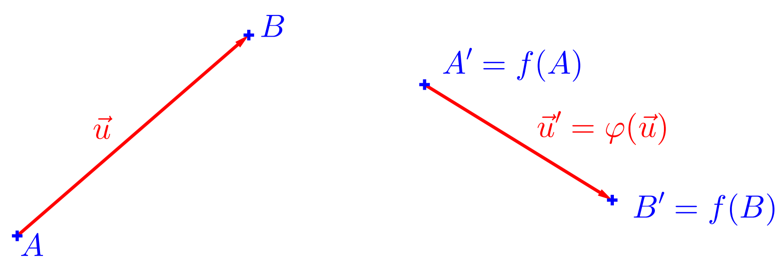
5.3 Lineární zobrazení asociované s afinním zobrazením (asociovaný homomorfismus)

Na str. 34 je uvedeno, že *samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe.* Protože směr je v geometrii reprezentován vektorem (jakýmkoliv vektorem daného „směru“), jedná se vlastně o zobrazení vektoru. Jak se ale zobrazují vektory? Dosud jsme se přece zabývali jenom zobrazením bodů! Afinní zobrazení v rovině (afinita) přiřazuje bodu X roviny jako jeho obraz X' zase bod této roviny. Ukážeme si, že odpověď je jednoduchá. Existence zobrazení, které přiřazuje vektoru jako jeho obraz zase vektor, je přímým důsledkem existence afinního zobrazení. Uvažujme afinitu f, která dvojici bodů A, B přiřadí v daném pořadí jejich obrazy A', B', viz Obr. 26. Uspořádanou dvojici bodů A, B ale můžeme ztotožnit



Obrázek 26: Ke každému afinnímu zobrazení f je přidruženo (asociováno) lineární zobrazení φ

s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, která je umístěním vektoru $\vec{u} = B - A$. Dvojicí bodů A, B je tak určen vektor. Stejný přístup uplatníme k jejich obrazům A', B'. Opět je ztotožníme s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{A'B'}$, která je tentokrát umístěním vektoru $\vec{u}' = B' - A'$. Je pak celkem nasnadě uvažovat vektor $\vec{u}'$ jako obraz vektoru $\vec{u}$ v zobrazení, jehož mechanismus byl právě teď popsán a názorně je zobrazen na Obr. 26. Toto zobrazení značíme φ, tj. $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$, a nazýváme ho *lineární zobrazení asociované s afinním zobrazením (asociovaný homomorfismus)*. Pojmem *lineární zobrazení* (cizím slovem *homomorfismus*) je vyjádřena skutečnost, že předmětné zobrazení má vlastnosti popsané definicí 16.

Definice 16 (Homomorfismus)**.** *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &&= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ &(2) \quad \varphi(k\vec{u}) &&= k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Definice 17 (Asociovaný homomorfismus afinity f v rovině). *Uvažujme afinní transformaci f prostoru E_2. Potom* **asociovaným** *(tj. jednoznačně přiřazeným)* **homomorfismem** *afinity f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření*[7] *V_2 prostoru E_2 do sebe takto:*

$$\vec{u} = Y - X \;\longrightarrow\; \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \tag{35}$$

kde X, Y a $f(X), f(Y)$ jsou body z E_2, $\vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$.

Zajímají nás rovnice zobrazení φ. Získáme je dosazením z (23) do (35) (akorát místo $f(X), f(Y)$ budeme pro zjednodušení pracovat s X', Y'), konkrétně

$$\varphi(\vec{u}) = Y' - X' = AY + B - AX - B = A(Y - X) = A \cdot \vec{u}. \tag{36}$$

Analogicky s rovnicí (23) můžeme psát

$$\varphi: \; \vec{u}' = A \cdot \vec{u}, \tag{37}$$

maticově pak ve tvaru

$$\varphi: \; \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Asociovaný homomorfismus φ afinity f můžeme zadat také soustavou

$$\begin{aligned} \varphi: \; u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \tag{38}$$

Vraťme se nyní k dříve nastolené otázce výpočtu **samodružných směrů** afinity (zaměřujeme se konkrétně na shodnosti) v rovině. Použijeme k tomu soustavu (38). Jak je uvedeno již na straně 34, je-li směr reprezentovaný vektorem $\vec{u}$ samodružný, zobrazí se $\vec{u}$ homomorfismem φ na vektor $\lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in R$ (Za promyšlení stojí, jakých hodnot může v případě shodnosti λ vlastně nabývat!). Dosadíme-li proto do (38) za u_1' a u_2' v uvedeném pořadí souřadnice λu_1 a λu_2, dostaneme, po drobných úpravách, homogenní soustavu

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0, \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Samodružné směry shodnosti, tj. vektory těchto směrů, pro které platí $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, jsou potom **netriviálním** řešením této soustavy rovnic. Proč netriviálním? Protože

[7] *Zaměřením* rozumíme vektorový prostor (tj. množinu vektorů splňující definici 3, uvedenou na str. 5), který je tvořen vektory určenými dvojicemi bodů způsobem, který znázorňuje Obr. 26. Zjednodušeně můžeme zaměření bodového prostoru popsat jako *množinu všech směrů*, které lze v daném bodovém prostoru určit dvojicemi bodů.

triviálním řešením je nulový vektor o a ten nikam neukazuje! Nereprezentuje žádný směr. Zajímá nás tedy, za jakých podmínek má soustava (39) netriviální řešení, jinak řečeno, kdy má **nekonečně mnoho řešení**. Uplatníme při tom své poznatky z lineární algebry.

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant matice soustavy roven nule. Soustava (39) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

Rovnici (40) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě shodnosti v rovině. Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu φ, číslo λ, které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\vec{u}$. Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

5.4 Výpočet samodružných bodů a směrů shodnosti v rovině

Postupy určení samodružných bodů a směrů shodného zobrazení si budeme ilustrovat na konkrétních shodnostech, na středové a osové souměrnosti.

Středová souměrnost se středem v bodě $S = [2, -3]$ je dána rovnicemi (viz str. 54)

$$\begin{aligned} x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6. \end{aligned}$$

Představme si, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit. Matice tohoto zobrazení je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, součin $A^T \cdot A$ je roven $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy (34)

$$\begin{aligned} 2x &= 4, \\ 2y &= -6. \end{aligned}$$

Ta má jediné řešení $[x, y] = [2, -3]$. Jedná se tedy o shodné zobrazení s jediným samodružným bodem $S = [2, -3]$. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost, viz tabulka na str. 35.

K rozhodnutí, která z těchto dvou možností je správná, nám pomůže určení samodružných směrů daného zobrazení. Řešíme proto homogenní soustavu (39)

$$(\lambda + 1)u_1 = 0,$$
$$(\lambda + 1)u_2 = 0,$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě $(\lambda+1)^2 = 0$. Jejím jediným řešením je vlastní číslo $\lambda = -1$, které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$0u_1 = 0,$$
$$0u_2 = 0,$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$. Vyšetřovaná shodnost má tedy všechny směry samodružné. Jedná se proto o středovou souměrnost se středem $S = [2, -3]$.

Osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x je dána rovnicemi

$$x' = x,$$
$$y' = -y.$$

Opět předstíráme, že nevíme, o jaké afinní zobrazení se jedná a teprve to chceme zjistit.

Matice tohoto zobrazení je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, součin $A^T \cdot A$ je roven $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jedná se tedy o shodnost.

Nyní určíme samodružné body daného zobrazení řešením soustavy

$$0x = 0,$$
$$2y = 0.$$

Ta má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru $[x, 0]$; $x \in R$. Jedná se tedy o shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body leží v přímce o rovnici $y = 0$. V úvahu tak připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x, viz tabulka na str. 35.

Přestože jsme dané zobrazení již identifikovali, dokončíme analýzu jeho vlastností určením samodružných směrů. Řešíme proto homogenní soustavu

$$(\lambda - 1)u_1 = 0, \tag{41}$$
$$(\lambda + 1)u_2 = 0, \tag{42}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě $(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$. Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy (42) a vypočítáme souřadnice odpovídajících vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou x (tj. s osou souměrnosti).

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose x (tj. k ose souměrnosti). Určení dvou na sebe kolmých samodružných směrů je v souladu se skutečností, že uvažované shodné zobrazení je osová souměrnost.

PŘÍKLAD 5.10. *Rozhodněte, zda je afinita daná rovnicemi* $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8, y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6$ *shodností. Pokud ano, určete její samodružné body a směry a uveďte, o jakou shodnost se jedná.*

Řešení: Řešte sami. Pokud nevíte jak, pomůže Vám jednak pozorné prostudování dosavadního textu kapitoly 5, jednak prostudování řešení následujícího příkladu 5.11.

Následující příklad je určen k dobrovolnému studiu. Je kompletně vyřešen. K zápisu řešení je použit kód řešení v programu wxMaxima, doplněný zevrubnými komentáři jednotlivých kroků. V řešení příkladu jsou názorně použity všechny postupy, které jsou popisovány v kapitole *5. Shodná zobrazení v rovině.*

PŘÍKLAD 5.11. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.*

Řešení: Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$. V případě této úlohy zvládneme ověření provést zpaměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

(%o2) $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Rovnici $X' = A \cdot X + B$ vyjádříme ve tvaru $A \cdot X + B - X' = O$ a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů K, K' a L, L'. Potom zapíšeme podmínku (31) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru $A^T \cdot A - E = O$. (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
      s3:transpose(A).A-ident(2);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} b1 + 10\,a11 \\ b2 + 10\,a21 \end{pmatrix}$

(%o4) $\begin{pmatrix} b1 + 20\,a12 + 25\,a11 \\ b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25 \end{pmatrix}$

(%o5) $\begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21\,a22 + a11\,a12 \\ a21\,a22 + a11\,a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o6) $[b1+10\,a11, b2+10\,a21, b1+20\,a12+25\,a11, b2+20\,a22+25\,a21-25, a21^2+a11^2-1, a21\,a22+a11\,a12, a22^2+a12^2-1]$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

(%o7) $[[a11=\frac{4}{5}, a12=-\frac{3}{5}, a21=\frac{3}{5}, a22=\frac{4}{5}, b1=-8, b2=-6],$
$[a11=-\frac{4}{5}, a12=\frac{3}{5}, a21=\frac{3}{5}, a22=\frac{4}{5}, b1=8, b2=-6]]$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

(%o8) $\begin{pmatrix} x1 = a12\,y + a11\,x + b1 \\ y1 = a22\,y + a21\,x + b2 \end{pmatrix}$

Řešení č. 1:

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

(%o9) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o10) $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

(%o11) $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3\,y}{5} + \frac{4\,x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružný bod je bod, pro který platí $X' = X$. Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice $X' = A \cdot X + B$ (pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$) za X' dosadíme X a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými x, y.

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

(%o12) $\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5}-\frac{x}{5}-8 \\ -\frac{y}{5}+\frac{3x}{5}-6 \end{pmatrix}$

(%o13) $[[x=5, y=-15]]$

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod $S=[5,-15]$.

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnici (40)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);
       CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;
       solve(CharR1,%lambda);
```

(%o14) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}-\lambda \end{pmatrix}$

(%o15) $\lambda^2-\frac{8\lambda}{5}+1=0$

(%o16) $[\lambda=-\frac{3i-4}{5}, \lambda=\frac{3i+4}{5}]$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem $S=[5,-15]$.

Poznámka. K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení α. Jak to uděláme?

Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

(%o17) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o18) $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

(%o19) $\begin{pmatrix} x1=\frac{3\,y}{5}-\frac{4\,x}{5}+8 \\ y1=\frac{4\,y}{5}+\frac{3\,x}{5}-6 \end{pmatrix}$

Samodružné body:

```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

(%o20) $\begin{pmatrix} \frac{3\,y}{5}-\frac{9\,x}{5}+8 \\ -\frac{y}{5}+\frac{3\,x}{5}-6 \end{pmatrix}$

(%o21) $[]$

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);
       CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;
       solve(CharR2,%lambda);
```

(%o22) $\begin{pmatrix} -\lambda-\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}-\lambda \end{pmatrix}$

(%o23) $\lambda^2-1=0$

(%o24) $[\lambda=-1,\lambda=1]$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

(%o25) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5}-\lambda\,u-\frac{4\,u}{5} \\ -\lambda\,v+\frac{4\,v}{5}+\frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
       solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

(%o26) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5}+\frac{u}{5} \\ \frac{9\,v}{5}+\frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o27) $[[u=-3\,\%r1,v=\%r1]]$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
       solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

(%o28) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5} - \frac{9\,u}{5} \\ \frac{3\,u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o29) $[[u = \dfrac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry $\vec{u} = (-3, 1), \vec{u} = (1, 3)$.

Jedná se o **posunuté zrcadlení**.

Poznámka. K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu o a vektor posunutí $\vec{t}$. Jak to uděláme?