžeme při postupném uplatnění vztahu pro rozdíl čtverců a Pythagorovy věty psát

$$
\begin{aligned}
|MX| \cdot |MY| &= (|QX| - |QM|) \cdot (|QX| + |QM|) \\
&= |QX|^2 - |QM|^2 = r^2 - h^2 - d^2 + h^2 = r^2 - d^2.
\end{aligned} \tag{95}
$$



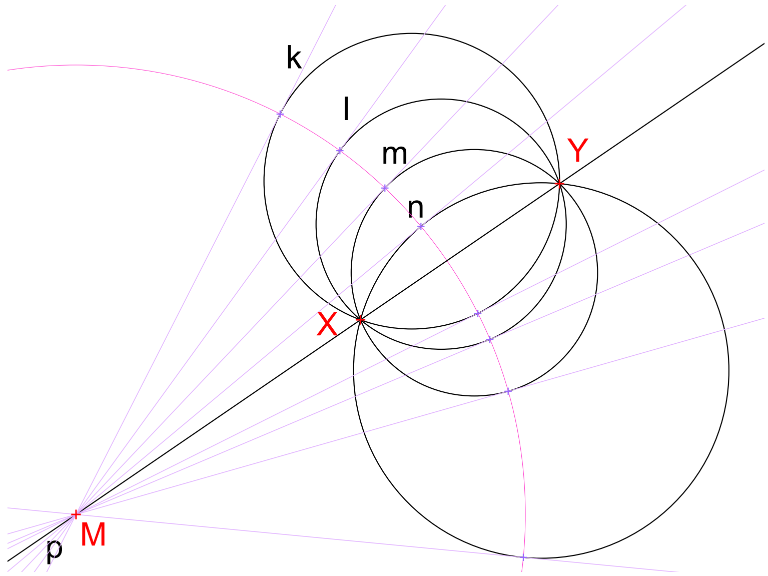
Obrázek 118: $|MX| \cdot |MY| = r^2 - d^2$

Dáme-li vztahy (94) a (95) dohromady, můžeme učinit následující závěr. Pro bod M vně kružnice k je $m = d^2 - r^2 > 0$, pro bod M uvnitř k je $m = d^2 - r^2 < 0$ a nakonec, pro bod M ležící na kružnici k je $m = d^2 - r^2 = 0$. Vždy je přitom $|m| = |MX| \cdot |MY|$. Tím je věta dokázána. □

Věta 19. *Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k. Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k, tak platí $|MT|^2 = m$.*

Důkaz. Viz odvození vztahu (93) na str. 130. □

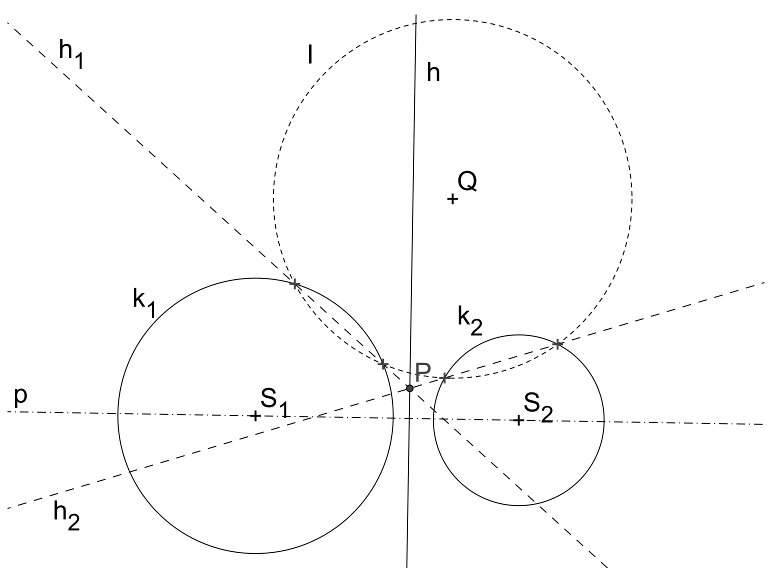
Souvislost hodnoty mocnosti bodu M ke kružnici s jeho vzdálenostmi od průsečíků X, Y jím vedené přímky s kružnicí, vyjádřená vztahem (91), znamená, že daný bod M má stejnou mocnost ke všem kružnicím, které body X, Y procházejí, bez ohledu na jejich poloměry. Na Obr. 119 vidíme čtyři takové kružnice, k, l, m a n. Máme-li na mysli všechny kružnice procházející body X, Y, hovoříme o svazku kružnic. Na Obr. 119 jsou zobrazeny i tečny z M ke všem kružnicím k, l, m, n. Důsledkem vztahu (93) je to, že body dotyku všech těchto tečen jsou od M stejně daleko, leží tedy na kružnici se středem M.



Obrázek 119: Bod M má stejnou mocnost ke všem kružnicím s tětivou XY

10.1 Chordála a potenční střed

Je zřejmé, že když posuneme bod M podél přímky $p \equiv \leftrightarrow XY$, viz Obr. 119, hodnota jeho mocnosti vzhledem ke kružnicím k, l, m, n (a všem ostatním z téhož svazku) se změní, opět ale bude ke všem stejná. Přímka p je tedy množinou bodů, které mají ke kružnicím k, l, m, n stejnou mocnost. Přímku s touto vlastností vzhledem ke dvěma kružnicím nazýváme *chordála*.



Obrázek 120: Chordála h kružnic k_1, k_2, potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Věta 20 (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost,* *je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M, potom přímka h prochází tímto bodem.*

Poznámka. Přímka h, která je množinou bodů X, majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2.

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).

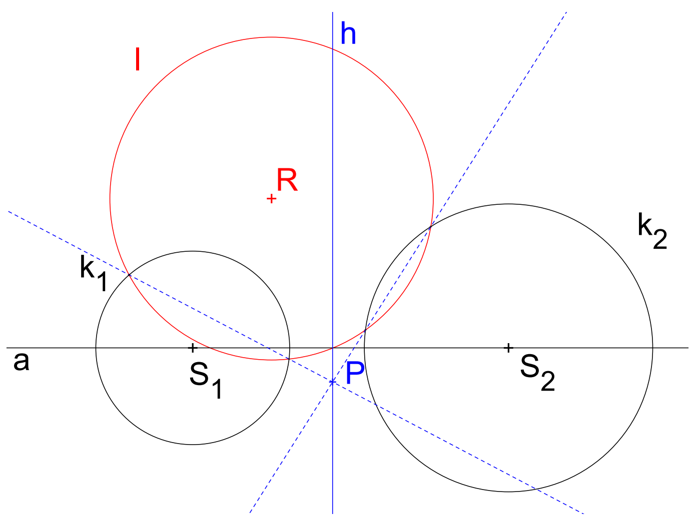
Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1)$, $k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \tag{96}$$

PŘÍKLAD 10.1. *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2, které nemají společný bod.*

Řešení: Pokud mají kružnice dva společné body, již víme, že chordála prochází těmito body. Pokud mají společný jenom jeden bod, ve kterém se dotýkají, chordála

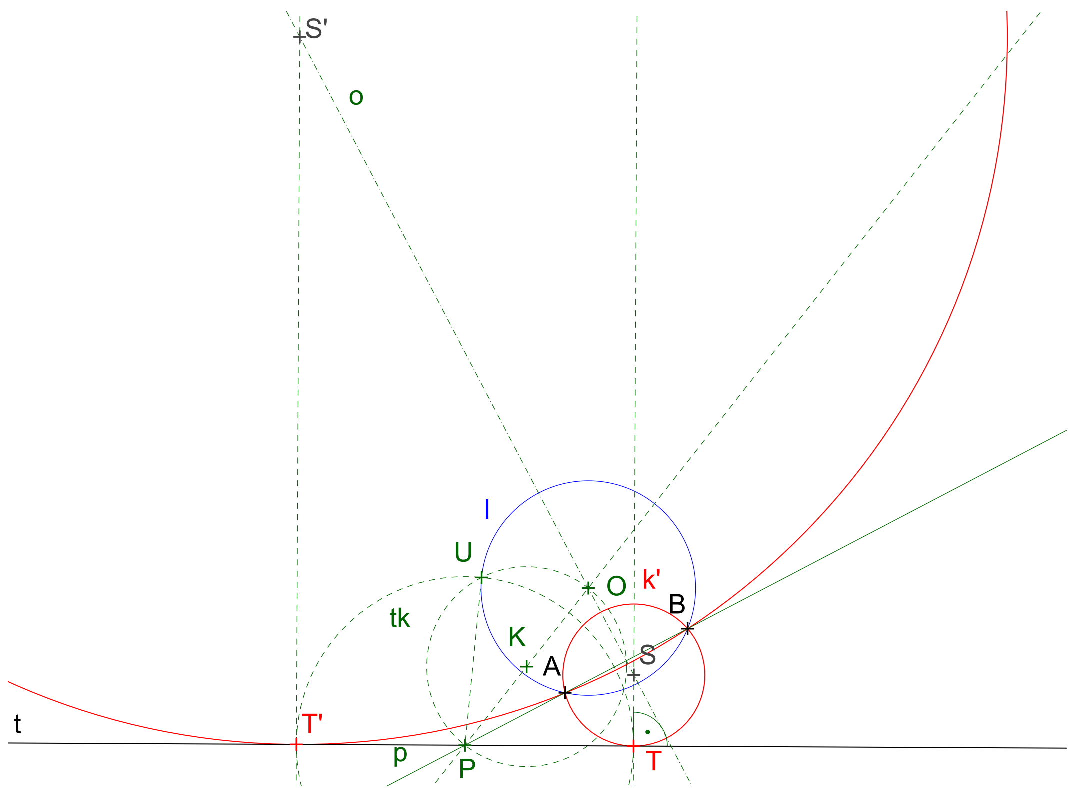


Obrázek 121: Chordála h kružnic k_1, k_2

prochází tímto bodem, kolmo na přímku spojující středy kružnic. V případě, že kružnice nemají žádný společný bod, pomůžeme si tím, že úlohu převedeme na případ dvou společných bodů. Pro tento účel použijeme pomocnou kružnici l, která má s každou z daných kružnic dva průsečíky, viz Obr. 121. Snadno pak sestrojíme dvě chordály, vždy pro pomocnou kružnici l a jednu z daných kružnic k_1, k_2. Tyto chordály se protnou v bodě P (potenční bod), který má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím, tedy i k daným dvěma k_1, k_2. Tímto bodem potom musí, kolmo na spojnici S_1, S_2, procházet hledaná chordála h.

PŘÍKLAD 10.2. *Sestrojte kružnici k, která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t.*

Řešení: Viz Obr. 122. Využijeme pomocnou kružnici l procházející body A, B. Potom bod $P = AB \int t$ má k této kružnici stejnou mocnost jako k té hledané, tedy i délku tečny (vzdálenost M a bodu dotyku). To nám pomůže najít body dotyku T, T' hledaných kružnic s t. Úloha má dvě řešení. Kompletní postup krok za krokem je v appletu https://www.geogebra.org/m/p8lwmKv4.



Obrázek 122: Využití pomocné kružnice l

10.2 Cvičení: Mocnost bodu ke kružnici

1. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M. Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV.

2. Obdélník má velikosti stran a, b. Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.

4. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B, které leží vně dané kružnice k.

5. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ||AB$ a $PC||AQ$.

6. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5cm$, $|DA| = 3cm$ a velikost $75°$ úhlu, který svírají přímky BC a AD, platí-li navíc $|AB||CD| = |AC|^2$.