

# ZÁKLADY GEOMETRIE - KMA/ZGEOP

Roman HAŠEK

15. prosince 2017

# Obsah

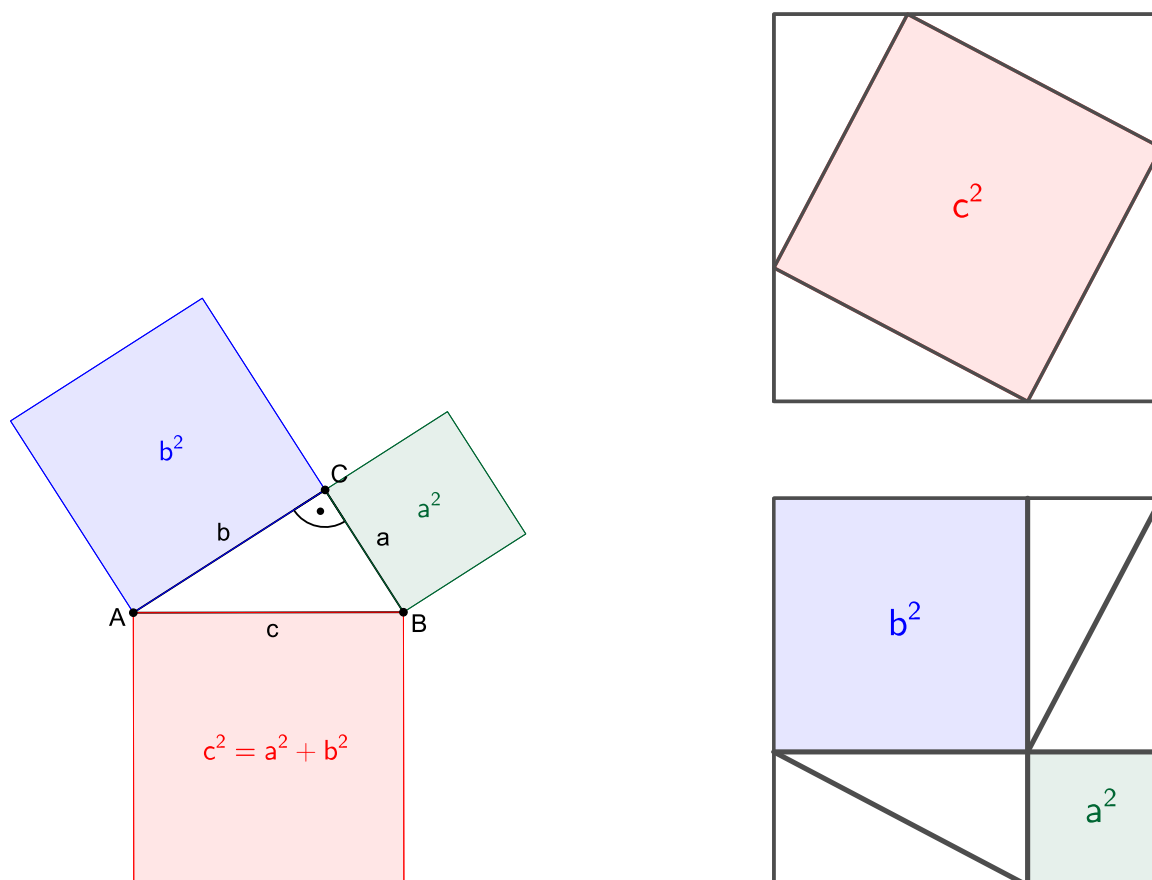
<b>1</b>	<b>Počátky geometrie</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Řecká geometrie</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Geometrie ve škole</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Geometrické útvary v rovině</b>	<b>16</b>
4.1	Body, přímky, polopřímky, poloroviny . . . . .	16
4.2	Úsečky . . . . .	19
4.3	Úhly . . . . .	20
4.4	Kružnice . . . . .	24
4.5	Mnohoúhelníky . . . . .	25
4.6	Trojúhelník . . . . .	26
4.7	Čtyřúhelníky . . . . .	30
4.8	Pravidelné mnohoúhelníky ( $n$ -úhelníky) . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Geometrické útvary v trojrozměrném prostoru</b>	<b>36</b>
5.1	Tělesa . . . . .	36
5.2	Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa) . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Dimenze bodového (pod)prostoru</b>	<b>42</b>
<b>7</b>	<b>Míra</b>	<b>43</b>
7.1	Souřadnice bodu a vektoru . . . . .	43
7.2	Norma (velikost) vektoru . . . . .	44
7.3	Vzdálenost bodů . . . . .	45
7.4	Odchylka dvou vektorů; skalární součin . . . . .	46
7.5	Míra . . . . .	47
<b>8</b>	<b>Obsah a obvod rovinného útvaru</b>	<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Využití čtvercové sítě k určení obsahu rovinného útvaru</b>	<b>50</b>
<b>10</b>	<b>Objem a povrch trojrozměrného útvaru</b>	<b>52</b>
<b>11</b>	<b>Cavalieriho princip</b>	<b>54</b>

<b>12 Planimetrie</b>	<b>56</b>
12.1 Symetrie . . . . .	56
12.2 Geometrické zobrazení . . . . .	57
12.3 Geometrické zobrazení v rovině . . . . .	62
<b>13 Shodná zobrazení v rovině</b>	<b>63</b>
13.1 Vlastnosti shodných zobrazení . . . . .	64
13.2 Osová souměrnost . . . . .	65
13.3 Skládání zobrazení . . . . .	69
13.4 Středová souměrnost . . . . .	70
13.5 Otočení . . . . .	72
13.6 Posunutí (Translace) . . . . .	74
13.7 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost) . . . . .	76
<b>14 Podobná zobrazení</b>	<b>78</b>
14.1 <b>Věty o podobnosti trojúhelníků</b> . . . . .	80
<b>15 Stejnolehlost</b>	<b>82</b>
15.1 Stejnolehlost kružnic . . . . .	84
<b>16 Stereometrie</b>	<b>86</b>
16.1 Středové a rovnoběžné promítání do roviny . . . . .	86
16.2 Volné rovnoběžné promítání . . . . .	87
16.3 Další zobrazovací metody . . . . .	89
16.4 Sdružené průměty prostorového útvaru . . . . .	91
16.5 Stavby z krychlí . . . . .	92
16.6 Sítě těles složených z kostek . . . . .	93

# 1 Počátky geometrie

Slovo „geometrie“ je řeckého původu, v originále  $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ , kde znamená doslova „měření Země“ (*geo-* je „Země“, *-metron* pak „měření“). Odráží skutečnost, že se geometrie zrodila v Mezopotámii a v Egyptě jako umění vyměřování polí a základů staveb a určování objemů různých schránek na obchodované zboží.

**Věta 1** (Pythagorova věta). *V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami. (Pythagoras ze Samu, 570?–510 př. n. l.)*



Obrázek 1: Pythagorova věta (vlevo) a její „důkaz beze slov“ (vpravo)

**PŘÍKLAD 1.1.** *Platí stejné tvrzení o součtu obsahů i pro jiné vzájemně*

podobné útvary sestavené nad přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku? Například pro půlkruhy nebo trojúhelníky?

**PŘÍKLAD 1.2.** Najděte co nejvíce trojic přirozených čísel (seřazených dle velikosti od nejmenšího), které odpovídají délkám stran pravoúhlého trojúhelníku.

Pythagorejské trojice;  $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ .

Předchozí příklad můžeme interpretovat tak, že hledáme řešení rovnice

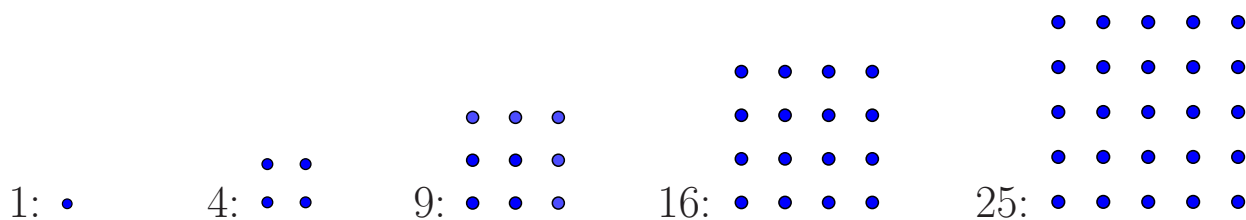
$$x^2 + y^2 = z^2$$

s neznámými  $x, y, z$  v oboru kladných celých čísel (přirozených čísel  $1, 2, \dots$ ). Otázkou řešení této rovnice pro mocniny neznámých vyšší než 2 se zabývá „Velká Fermatova věta“ (*Pierre de Fermat*, 1607–1665)

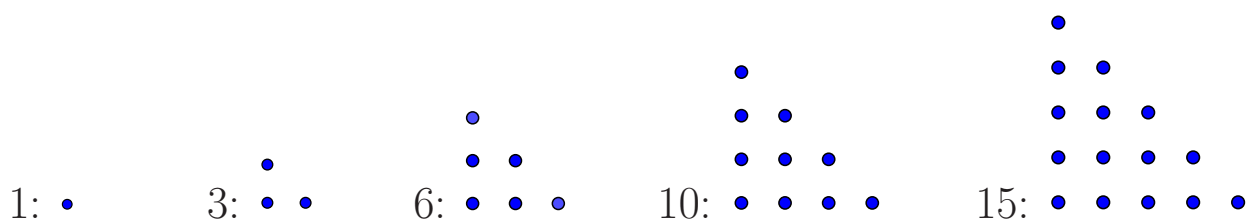
**Věta 2** (Velká Fermatova věta). *Rovnice  $x^n + y^n = z^n$  nemá žádná kladná celočíselná řešení pro  $n$  větší než 2.*

Úplný důkaz věty předložil v roce 1995 *Andrew Wiles*.

## Čtvercová čísla



## Trojúhelníková čísla



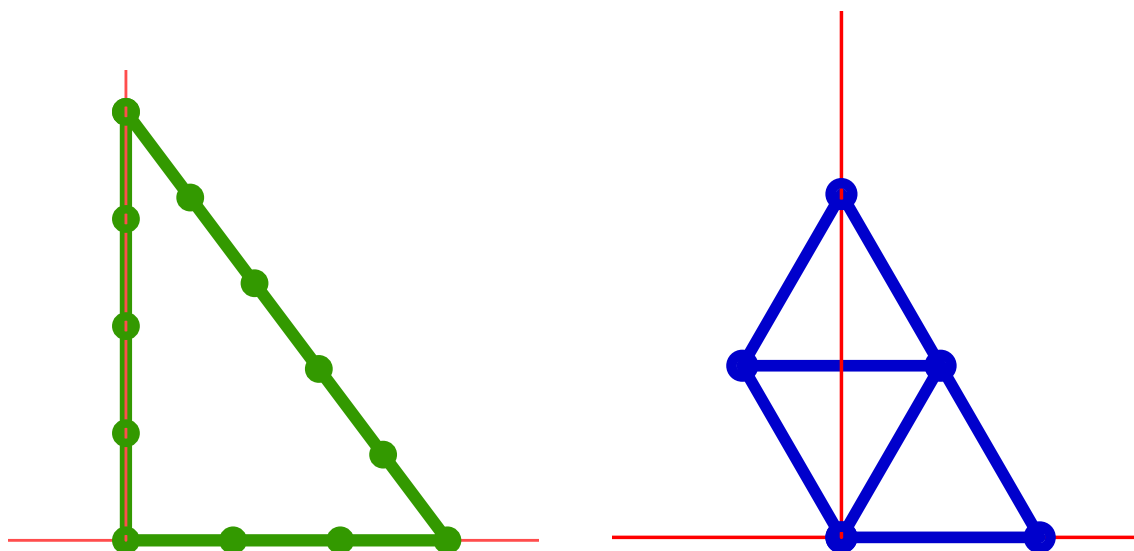
Geometrii v původním slova smyslu praktikovali tzv. *napínači provazů*, kteří dokázali měřit tyto čtyři velikosti: délku, plošný obsah, objem a velikost úhlu [3].

## Egypt



Obrázek 2: Egyptští napínači provazů na malbě z roku kolem 1400 př. n. l.  
<https://www.pinterest.co.uk/Jorgeariasrios/ancient-egypt-painting/>

Vlastnost pravoúhlého trojúhelníku, která je podstatou Pythagorovy věty, znali již ve starověkém Egyptě. Byla tam využívána k vytyčování pravého úhlu v terénu. Například při stavbě Cheopsovy pyramidy někdy kolem roku 2600 př. n. l.



Obrázek 3: Metoda vytyčení pravého úhlu používaná Egypťany (vlevo) a Mayi (vpravo)

## Mezopotámie

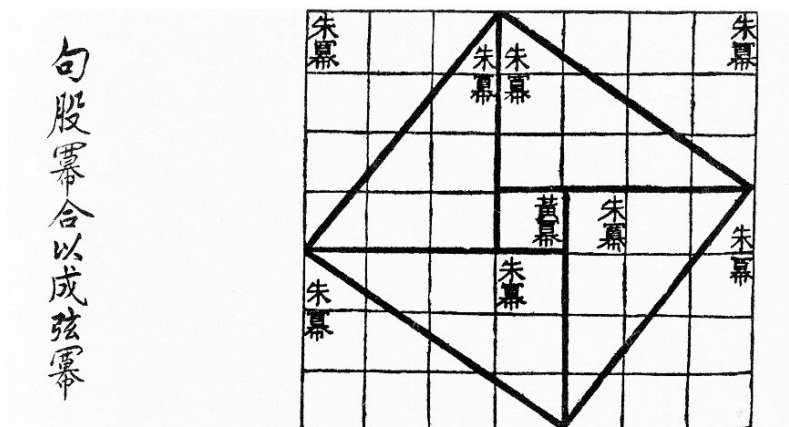
Rovněž v Mezopotámii byla vlastnost z Pythagorovy věty známa dávno před tím, než ji Pythagoras dokázal, jak dokládá „žákovská“ hliněná tabulka na Obr. 4, na které je klínovým písmem a v šedesátkové číselné soustavě zaznamenán výpočet délky úhlopříčky čtverce se stranou 30 jednotek.



Obrázek 4: Výpočet úhlopříčky čtverce o straně 30,  $u = 30\sqrt{2}$ ; Mezopotámie, 19.–18. stol. př. n. l., <http://ipch.yale.edu>

## Čína

Nejstarší dochovaný důkaz Pythagorovy věty však pochází z Číny.



Obrázek 5: Nejstarší „důkaz beze slov“ Pythagorovy věty; Čína, mezi 1000 a 200 př. n. l., [https://en.wikipedia.org/wiki/Zhoubi\\_Suanjing](https://en.wikipedia.org/wiki/Zhoubi_Suanjing)

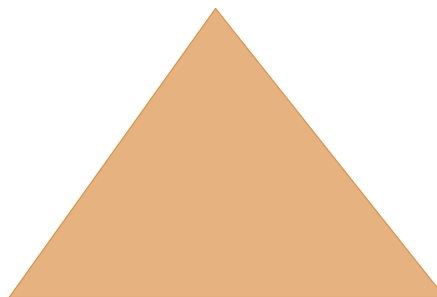
## 2 Řecká geometrie

Egyptské matematické poznatky byly shromažďovány především pomocí metody pokus-omyl. Kritériem přijetí metody výpočtu bylo to, zda funguje v uvažované situaci. Obecný důkaz nebyl vyžadován. To se změnilo s nástupem řecké matematiky, jejíž představitelé používáním deduktivní metody položili základy vědecké základy matematiky.

**Thales z Milétu**, 624?–546? př. n. l.

Zabýval se praktickým využitím geometrie, ale stál také u zrodu geometrie jako vědecké disciplíny. Při formulování geometrických vlastností uplatňoval deduktivní metodu, své závěry vyslovoval pro obecné útvary a předkládal jejich důkazy.

**PŘÍKLAD 2.1** (Výpočet výšky pyramidy). *Thales z Milétu prý jako první dokázal vypočítat výšku Cheopsovy pyramidy v Egyptě. Využil při tom poznatek, že v jistou denní dobu je délka jeho stínu, když stojí poblíž pyramidy, rovna jeho výšce. Jak výšku pyramidy určil?*



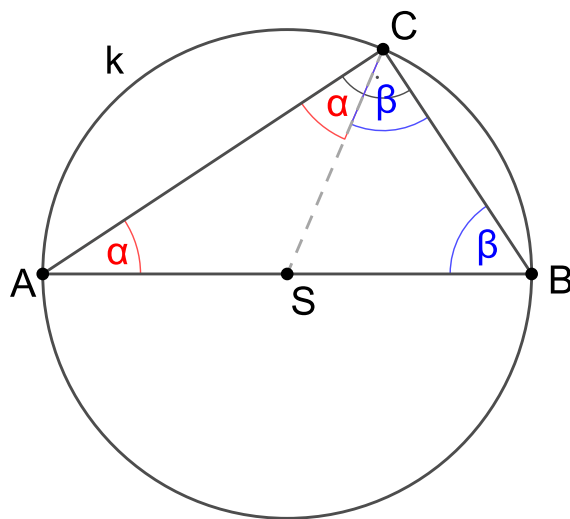
Obrázek 6: Thales měří Cheopsovu pyramidu

**Věta 3.** *Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou si rovny.*



**Věta 4** (Thaletova věta). *Každý obvodový úhel nad průměrem kružnice je pravý.*

*Důkaz.* Myšlenka důkazu Thaletovy věty je dostatečně ilustrována následujícím obrázkem 7. □



Obrázek 7: Důkaz Thaletovy věty,  $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$

**Eukleides**, kolem r. 300 př. n. l.

Svým dílem *Základy* (viz [4]), ve kterém uspořádal dosavadní poznatky z matematiky, položil skutečné základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky.

Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů<sup>1</sup>, z nichž 5 nazval postuláty<sup>2</sup> (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval „Úkoly prvotné“), [10], [14].

<sup>1</sup>*axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou; log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

<sup>2</sup>*postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazu a tvořící její východisko; log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvorit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

**Poznámka.** Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (*Compass and straightedge constructions*).

Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu*.

Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítko a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitých matematických aparátů. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla  $\pi$ , který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

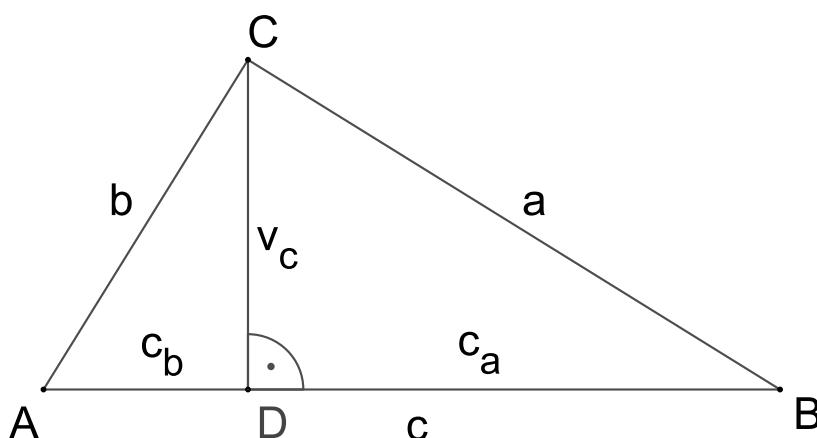
Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až *David Hilbert* (1862 - 1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystaveném systému axiomů v podstatě ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmů, vyjádřil známým výrokem:

„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a püllitry.“

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*, např. *Poincarého model* nebo *Beltramiho–Kleinuv model*. K otázce axiomů se zanedlouho vrátíme v souvislosti s představením tzv. neeukleidovských geometrií.

**Věta 5.** *Když se v pravoúhlém trojúhelníku vede od pravého úhlu na základnu kolmice, trojúhelníky při kolmici jsou podobny celému i navzájem. (VIII., Kniha VI., viz [4] str. 88)*

Toto tvrzení vede k tzv. Eukleidovým větám (o výšce a o odvěsnách).



Obrázek 8: Eukleidovy Základy, Kniha VI., Tvrzení VIII.

**Věta 6** (Euklidova věta o výšce a o odvěsně). *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při označení dle Obr. 8) platí  $v^2 = c_a c_b$ ,  $a^2 = c c_a$ ,  $b^2 = c c_b$ . ([11], str. 393)*

Jako tvrzení XLVII. v Knize I. je uvedena Pythagorova věta, jako následující tvrzení je pak uvedena věta k ní obrácená. Zde si uvedeme současné formulace těchto vět převzaté z [11], str. 393.

**Věta 7** (Pythagorova věta). *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při označení dle Obr. 8) platí  $c^2 = a^2 + b^2$ .*

**Věta 8** (věta obrácená k Pythagorově větě). *Jestliže v trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky  $a, b, c$ , kde  $c > a, c > b$ , platí  $a^2 + b^2 = c^2$ , pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.*

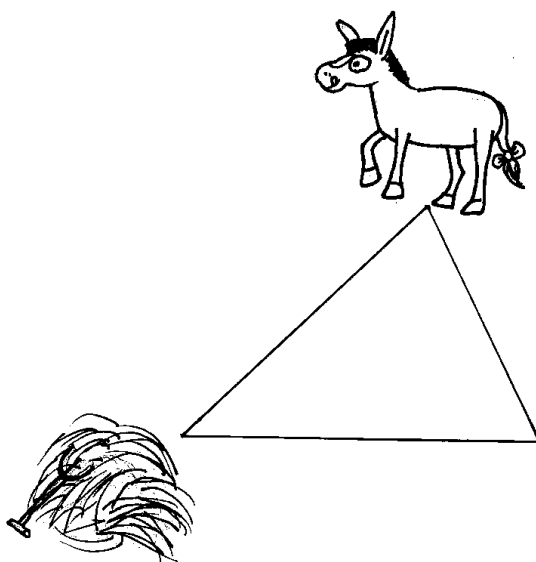
Ne každý chápal nutnost pevné logické výstavby matematické teorie založené na deduktivní metodě, kdy jsou z daných axiomů dokazovány i zdánlivé samozřejmosti. Příkladem je *trojúhelníková nerovnost*, uvedená jako tvrzení XX. v Knize I. [3] v této podobě.

**Věta 9** (Trojúhelníková nerovnost (dle [3])). *V každém trojúhelníku kterékoli dvě strany (součtem) jsou delší než strana zbývající.*

Texty obou českých překladů *Základů*, [4] i [3], přebírají styl textů latinských a řeckých pocházejících z 19. století, které jim byly předlohou. Dnes příslušné vlastnosti formulujeme jednodušeji. Větu o trojúhelníkové nerovnosti bychom potom vyslovili třeba takto.

**Věta 10** (Trojúhelníková nerovnost). *Součet dvou stran libovolného trojúhelníku je větší než strana zbývající.*

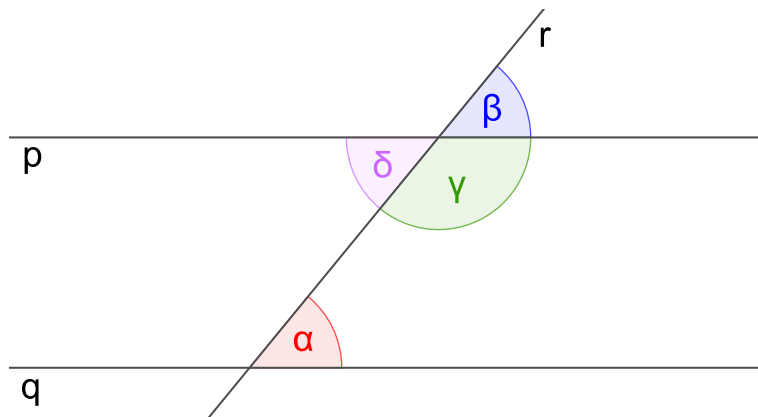
Prezentace této vlastnosti trojúhelníku formou věty, kterou je třeba dokázat, se stala předmětem kritiky ze strany Epikurejců. Ti tvrdili, že tuto vlastnost zná přece každý osel (proto se jí někdy říká „oslí věta“), když je známé, že ke kupce sena jde vždy nejkratší cestou, viz Obr. 9, a není proto nutné jí nějak zvlášť dokazovat.



Obrázek 9: Trojúhelníková nerovnost – oslí věta

## Úhly souhlasné, střídavé a přilehlé

Příklady těchto dvojic úhlů jsou na Obr. 10:  $\alpha, \beta$  – souhlasné,  $\alpha, \delta$  – střídavé,  $\alpha, \gamma$  – přilehlé, více viz [11], str. 377–378.

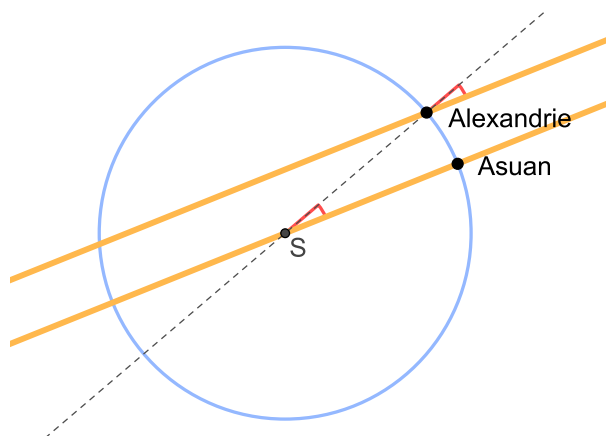


Obrázek 10: Úhly souhlasné ( $\alpha, \beta$ ), střídavé ( $\alpha, \delta$ ) a přilehlé ( $\alpha, \gamma$ )

V *Základech* (přesněji v českém překladu [3]) pojednává o těchto dvojicích úhlů pro dvě rovnoběžné přímky tvrzení XXIX. v Knize I.

**Věta 11.** *Úsečka protínající rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný (souhlasné úhly) a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovné (přilehlé úhly).*

Shodu souhlasných úhlů pro příčku rovnoběžek využil *Eratosthenés z Kyrény* (276?–194 př. n. l.) ke změření obvodu Země.



Obrázek 11: Eratosthenovo měření obvodu Země

## Nicolas Bourbaki

Pod jménem *Nicolas Bourbaki* od roku 1934 s proměnlivou intenzitou působila/působí generačně se obměňující skupina převážně francouzských matematiků. Jejich snaha o systemizaci dosavadních poznatků z vybraných oblastí matematiky pomocí přísně formálního jazyka a na základě množinového aparátu, která je sama o sobě chvályhodná, byla nevhodně vztáhnuta i na výuku matematiky. Tato tendence se projevila přílišnou formalizací učiva již od nižších ročníků základní školy.

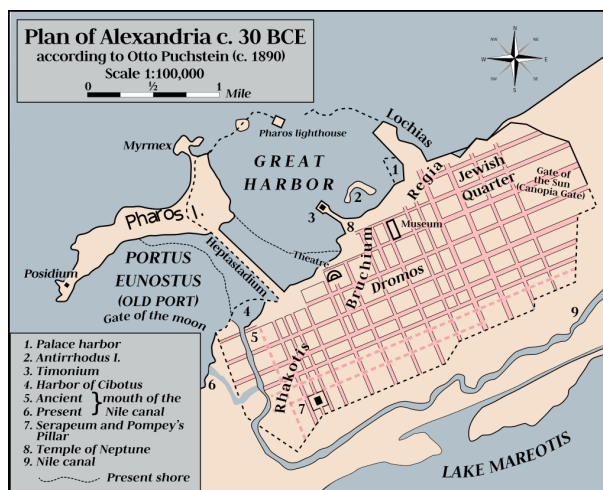
### 3 Geometrie ve škole

„Geometrie by měla být od samého začátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti. Základem zde mohou být zkušenosti s dělením prostoru, s vyplňováním prostoru, s pohybem v prostoru a s dimenzí prostoru.“ (František Kuřina, [8], str. 40)

Uvedené čtyři způsoby nakládání s prostorem tvoří základní rámec našeho poznávání geometrie v předmětu *Základy geometrie*.

- Prostor lze dělit na části  
bod, přímka, úsečka, kružnice, trojúhelník, rovina, bod dělí přímku, přímka rovinu, rovina prostor, kružnice dělí rovinu atd.  
Jordanova věta: *Rovinná křivka, která sama sebe neprotíná a je uzavřená, dělí rovinu na dvě oblasti.* [8]
- Části prostoru lze vyplňovat  
obsah útvaru, délka úsečky, dělení roviny čtvercovou sítí, Jordanova teorie míry, dlažba, Escher, problém čtyř barev, objem tělesa, Keplerova domněnka
- V prostoru se lze pohybovat  
vektory, shodné transformace, rýsování, modelování
- V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální, jednodimenzionální  
krychle a její obrázek, koule a její stín, průměty trojrozměrného útvaru do roviny

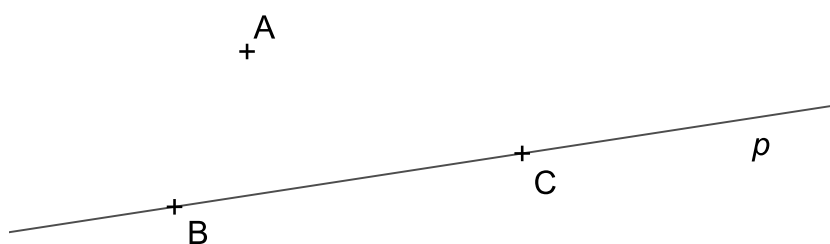
## 4 Geometrické útvary v rovině



Obrázek 12: Plán starověké Alexandrie, <https://commons.wikimedia.org>

Jestliže rovinu chápeme jako množinu bodů, potom uvažované geometrické útvary jsou jejími podmnožinami. Jedná se o abstraktní objekty, jejichž předobrazem jsou jevy a vlastnosti reálného prostoru.

### 4.1 Body, přímky, polopřímky, poloroviny

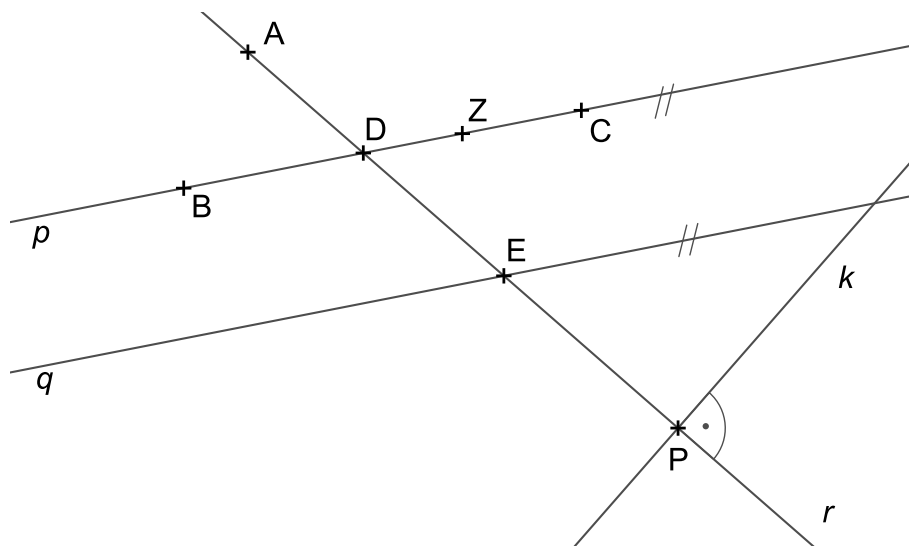


Obrázek 13: Body, přímka, úsečka

Viz Obr. 13:

Přímka $p$ je určena body $B, C$	$p = \leftrightarrow BC$
Bod $B$ leží na přímce $p$	$B \in p$
Bod $A$ neleží na přímce $p$	$A \notin p$
Úsečka s krajními body $A, B$	$AB$



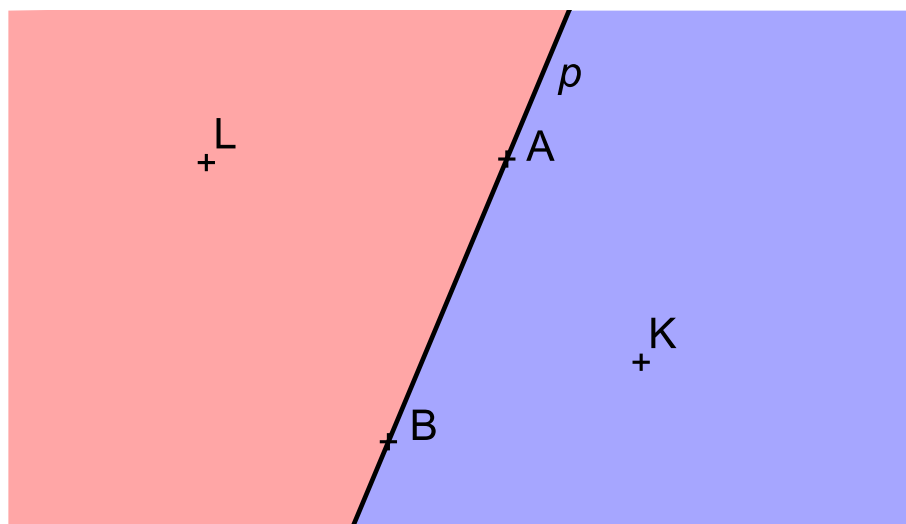


Obrázek 14: Přímky rovnoběžné a různoběžné, polopřímky

*Polopřímka* je část přímky určená *počátkem* a aspoň jedním *vnitřním bodem*.

Viz Obr. 14:

Přímky $p, q$ jsou rovnoběžné (rovnoběžky)	$p \parallel q$
Přímky $\leftrightarrow BC, q$ jsou rovnoběžné	$\leftrightarrow BC \parallel q$
Přímky $p, r$ nejsou rovnoběžné (v rovině jsou tedy různoběžné)	$p \not\parallel r$
Přímky $m, n$ jsou splývající (totožné) (též pokládáme za rovnoběžné) ( <i>Pozn.: Nejsou na Obr. 14</i> )	$m = n$
Polopřímka s počátkem $D$ jdoucí bodem $C$	$\mapsto DC$
Bod $Z$ je bodem polopřímky $\mapsto DC$	$Z \in \mapsto DC$
Opačné polopřímky se společným počátkem $D$	$\mapsto DC, \mapsto DB$
Bod $D$ je průsečíkem přímek (různoběžek) $p$ a $r$	$D \in p \cap r$
Přímky $k, r$ jsou navzájem kolmé (kolmice), tj. $k$ je kolmá (kolmice) k $r$ a naopak, $r$ je kolmá (kolmice) ke $k$	$k \perp r$ $r \perp k$
Bod $P$ je patou kolmice kolmice $k$	$P \in k \cap r \wedge k \perp r$



Obrázek 15: Polorovina, opačné poloroviny

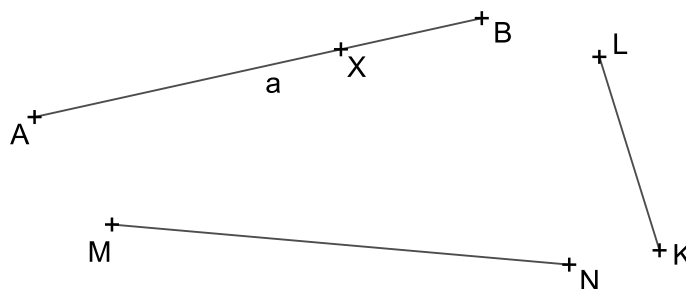
*Polorovina* je část roviny určená *hraniční přímkou* a aspoň jedním *vnitřním bodem*.

Viz Obr. 15:

Polorovina s hraniční přímkou $\leftrightarrow BC$ a vnitřním bodem $K$	$\mapsto BCK$
Polorovina s hraniční přímkou $p$ a vnitřním bodem $K$	$\mapsto pK$
Hraniční přímka $p$ náleží polorovině $\mapsto pK$ (tj. je její podmnožinou)	$p \subset \mapsto pK$
Body $A, K$ leží v polorovině $\mapsto pK$ (přitom $A$ je bodem její hraniční přímky, $K$ je její vnitřní bod)	$A \in \mapsto pK$ $K \in \mapsto pK$
Opačné poloroviny se společnou hraniční přímkou $p$ , jedna s vnitřním bodem $K$ , druhá s vnitřním bodem $L$	$\mapsto pK$ $\mapsto pL$

## 4.2 Úsečky

Úsečka je část přímky ohraničená dvěma body (*krajní body*). Též můžeme říci, že je to přímá spojnice těchto dvou bodů.



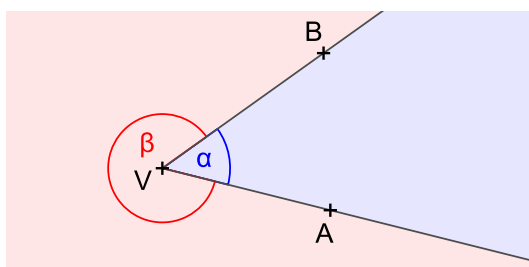
Obrázek 16: Úsečka  $AB$

Viz Obr. 16:

Úsečka s krajními body $A, B$	$AB$ nebo $BA$
Úsečka $a$ s krajními body $A, B$	$a = AB$
Bod $X$ je vnitřním bodem úsečky $a$	$X \in a$ nebo $X \in AB$
Délka úsečky $AB$	$ AB $
Úsečky $AB$ a $MN$ mají stejné délky	$ AB  =  MN $
Úsečky $AB$ a $KL$ nemají stejné délky	$ AB  \neq  KL $

### 4.3 Úhly

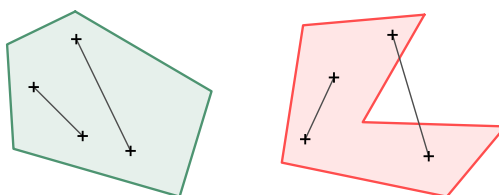
*Úhel* je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami (*ramena úhlu*) se společným počátkem (*vrchol úhlu*).



Obrázek 17: Úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ;  $\alpha$  je konvexní,  $\beta$  je nekonvexní

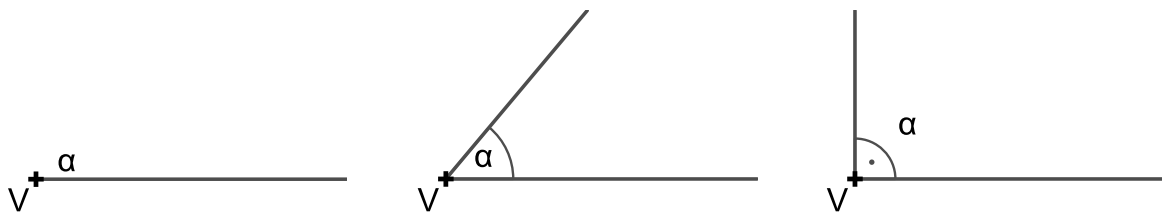
Dvě ramena spolu s vrcholem tvoří dva úhly, viz Obr. 17. Potřebujeme-li je rozlišit, použijeme přívlastky *konvexní*, *nekonvexní*, pokud nejsou oba úhly *přímé* (místo pojmu *nekonvexní úhel* se někdy používá též označení *dutý úhel* nebo *konkávní úhel*).

Další možností je uvažovat dané úhly jako orientované (tj. rozlišovat u nich mezi *prvním* a *druhým* ramenem) a zadat je v témže smyslu (*kladném*, proti směru pohybu hodinových ručiček, nebo *záporném*, po směru pohybu hodinových ručiček). Zadání úhlů z Obr. 17 v kladném smyslu by potom vypadala takto:  $\alpha = \sphericalangle AVB$ ,  $\beta = \sphericalangle BVA$ .

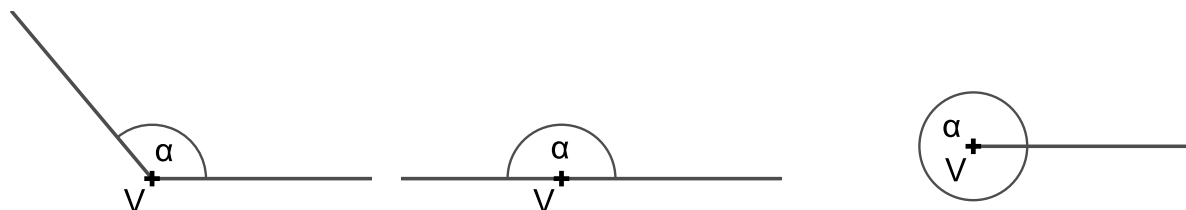


Obrázek 18: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

**Poznámka** (*Konvexní a nekonvexní (konkávní) útvar*). Útvar (množina bodů) je *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 18, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 18, vpravo.



Obrázek 19: Úhel  $\alpha$ : nulový ( $\alpha = 0^\circ$ ), ostrý ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), pravý ( $\alpha = 90^\circ$ )



Obrázek 20: Úhel  $\alpha$ : tupý ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), přímý ( $\alpha = 180^\circ$ ), plný ( $\alpha = 360^\circ$ )

Na obrázcích 19 a 20 jsou postupně zobrazeny tyto úhly: *nulový, ostrý, pravý, tupý, přímý a plný*.

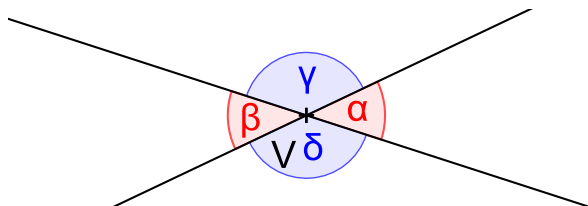
**PŘÍKLAD 4.1.** *Rozhodněte, které z úhlů na obrázcích 19 a 20 jsou konvexní a které jsou nekonvexní.*

Dva úhly, které mají stejnou velikost, nazýváme *shodné úhly*.

Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ mají stejnou velikost	$ \sphericalangle AVB  =  \sphericalangle MUN $
Úhly $\alpha$ a $\beta$ mají stejnou velikost	$\alpha = \beta$
Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ jsou shodné	$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle MUN$
Úhly $\alpha$ a $\beta$ jsou shodné	$\alpha \cong \beta$

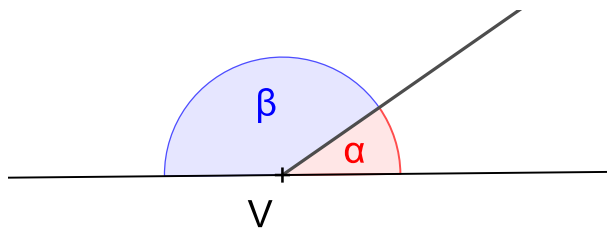
## Dvojice úhlů

Dvojice shodných úhlů se společným vrcholem, jejichž ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vrcholové úhly*. Na Obr. 21 jsou dvě dvojice vrcholových úhlů:  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ ,  $\delta$ .



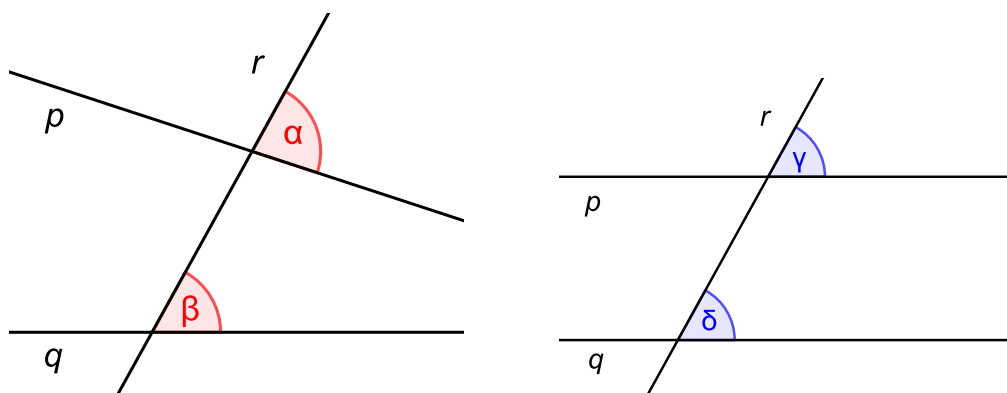
Obrázek 21: Vrcholové úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ , resp.  $\gamma$ ,  $\delta$

Dvojice konvexních úhlů, které mají jedno rameno společné a jejichž zbývající ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vedlejší úhly*. Na Obr. ?? je dvojice vedlejších úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ . Je zřejmé, že součtem vedlejších úhlů je přímý úhel, tj.  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

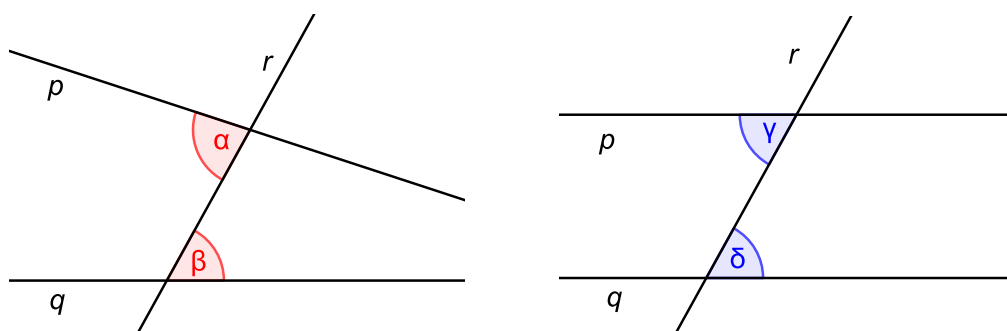


Obrázek 22: Vedlejší úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ;  $\alpha + \beta = 180^\circ$

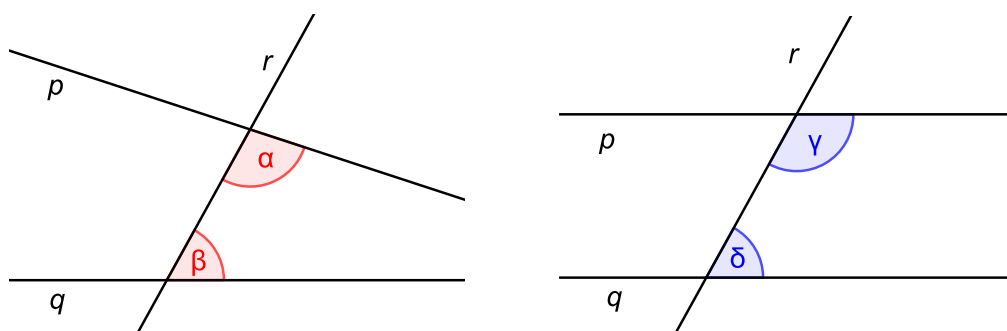
Pokud dvě přímky ( $p, q$ , viz Obr. 23, 24, 25) protneme třetí přímkou ( $r$ , viz Obr. 23, 24, 25), vznikají tři dvojice úhlů: *úhly souhlasné*, *úhly střídavé* a *úhly přilehlé*. Pokud jsou ony dvě přímky  $p, q$  rovnoběžné (viz Obr. 23, 24, 25, vždy vpravo), jsou úhly souhlasné stejně jako střídavé shodné, zatímco součet úhlů přilehlých je  $180^\circ$  (viz též Obr. 10 na str. 13)



Obrázek 23: Souhlasné úhly;  $\alpha \neq \beta$ , ale  $\gamma = \delta$



Obrázek 24: Střídavé úhly;  $\alpha \neq \beta$ , ale  $\gamma = \delta$



Obrázek 25: Přilehlé úhly;  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ , ale  $\gamma + \delta = 180^\circ$

## 4.4 Kružnice

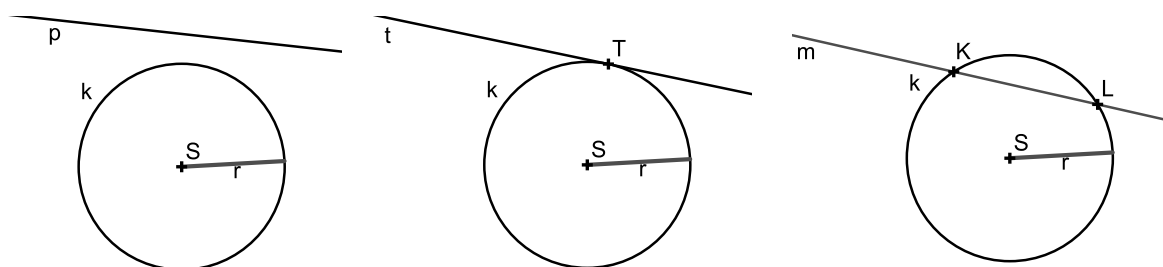


Obrázek 26: Centrální zavlažování polí, Kansas, USA (Google Maps)

*Kružnice*  $k$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od  $S$  je rovna  $r$ , značíme  $k(S, r)$ .

*Kruh*  $K$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od  $S$  je menší nebo rovna  $r$ , značíme  $K(S, r)$ .

Rozlišujeme tři případy vzájemné polohy přímky a kružnice: *vnější přímka kružnice* (viz Obr. 27, vlevo), *tečna kružnice* (viz Obr. 27, uprostřed; tečna  $t$  s bodem dotyku  $T$ ), *sečna kružnice*

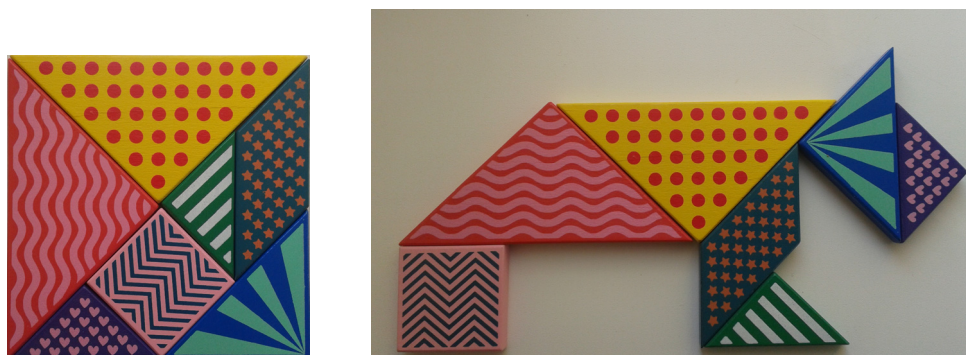


Obrázek 27: Vzájemná poloha přímky a kružnice

Úsečku spojující dva různé body kružnice nazýváme *tětiva kružnice*. Na Obr. 27, vpravo, je tětiva  $KL$ , která je částí sečny  $m$ , tj.  $KL \subset m$ .

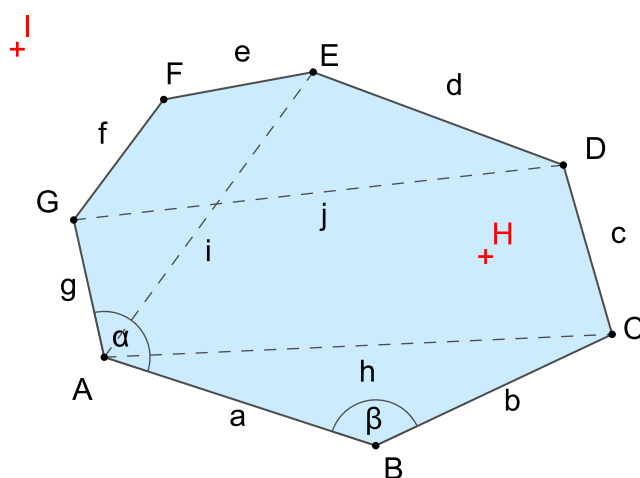


## 4.5 Mnohoúhelníky



Obrázek 28: Tangram

*Mnohoúhelník* můžeme charakterizovat jako část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou (tj. čarou, která se skládá z na sebe navazujících úseček). Již víme, že rozlišujeme *konvexní* a *nekonvexní* mnohoúhelníky, viz str. 20.



Obrázek 29: Mnohoúhelník, konkrétně konvexní 7-úhelník

Mnohoúhelník s  $n$  vrcholy nazýváme  $n$ -úhelník. Rozlišujeme u něj *vrcholy* (viz Obr. 29, body  $A, B, C, D, E, F, G$ ), *strany* ( $a, b, c, d, e, f, g$ ), *vnitřní* a *vnější body* (viz např. body  $H, I$ , v daném pořadí), *úhlopříčky* (viz např.  $h, i, j$ ) a *vnitřní úhly* (viz např.  $\alpha, \beta$ ).

**PŘÍKLAD 4.2.** *Kolik úhlopříček má  $n$ -úhelník? Vyřešte nejprve pro  $n = 5$ , potom hledejte obecný vztah.*

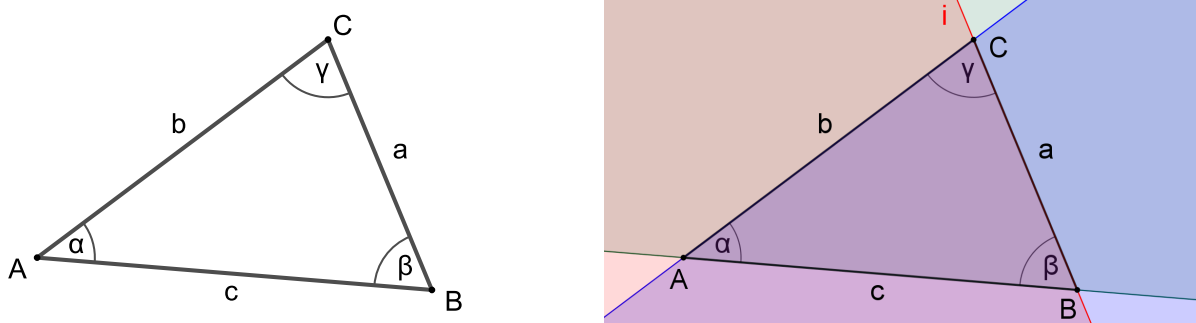
**Poznámka.** Nezapomínejme na to, že pojmem *mnohoúhelník* rozumíme rovinný útvar, jehož vrcholy (strany) leží v jedné rovině. To samozřejmě platí i pro speciální mnohoúhelníky, jako je čtverec, obdélník, pravidelný  $n$ –úhelník apod. Pokud neleží všechny vrcholy  $n$ –úhelníku v rovině, hovoříme o *prostorovém  $n$ –úhelníku*, viz Obr. 30.



Obrázek 30: Prostorové čtyřúhelníky tvoří základ systému zastřešení autobusového nádraží v Českých Budějovicích (plochy, které je vyplňují se nazývají *hyperbolické paraboloidy*). (Fotografie byla pořízena s laskavým svolením Správy Mercury centra)

## 4.6 Trojúhelník

*Trojúhelník* je mnohoúhelník se třemi vrcholy. Patří do něj i vnitřní body. Definujeme ho tedy jako průnik tří polorovin, na Obr. 31, kde vidíme trojúhelník  $ABC$ , se jedná o poloroviny  $\mapsto ABC, \mapsto CAB, \mapsto BCA$ . Všimněme si, že u trojúhelníku, ne rozdíl od obecného mnohoúhelníku na



Obrázek 31: Trojúhelník  $ABC$  a jeho vznik průnikem tří polorovin

Obr. 29, značíme strany podle *protilehlého vrcholu*.

Pokud není trojúhelník *zdegenerován* do úsečky, jeho vrcholy neleží v jedné přímce. O takových bodech říkáme, že jsou *nekolineární*. Naopak, body (nemusí být tři, může jich být více) ležící v jedné přímce nazýváme *kolineární* body. Obdobně se setkáme s pojmem *komplanární*, pro body ležící v jedné rovině.

Trojúhelník je mezi obecnými mnohoúhelníky unikátní tím, že je jednoznačně určen svými stranami (známe jeho konstrukci podle věty *sss*<sup>1</sup>). Pro ostatní mnohoúhelníky, pokud ovšem nepočítáme speciální typy jako je čtverec, obdélník, lichoběžník a pravidelný *n*-úhelník, toto neplatí, viz Obr. 32.



Obrázek 32: Na rozdíl např. od čtyřúhelníku je trojúhelník jednoznačně určen svými stranami



Obrázek 33: Součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí (*trojúhelníková nerovnost*)

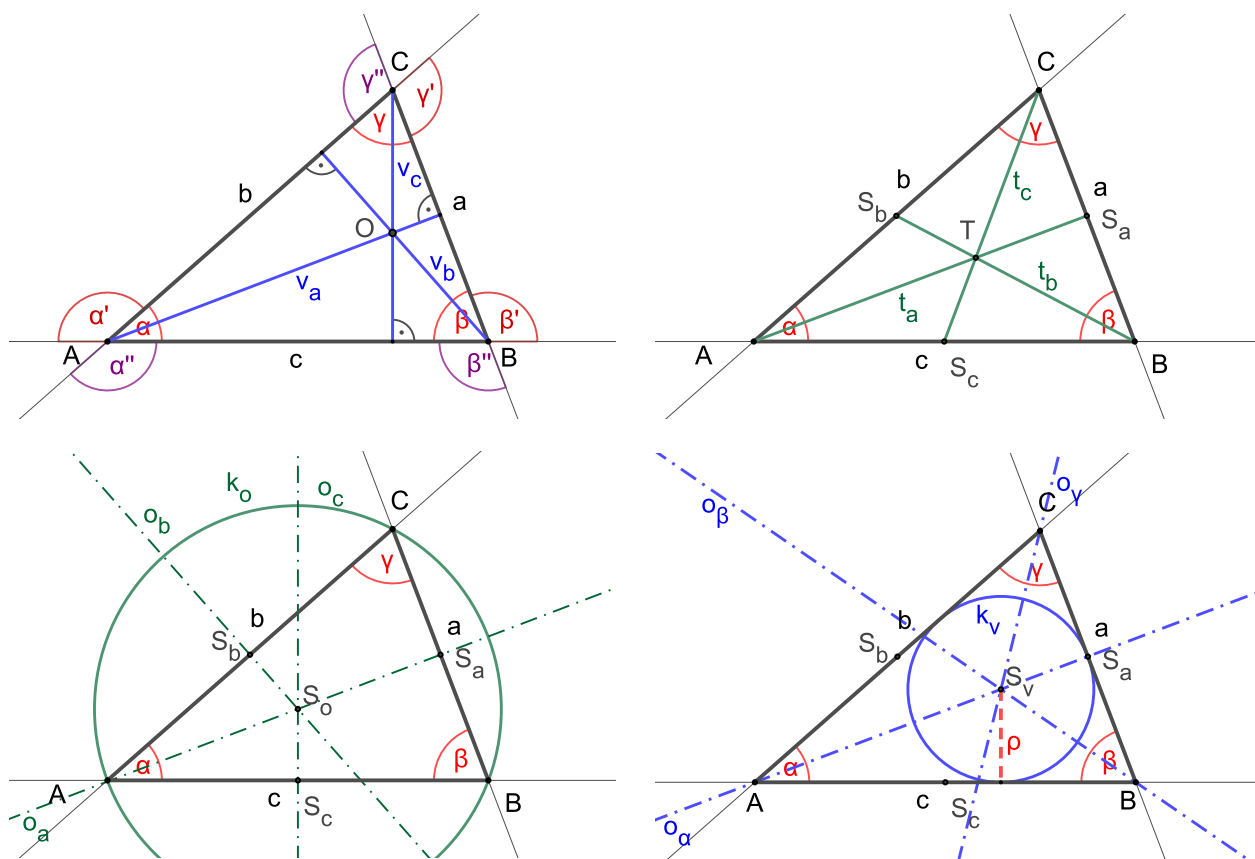
Aby tři úsečky mohly být stranami trojúhelníku, musí splňovat *trojúhelníkovou nerovnost*, viz Obr. 33. Tato základní vlastnost trojúhelníku je zmíněna jako věta 10 na str. 12.

Podle délek stran trojúhelníku rozlišujeme zvláštní typy trojúhelníků, jako jsou *rovnostanné*, *rovnoramenné* nebo *pravoúhlé* (jestliže délky stran

<sup>1</sup>Věta *sss* patří mezi věty o shodnosti trojúhelníků, říká: *Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech stranách, jsou shodné*. Dalšími větami o shodnosti trojúhelníků jsou: *sus*, *usu* a *Ssu*.

trojúhelníku splňují obrácenou větu k Pythagorově větě, viz věty 7 a 8 na str. 11, je to trojúhelník pravoúhlý).

U libovolného trojúhelníku bychom měli umět rozeznat i sestavit tyto prvky (viz Obr. 34): *výšky* ( $v_a, v_b, v_c$ ), *těžnice* ( $t_a, t_b, t_c$ ), *osy stran* ( $o_a, o_b, o_c$ ), *osy úhlů* ( $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$ ), *ortocentrum* (průsečík výšek) ( $O$ ), *těžiště* ( $T$ ), *kružnice opsaná* ( $k_o$ ), *kružnice vepsaná* ( $k_v$ , *vnitřní úhly* ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), *vnější úhly* ( $\alpha', \beta', \gamma'$  a  $\alpha'', \beta'', \gamma''$ )).

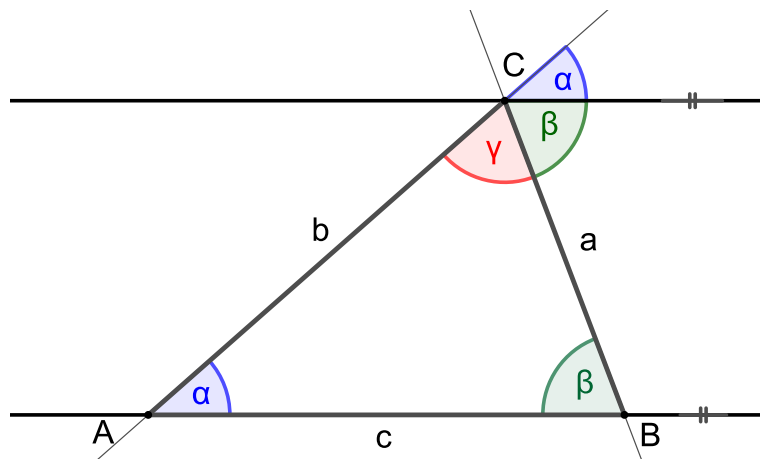


Obrázek 34: Prvky trojúhelníku  $ABC$

Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je  $180^\circ$ , tj. pro trojúhelník  $ABC$  na Obr. 34 platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jednoduchý vizuální důkaz tohoto tvrzení, založený na rovnostech dvojice úhlů souhlasných a dvojice úhlů opačných pro rovnoběžné přímky, viz str. 23, je uveden na Obr. 35.



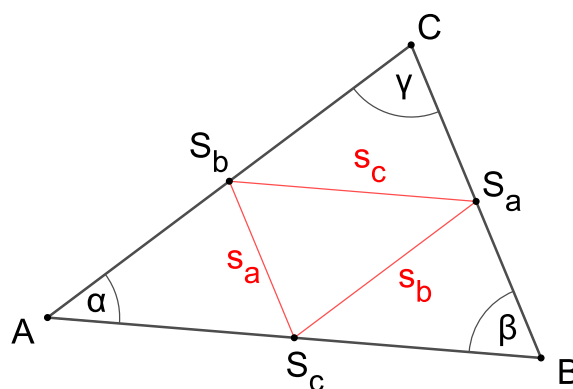
Obrázek 35: Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je  $180^\circ$

Podle velikostí vnitřních úhlů rozlišujeme trojúhelníky *ostroúhlé*, *pravoúhlé* a *tupoúhlé*, klasifikace úhlů viz str. 21.

**PŘÍKLAD 4.3.** *Kolik ostrých, tupých či pravých vnitřních úhlů může mít trojúhelník?*

**PŘÍKLAD 4.4.** *Jaký je vztah mezi vnějším úhlem trojúhelníku (např.  $\alpha'$  na Obr. 34) a jemu protilehlými vnitřními úhly (pro vnější úhel  $\alpha'$  na Obr. 34 to jsou úhly  $\beta$  a  $\gamma$ )?*

Úsečku, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku nazýváme *střední příčka*. V trojúhelníku lze sestavit tři střední příčky, viz  $s_a, s_b, s_c$  na Obr. 36. Platí pro ně následující věta.



Obrázek 36: Střední příčky  $s_a, s_b, s_c$  trojúhelníku  $ABC$



**Věta 12** (Střední příčky trojúhelníku). *Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jednou z jeho stran (s níž nemá společný bod) a její délka je rovna polovině délky této strany.*

**PŘÍKLAD 4.5.** *Střední příčky rozdělují trojúhelník (viz např.  $\triangle ABC$  na Obr. 36) na čtyři menší trojúhelníky. Jaký je vztah těchto trojúhelníků mezi sebou a k  $\triangle ABC$ ? Odpověď vám pomohou nalézt známé vztahy mezi úhly souhlasnými, resp. střídavými. Pokuste se zjištěné skutečnosti využít k důkazu věty 12.*

## Eukleidovské konstrukce trojúhelníku

Uvažujeme-li tyto prvky trojúhelníku: *strany* ( $a, b, c$ ), *vnitřní úhly* ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), *výšky* ( $v_a, v_b, v_c$ ), *těžnice* ( $t_a, t_b, t_c$ ), *osy vnitřních úhlů* ( $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$ ), *poloměr kružnice opsané* ( $r$ ), *poloměr kružnice vepsané* ( $\rho$ ), existuje 150 možností, jak třemi z nich trojúhelník  $ABC$  zadat, např.  $[a, b, c]$ ;  $[a, \alpha, v_a]$ ;  $[o_\alpha, o_\beta, o_\gamma]$ ;  $[\alpha, v_b, t_c]$  apod. Přitom 98 z nich lze sestrojít eukleidovsky (užitím kružítka a pravítka), zbylých 52 nikoliv. Přehled řešení všech 98 úloh najde zájemce v publikaci [12]. Zkuste si některou z nich sestrojít, třeba tu následující, zadanou v příkladu 4.6.

**PŘÍKLAD 4.6.** *Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , jsou-li dány jeho těžnice  $t_a, t_b, t_c$ .*

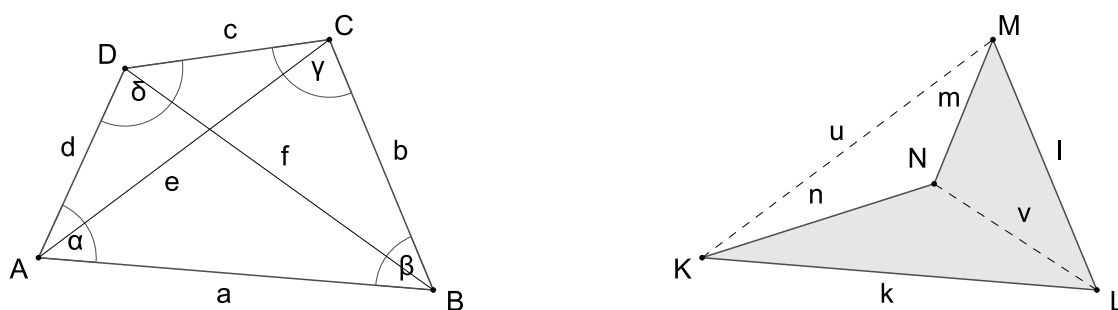
## 4.7 Čtyřúhelníky

*Čtyřúhelník* je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy. Dále se budeme zabývat pouze konvexními čtyřúhelníky, jako je čtyřúhelník  $ABCD$  na Obr. 37.

Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je  $360^\circ$ . Tj. pro čtyřúhelník  $ABCD$  na Obr. 37 platí

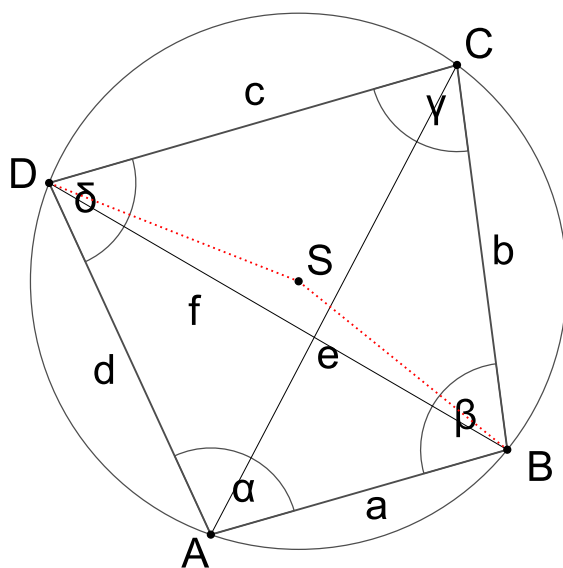
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

**PŘÍKLAD 4.7.** *Dokažte výše uvedené tvrzení, že součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je  $360^\circ$ .*



Obrázek 37: Čtyřúhelník konvexní  $ABCD$  a nekonvexní  $KLMN$

Čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici nazýváme *tětivové čtyřúhelníky*, viz Obr. 38. Jejich unikátní vlastností je, že součet protilehlých úhlů je  $180^\circ$ . Pokuste se tuto vlastnost dokázat.



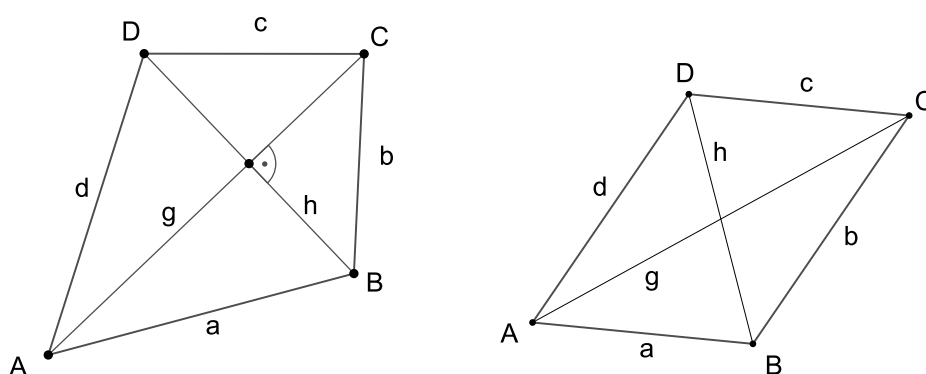
Obrázek 38: Tětivový čtyřúhelník  $ABCD$ ;  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$

Čtyřúhelník, který je osově souměrný podle jedné z úhlopříček, nazýváme *deltoid*. Je zřejmé, že má úhlopříčky vzájemně kolmé a jeho strany jsou po dvojicích shodné.

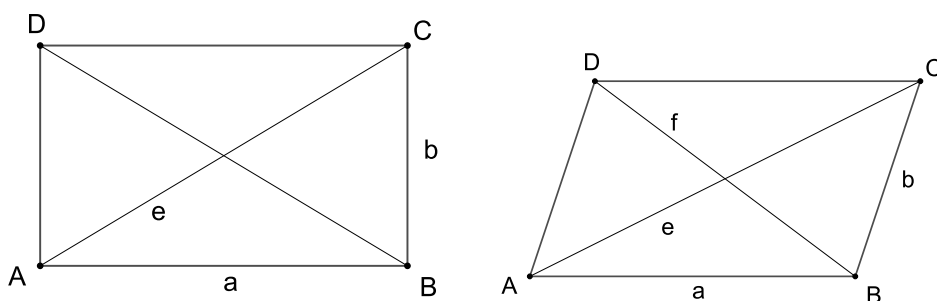
Dalšími speciálními typy čtyřúhelníků jsou *obdélník* (protější strany shodné, sousední strany různé, všechny úhly pravé), *čtverec* (všechny strany shodné a sousední vždy vzájemně kolmé) a *lichoběžník* (dvě protilehlé strany rovnoběžné, nazýváme je *základny*, zbývající dvě strany různoběžné, nazý-

váme je *ramena*). Pokud jsou ramena lichoběžníku shodná, nazýváme ho *rovnoramenný* lichoběžník.

Čtyřúhelník, jehož protější strany jsou navzájem rovnoběžné, nazýváme *rovnoběžník*. Protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé. Rovnoběžníky, jejichž sousední strany nejsou k sobě kolmé, můžeme rozdělit na *kosodélníky* a *kosočtverce*. Pokud jsou sousední strany rovnoběžníku k sobě kolmé, jedná se o *obdélník* (sousední strany mají různé délky) nebo *čtverec* (všechny strany jsou stejně dlouhé).

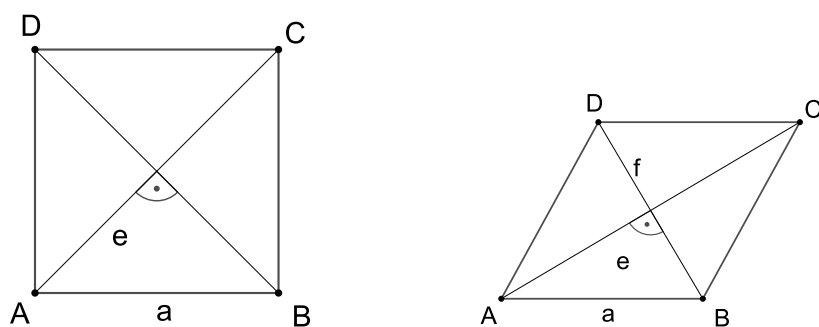


Obrázek 39: Deltoid (vlevo) a rovnoběžník (vpravo)

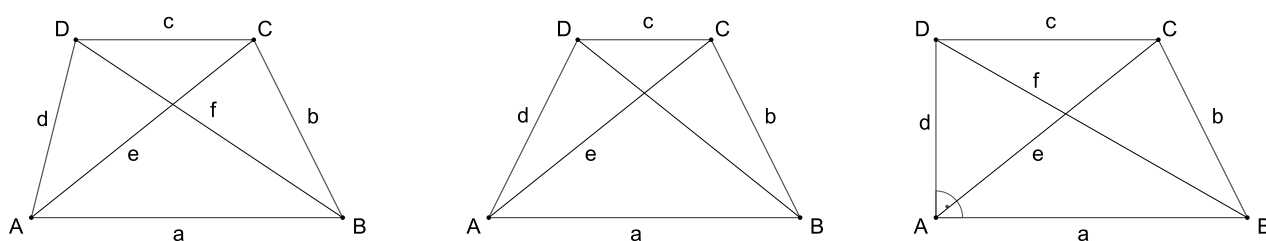


Obrázek 40: Obdélník (vlevo) a kosodélník (vpravo)

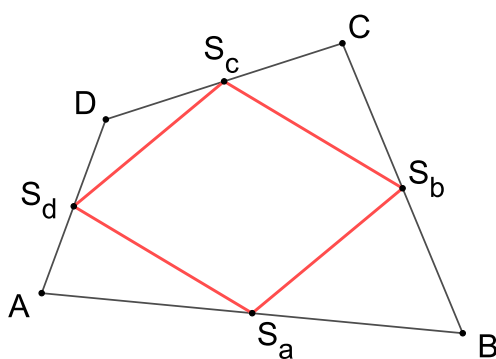




Obrázek 41: Čtverec (vlevo) a kosočtverec (vpravo)



Obrázek 42: Lichoběžník (vlevo), rovnoramenný lichoběžník (uprostřed) a pravoúhlý lichoběžník (vpravo)



Obrázek 43: Varignonova věta

Pro libovolný čtyřúhelník platí následující věta pojmenovaná po francouzském matematikovi Pierru Varignonovi (1654-1722).

**Věta 13** (Varignonova věta). *Středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník (jehož stranami jsou střední příčky rovnoběžníku), viz Obr. 43.*

**PŘÍKLAD 4.8.** *Pokuste se větu 13 dokázat. Využijte při tom větu 12 o středních příčkách trojúhelníku.*

## 4.8 Pravidelné mnohoúhelníky ( $n$ -úhelníky)



Obrázek 44: Jednoduchá dlažba – pravidelné šestiúhelníky

*Pravidelným mnohoúhelníkem* (též *pravidelným  $n$ -úhelníkem*) rozumíme mnohoúhelník, který má všechny strany a všechny úhly shodné. Pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice jsou soustředné a jejich střed nazýváme *středem (pravidelného) mnohoúhelníku*.

**PŘÍKLAD 4.9.** *Pravidelný  $n$ -úhelník má všechny vnitřní úhly stejně velké. Jak závisí jejich velikost na  $n$ , tj. na počtu vrcholů  $n$ -úhelníku? Odvoďte obecný vztah vyjadřující závislost vnitřního úhlu  $\alpha$  na  $n$ .*

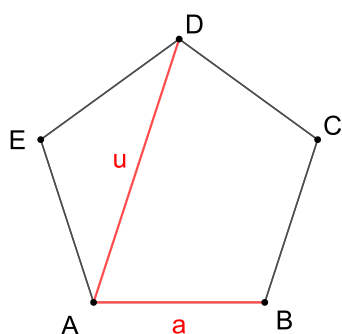
Na Obr. 44 vidíme dlažbu z pravidelných šestiúhelníků. Vidíme, že tyto dlaždice lze uspořádat tak, aby souvisle pokryly celou rovinu (Proč?). Nabízí se tak otázka, jakými pravidelnými  $n$ -úhelníky jednoho druhu můžeme takto pokrýt rovinu. Odpovědí je, že to jde těmito  $n$ -úhelníky: *rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem*. Proč to nejde pro jiné pravidelné  $n$ -úhelníky? Pro pravidelný pětiúhelník vidíme odpověď na Obr. 45.

### **Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku**

Poměr délky úhlopříčky  $u$  a strany  $a$  pravidelného pětiúhelníku je roven  $\frac{u}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ , viz Obr. 46. Tento poměr, který se tradičně označuje



Obrázek 45: Kombinovaná dlažba – pravidelné pětiúhelníky a kosočtverce



$$\frac{u}{a} = \frac{3.2360679775}{2} = 1.6180339887$$

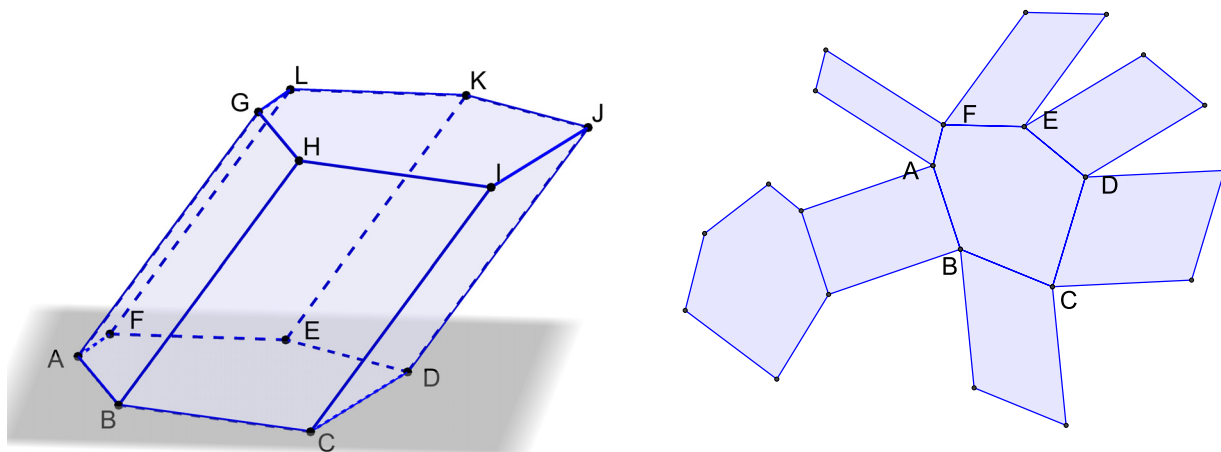
Obrázek 46: Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

písmenem  $\phi$ , nazýváme *zlatý řez*. Pro svoji estetickou působivost je poměr zlatého řezu také označován jako „poměr oku lahodící“. Pro jeho slovní definici si představme úsečku délky  $x + y$ , kterou rozdělíme na dvě nestejně části, větší  $x$  a menší  $y$ . Úsečka je jimi rozdělena v poměru zlatého řezu  $\phi$ , jestliže poměr větší z nich ku menší je roven poměru celé úsečky ku větší části, tj.  $\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x}$ . Po úpravě dostaneme  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$ , odkud vychází  $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

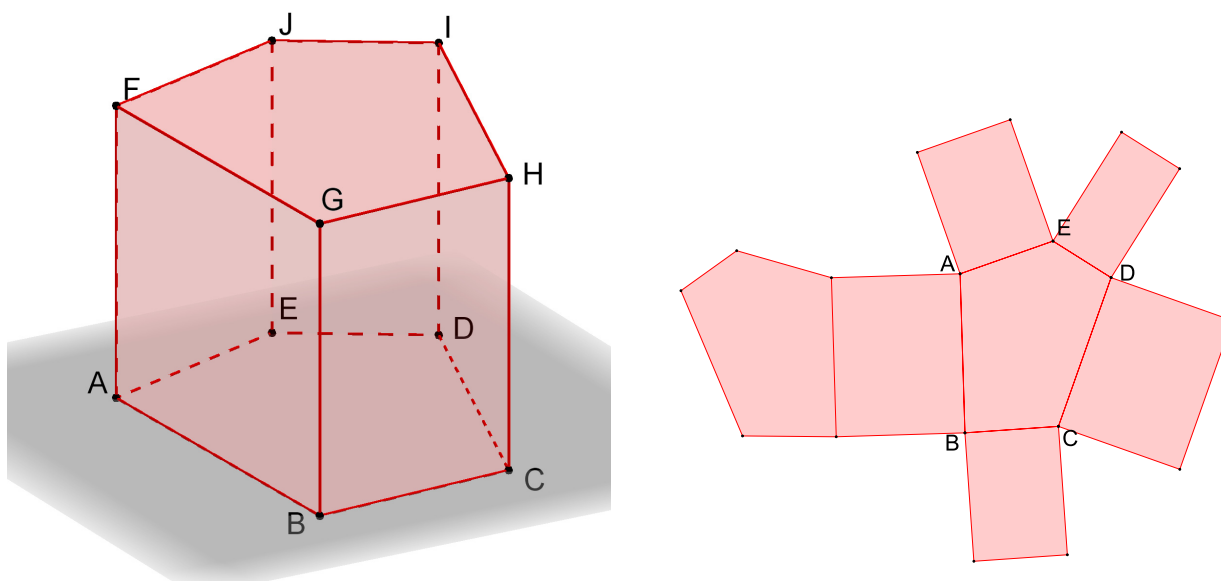
## 5 Geometrické útvary v trojrozměrném prostoru

### 5.1 Tělesa

Zaměříme se na tato tělesa: *hranol*, *jehlan*, *válec*, *kužel* a *koule*. U hranolu pak na některé jeho speciální případy: *kolmý hranol*, *kosý hranol*, *pravidelný hranol*, *kvádr*, *krychle*, *rovnoběžnostěn*.



Obrázek 47: Kosý šestiboký hranol a jeho síť

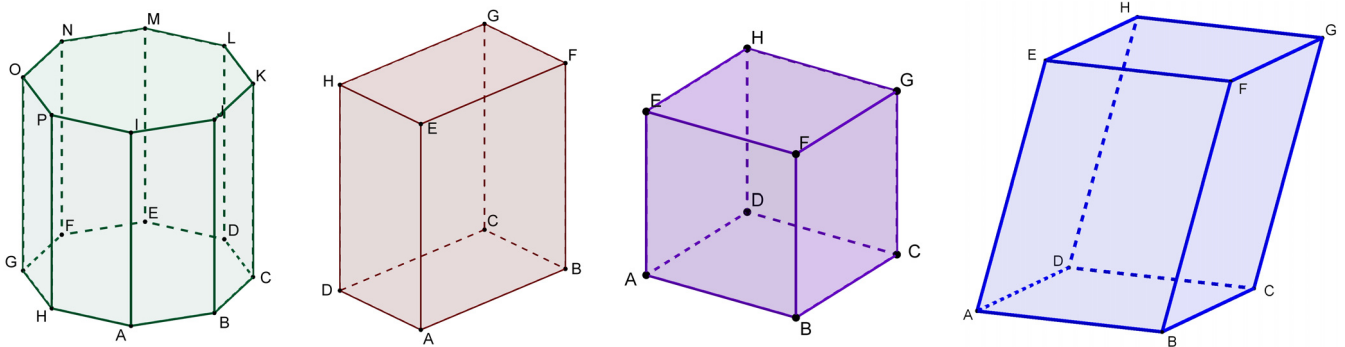


Obrázek 48: Kolmý pětiboký hranol a jeho síť

U každého *hranolu* rozlišujeme *vrcholy*, *hrany*, *stěny*, *podstavy*, *plášť*, *síť*,

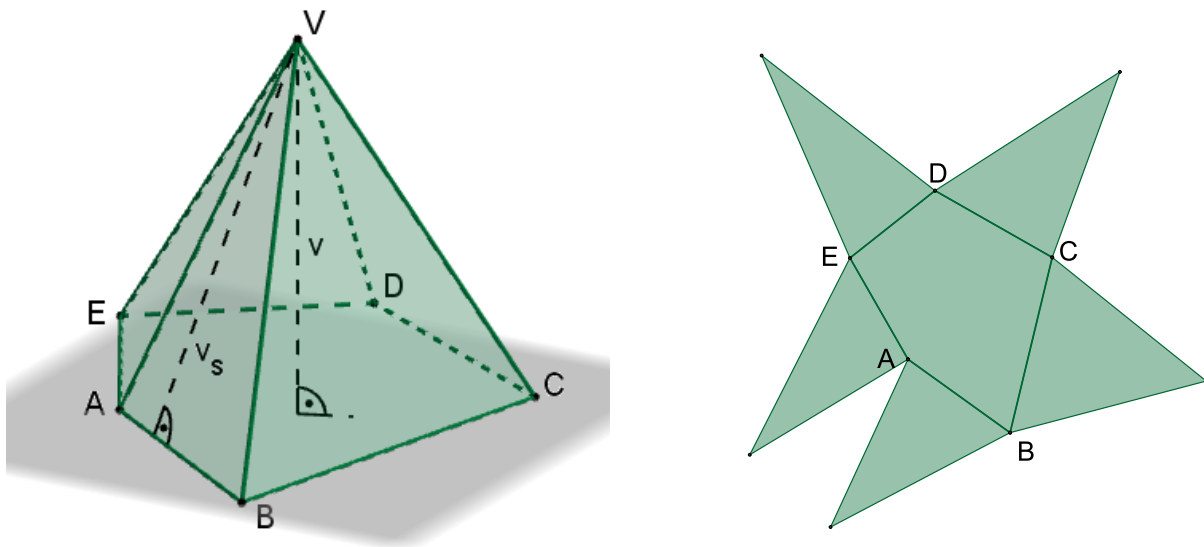
tělesové úhlopříčky, stěnové úhlopříčky.

**PŘÍKLAD 5.1.** Jaký je rozdíl mezi sítí a pláštěm hranolu? Vysvětlete s pomocí Obr. 47 a 48.

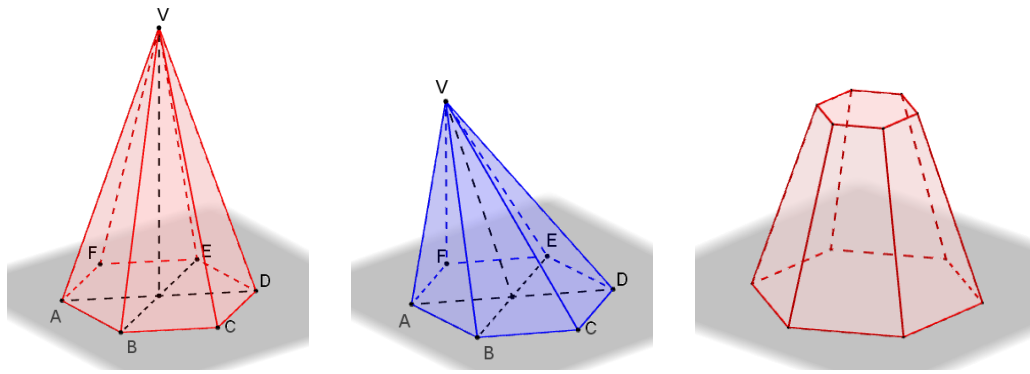


Obrázek 49: Pravidelný osmiboký hranol, kvádr, krychle a rovnoběžnostěn

U *jehlanu* rozlišujeme *hlavní vrchol* (viz  $V$  na Obr. 50), *podstavu*, *boční stěny*, *podstavné hrany*, *boční hrany*, *vrcholy podstavy* (viz  $A, B, C, D, E$  na Obr. 50), *stěnovou (boční) výšku* (viz  $v_s$  na Obr. 50) a *výšku jehlanu* (viz  $v$  na Obr. 50). Stejně jako u hranolu rozlišujeme *síť* a *plášť*, přitom *plášť jehlanu* je tvořen všemi jeho bočními stěnami.

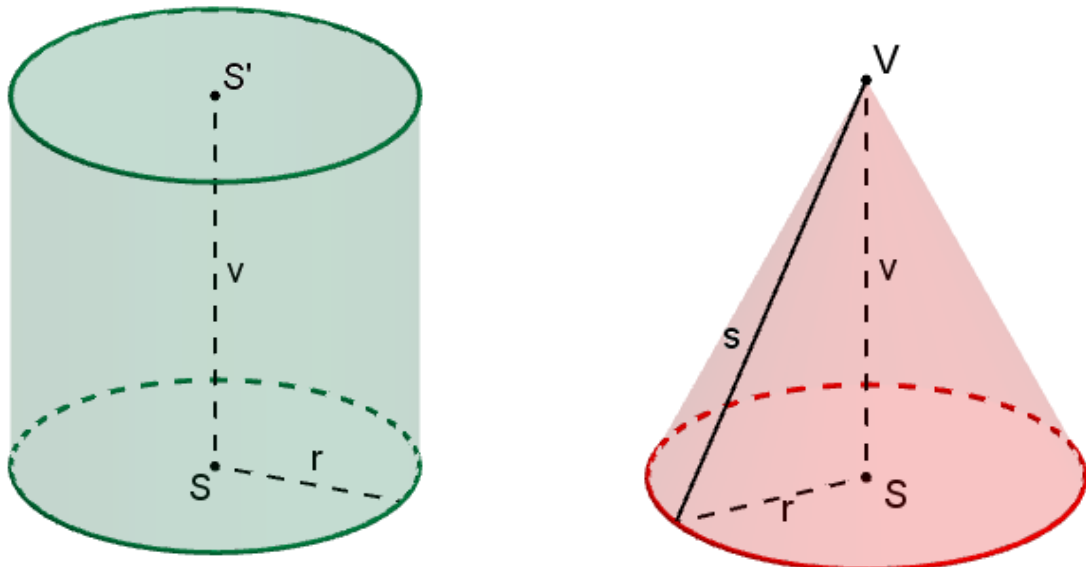


Obrázek 50: Pětiboký jehlan (obecný) a jeho síť



Obrázek 51: Pravidelný šestiboký jehlan (kolmý), kosý jehlan a komolý (kolmý šestiboký) jehlan

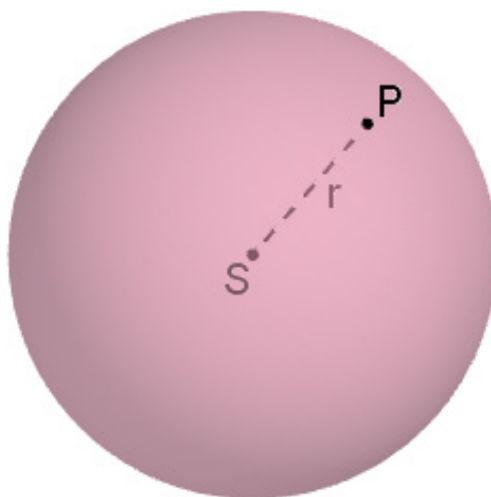
*Válec* a *kužel* jsou určeny *poloměrem podstavy* (viz  $r$  na Obr. 52) a *výškou* (viz  $v$  na Obr. 52). U obou útvarů pak rozlišujeme *podstavu* a *plášť*. U kužele navíc ještě *vrchol* (viz  $V$  na Obr. 52) a *stranu* (též *površku*) (viz  $s$  na Obr. 52).



Obrázek 52: Válec a kužel

Tak jako jsme rozlišovali *kruh* a *kružnici*, rozlišujeme v trojrozměrném prostoru *kouli* a *kulovou plochu*. Přitom *koule* je množina bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je menší nebo rovna poloměru  $r$  a *kulová plocha* je množina bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od středu  $S$  je rovna  $r$  (viz Obr. 53). Kulovou plochu nelze rozvinout do roviny, proto její síť

neexistuje.



Obrázek 53: Koule

## 5.2 Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa)

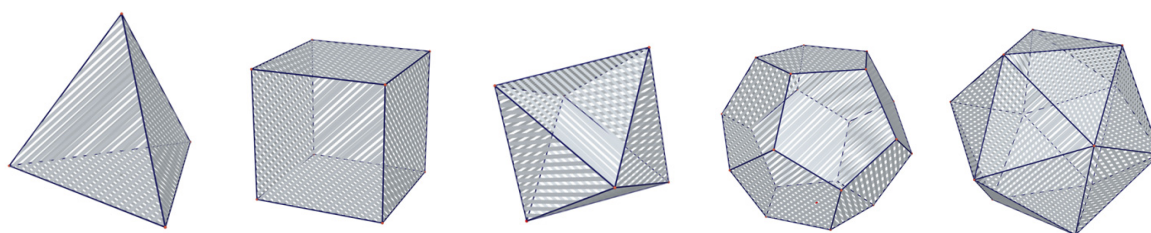


Obrázek 54: Hrací kostky jako Platónská tělesa

*Pravidelnými mnohostěny*, kterým říkáme též *platónská tělesa*, rozumíme takové *konvexní mnohostěny*, jejichž stěny jsou tvořeny shodnými pravidelnými mnohoúhelníky. Přitom v každém vrcholu pravidelného mnohostěnu se stýká stejný počet stěn ( $i$  hran).

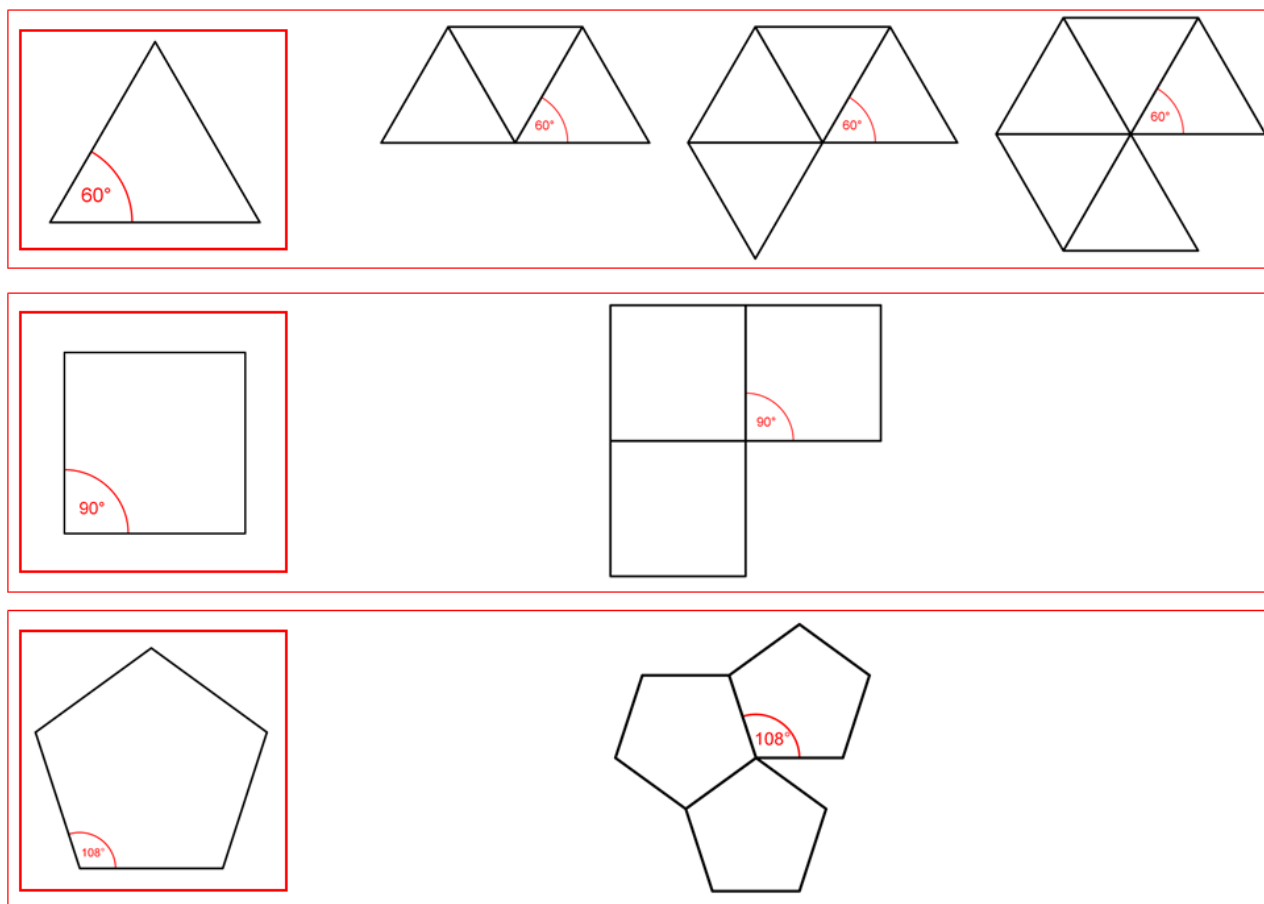
Takovýchto mnohostěňů je, jak vidíme na Obr. 55 pouze pět typů. Naši předkové této skutečnosti přikládali magický význam a tak byla tato tělesa spojována s jednotlivými živly, jako stavebními kameny našeho vesmíru (*Platon*) nebo s rozložením nebeských sfér (*Johannes Kepler*).





Obrázek 55: Platónská tělesa: čtyřstěn (tetraedr), šestistěn (krychle; hexaedr), osmistěn (oktaedr), dvanáctistěn (dodekaedr), dvacetistěn (ikosaedr)

Příčina toho, že je pravidelných mnohostěnů právě pět je přitom ryze geometrická. Souvisí s tím, že v každém vrcholu takového mnohostěnu se stýká stejný počet stěn, kterými jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.



Obrázek 56: Vznik vrcholu pravidelného mnohostěnu

**PŘÍKLAD 5.2.** Pomocí schémat na Obr. 56 vysvětlete, proč je pravidelných mnohostěnů právě pět typů.



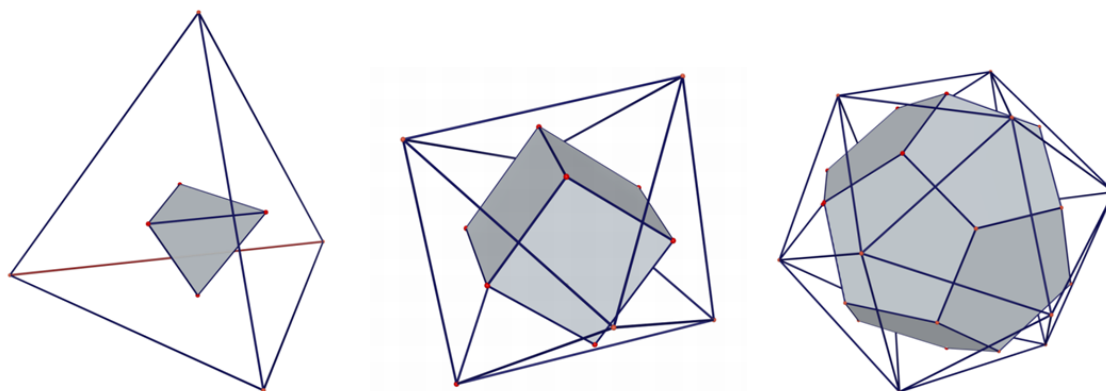
Pro konvexní mnohostěny (ne jenom pro pravidelné) platí tzv. *Eulerův vztah*, který dává dohromady počet stěn  $s$ , vrcholů  $v$  a hran  $h$ :

$$s + v - h = 2.$$

*Leonhard Euler*, 1707–1783, švýcarský matematik.

**PŘÍKLAD 5.3.** *Ověřte platnost Eulerova vztahu pro pravidelné mnohostěny.*

Při pohledu na počty stěn a vrcholů jednotlivých mnohostěňů (získaných řešením příkladu 5.3, napište si je do tabulky) odhalíme určité souvislosti: *čtyřstěn* má stejný počet vrcholů a stěn, *šestistěn* má stejný počet vrcholů jako *osmistěn* stěn a naopak, stejný vztah pak platí i pro *dvanáctistěn* a *dvacetistěn*. Říkáme, že uvedené dvojice (čtyřstěn ji tvoří sám se sebou) jsou tzv. *duální mnohostěny*, viz Obr. 57.



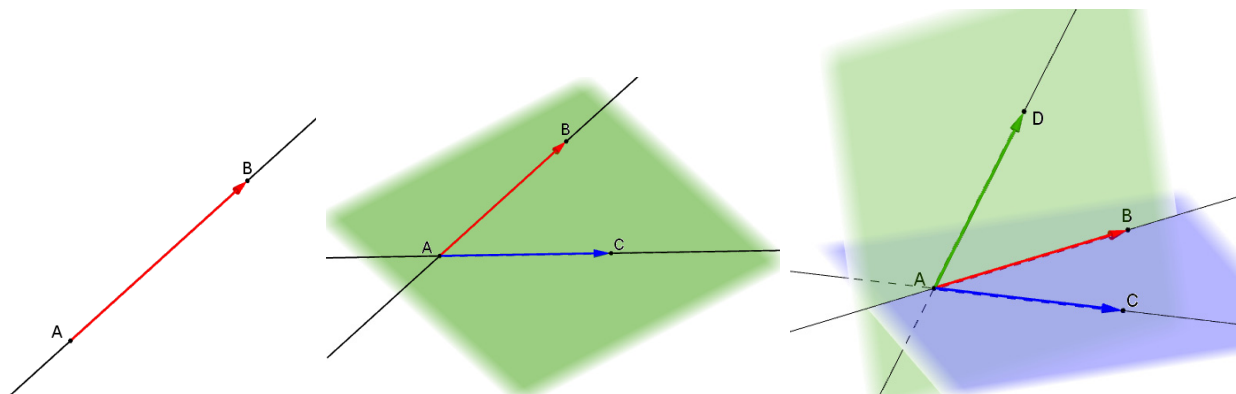
Obrázek 57: Pravidelné mnohostěny jsou duální

## 6 Dimenze bodového (pod)prostoru

Přímku, rovinu a prostor chápeme jako množiny bodů, kterým říkáme *bodové prostory*. Pokud je taková množina podmnožinou jiného prostoru, například přímka leží v rovině, nazýváme ji *bodovým podprostorem*.

Prostoru přisuzujeme *dimenzi*. Hovoříme o *jednorozměrném prostoru* (přímka) *dvojrozměrném prostoru* (rovina) nebo o *trojrozměrném prostoru* (prostor).

*Dimenzí* přitom rozumíme číslo, které udává počet nezávislých *směrů* (reprezentovaných *vektory*; představujte si je jako orientované úsečky), které lze v daném prostoru určit. Směry (vektory) jsou nezávislé, pokud žádný z nich nelze složit z těch ostatních. V přímce je jeden nezávislý směr, proto má dimenzi 1, v rovině lze určit dva nezávislé směry, má tedy dimenzi 2, konečně v prostoru, v němž žijeme, lze identifikovat tři nezávislé směry (např. dva vodorovné a jeden svislý), proto má dimenzi 3, viz Obr. 58.



Obrázek 58: Přímka má dimenzi 1, rovna 2 a (náš) prostor 3

## 7 Míra

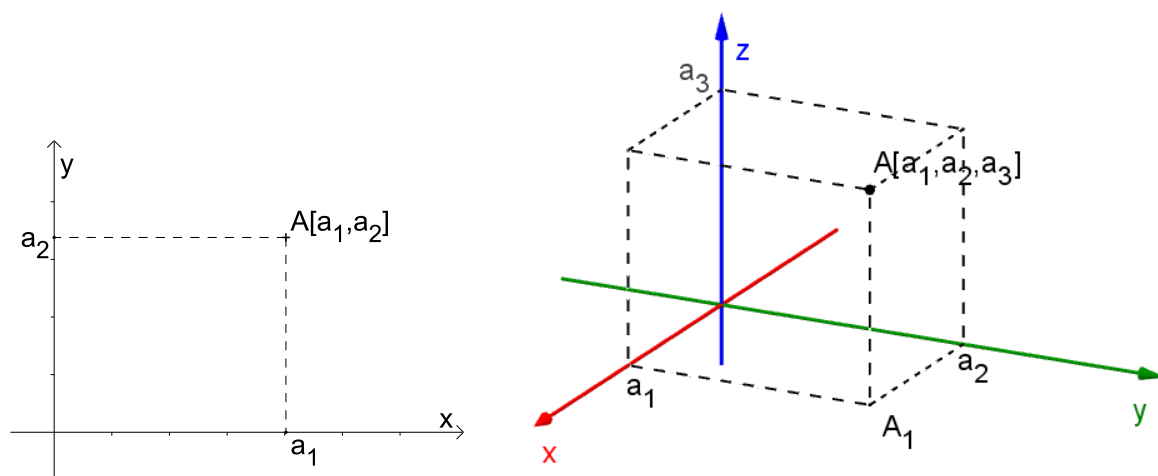
Modelem reálného prostoru, který nás obklopuje, je *eukleidovský (bodový) prostor*. Je to ten prostor, v němž řešíme geometrické úlohy (v planimetrii, stereometrii a analytické geometrii). Eukleidovský prostor dimenze  $n$  (viz str. 42) nazýváme  $n$ –rozměrný. My pracujeme s prostorem jedno-, dvoj-, trojrozměrným. Přívlastkem *eukleidovský* se tradičně vyjadřuje, že v příslušném bodovém prostoru lze měřit vzdálenosti bodů a odchylky přímek (konkrétně odchylky směrů přímek).

### 7.1 Souřadnice bodu a vektoru

Pro možnost měření vzdálenosti bodů a odchylek směrů vyjádřených vektory zavádíme *souřadnice bodů a vektorů*.

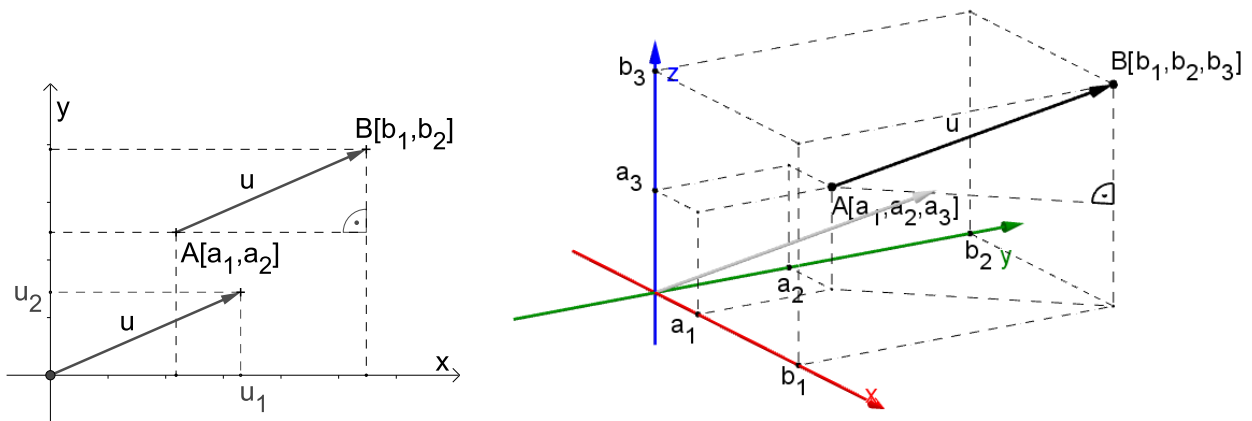
*Souřadnice bodu*

$A[a_1, a_2]$ ,  $A[a_1, a_2, a_3]$



Obrázek 59: Souřadnice bodu

## Souřadnice vektoru



Obrázek 60: Souřadnice vektoru

Vektorem zde rozumíme *geometrický vektor*, který v sobě nese dvě informace: 1) informaci o směru a 2) informaci o velikosti posunutí v tomto směru. Geometrický vektor proto znázorňujeme *orientovanou úsečkou*. Všechny orientované úsečky téže velikosti a směru představují jeden vektor, konkrétní úsečku z nich potom nazýváme *umístěním* tohoto vektoru. Souřadnice vektoru  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , resp.  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , jsou souřadnice koncového bodu jeho umístění, které má počáteční bod v počátku soustavy souřadné, viz Obr. 60. Je-li umístěním vektoru  $\vec{u}$  orientovaná úsečka  $AB$ , kde  $A, B$  jsou libovolné body prostoru, získáme jeho souřadnice z rozdílu souřadnic koncového a počátečního bodu úsečky  $AB$ :

$$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (u_1, u_2),$$

$$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (u_1, u_2, u_3).$$

## 7.2 Norma (velikost) vektoru

*Normou* (též *velikostí*) vektoru rozumíme velikost jeho umístění<sup>2</sup>. Normu vektoru  $\vec{u}$  značíme  $|\vec{u}|$ . Na Obr. 60 vidíme, že v případě dvojrozměrného prostoru můžeme k výpočtu velikosti vektoru využít Pythagorovu větu pro

<sup>2</sup>V tomto případě se přesněji řečeno jedná o tzv. *eukleidovskou normu*, která odpovídá našim představám o vzdálenosti bodů.

pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami  $u_1, u_2$  a s přeponou  $|\vec{u}|$ . V trojrozměrném prostoru je potom postup analogický, akorát, že Pythagorovu větu uplatníme dvakrát. Platí:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

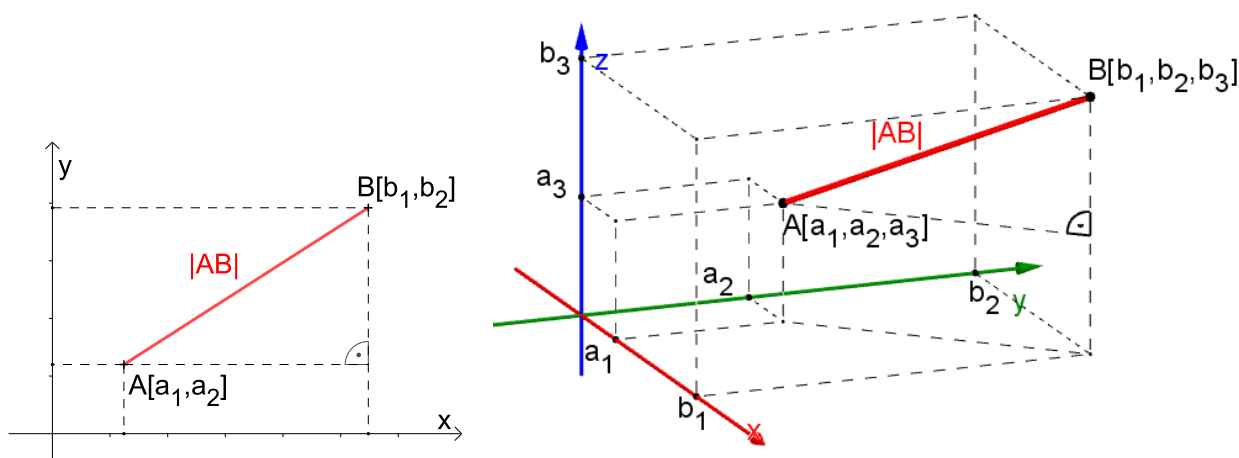
### 7.3 Vzdálenost bodů

Vzdálenost bodů  $A, B$  značíme  $|AB|$ , viz Obr. 61. Pro body  $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$  v rovině platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}, \quad (1)$$

pro body  $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$  v trojrozměrném prostoru pak platí

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \quad (2)$$

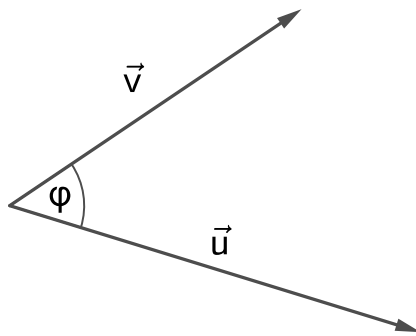


Obrázek 61: Vzdálenost dvou bodů (velikost úsečky)

Vidíme, že vzdálenost dvou bodů je rovna velikosti vektoru, který je jimi určen (tj. orientovaná úsečka definovaná těmito body je jeho umístěním). Můžeme také říci, že vzdálenost dvou bodů je rovna *délce úsečky*, jejímiž krajními body jsou.

## 7.4 Odchylka dvou vektorů; skalární součin

Pro výpočet odchylek mezi přímkami, rovinami, případně mezi přímkou a rovinou, využíváme schopnost vypočítat odchylku dvou vektorů, tj. velikost úhlu mezi dvěma vektory.



Obrázek 62: Odchylka  $\varphi$  mezi vektory  $\vec{u}, \vec{v}$

Pro výpočet odchylky dvou vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  využíváme *skalární součin*  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Jedná se o (binární) operaci, která dvěma vektorům přiřazuje číslo (skalár). My pracujeme s tzv. *eukleidovským skalárním součinem*, který je pro vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$  definován vztahem<sup>3</sup>

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \quad (3)$$

pro vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  pak takto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (4)$$

Zobecnění pro vektory dimenze  $n$  je pak zřejmé. Skalární součin vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  souvisí s jejich odchylkou  $\varphi$ , viz Obr. 62 prostřednictvím vztahu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi. \quad (5)$$

Pro výpočet odchylky vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  ho použijeme ve tvaru

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}. \quad (6)$$

<sup>3</sup>Skalární součin se většinou značí tečkou „·“, proto se mu anglicky říká *dotproduct*

## 7.5 Míra

Vzdálenost bodů  $A, B$  interpretujeme též jako *délku úsečky*  $AB$ . Délka úsečky je příkladem *míry útvaru*, hovoříme též o *metrice* daného prostoru.

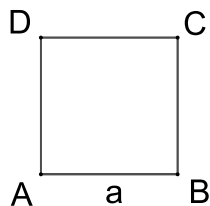
**Definice 1** (Míra útvaru). *Mírou útvaru  $m$  rozumíme funkci s těmito vlastnostmi:*

- 1) Každému útvaru  $X$  přiřazuje reálné číslo  $m(X) \geq 0$  (například délku úsečky, obsah rovinnému útvaru nebo objem trojrozměrnému útvaru).
- 2) Každým dvěma shodným útvarům  $X, Y$  přiřazuje čísla  $m(X), m(Y)$ , pro která platí:  $m(X) = m(Y)$ .
- 3) Každým dvěma disjunkt<sup>4</sup>ním útvarům  $X, Y$  přiřazuje čísla  $m(X), m(Y)$ , pro která platí:  $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$ .
- 4) Aspoň jednomu útvaru  $E$  přiřazuje číslo  $m(E) = 1$ .

Existuje řada způsobů, jak definovat funkci  $m$ . My budeme pracovat s *euclidovskou metrikou*, založenou na vztahu (1), resp. (2).

## 8 Obsah a obvod rovinného útvaru

### Čtverec



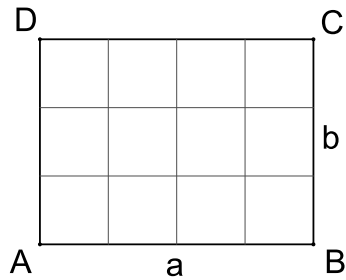
$$\text{Obsah: } S = a^2$$

$$\text{Obvod: } o = 4a$$

---

<sup>4</sup>Množiny jsou *disjunkt*ní, právě když nemají žádný společný bod.

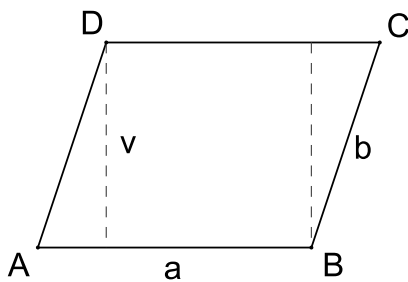
## Obdélník



Obsah:  $S = ab$

Obvod:  $o = 2(a + b)$

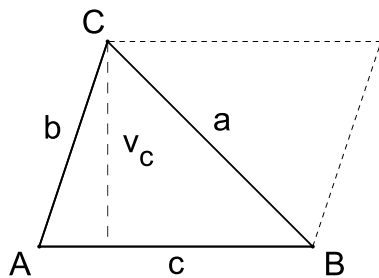
## Rovnoběžník



Obsah:  $S = av$

Obvod:  $o = 2(a + b)$

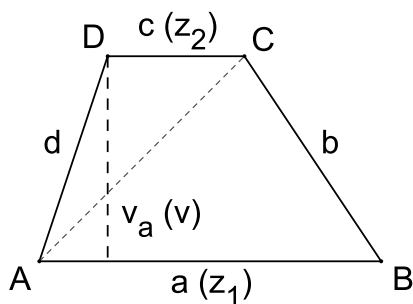
## Trojúhelník



Obsah:  $S = \frac{zv}{2} = \frac{cv_c}{2} = \dots$

Obvod:  $o = a + b + c$

## Lichoběžník

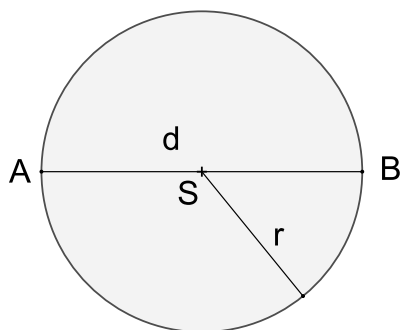


Obsah:  $S = \frac{(z_1 + z_2)v}{2} = \frac{(a + c)v_a}{2}$

Obvod:  $o = a + b + c + d$



## Kruh, kružnice



$$\text{Obsah: } S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{Obvod: } o = 2\pi r = \pi d$$

### *Ludolfovo číslo $\pi$*

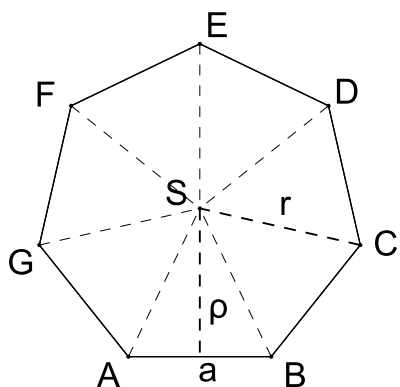
*Ludolph van Ceulen*, 1540–1610, německý matematik.

Pro všechny kruhy je poměr jejich obvodu a průměru roven témuž číslu, tzv. Ludolfovu číslu  $\pi$ ,

$$\pi = \frac{o}{d}.$$

Toto číslo je iracionální, tj. v jeho desetinném rozvoji neexistuje žádná periodičita. Od okamžiku poznání tohoto poměru trvají snahy o výpočet jeho hodnoty na co nejvíce desetinných míst. Tato historie je zachycena například na stránce Wikipedia: Chronology of computation of  $\pi$ . Jedním z matematiků, kteří se výpočtu hodnoty  $\pi$  intenzivně věnovali, byl Ludolph van Ceulen, po němž je toto číslo pojmenováno. Pro výpočty většinou používáme přibližnou hodnotu  $\pi \doteq 3,14$ . Pro usnadnění zapamatování si čísla  $\pi$  na více desetinných míst se používají různé říkanky, v nichž počet písmen ve slovu představuje příslušnou cifru. Například hodnota  $\pi \doteq 3,141592653589$  je uchována takto: „Lín a kapr u hráze prohlédli si rybáře, udici měl novou, šupináči neuplavou.“

## Pravidelný $n$ -úhelník

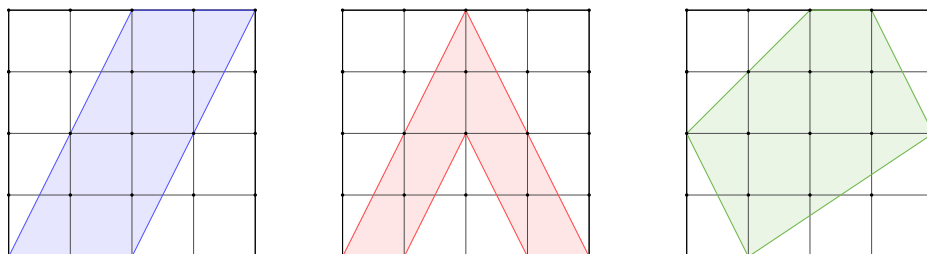


$$\text{Obsah: } S = \frac{n a \rho}{2} = \frac{n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{o \rho}{2}$$

$$\text{Obvod: } o = n a$$

## 9 Využití čtvercové sítě k určení obsahu rovinného útvaru

**PŘÍKLAD 9.1.** *Vypočítejte obsahy a obvody barevných mnohoúhelníků na Obr. 63, délka strany čtverečku sítě je 1.*

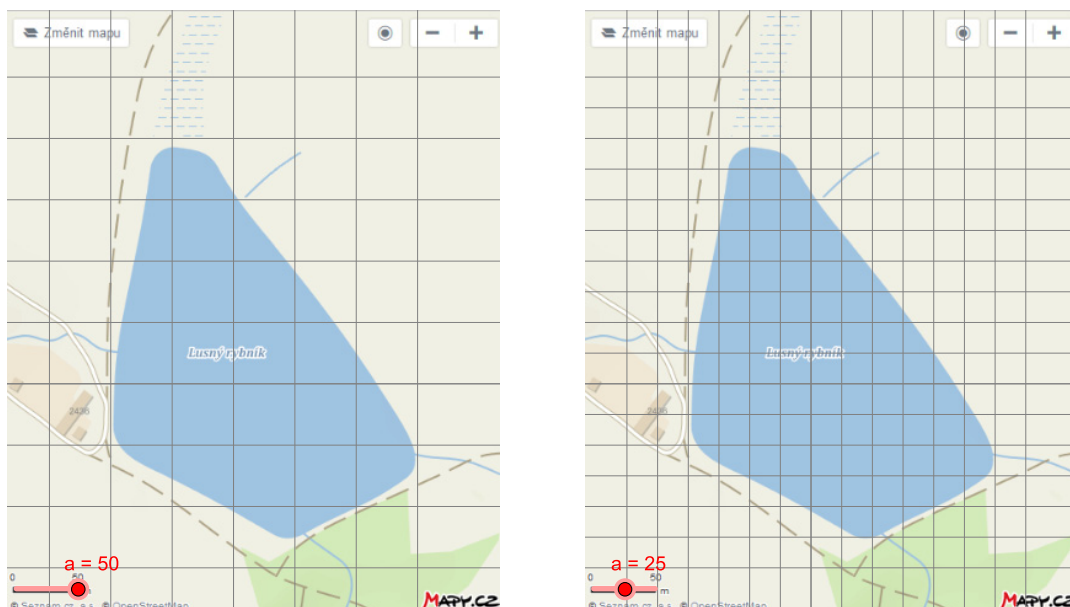


Obrázek 63: Vypočítejte obsahy barevných mnohoúhelníků

**PŘÍKLAD 9.2.** *S využitím map s čtvercovými sítěmi na Obr. 64 odhadněte obsah plochy rybníka Lusný. Pro kterou síť dostanete přesnější odhad?*

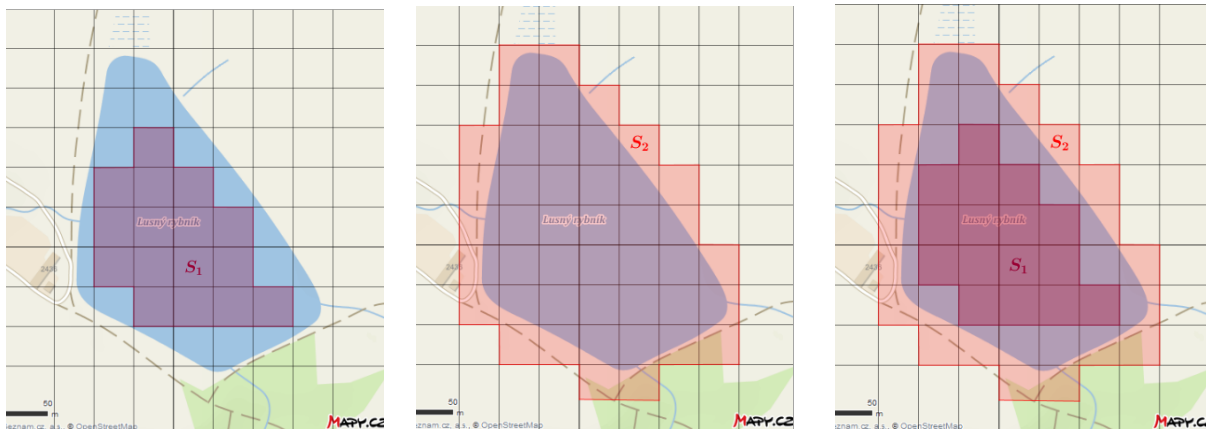
### Jordanova–Peanova míra

Na metodě měření obsahu plošného obrazce pomocí čtvercové sítě je založena myšlenka *Jordanovy–Peanovy míry* (*Camille Jordan*, 1838–1922, francouzský matematik; *Giuseppe Peano*, 1858–1932, italský matematik). Princip této metody stručně objasníme s využitím Obr. 65 a dle [13], kde



Obrázek 64: Plocha rybníka Lusného; strana čtverce 50 m (vlevo) a 25 m (vpravo)

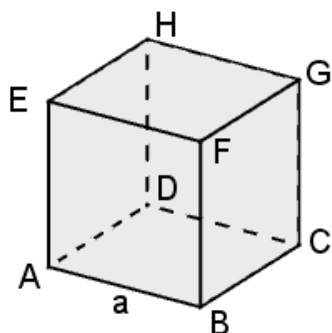
lze najít detailnější informace. Označme  $S_1$  součet obsahů všech čtverců, jejichž všechny body náležejí měřenému útvaru (tj. žádná jejich část ho nepřesahuje) a  $S_2$  součet obsahů všech čtverců, které mají s útvarem (kam počítáme i jeho hranici) společný aspoň jeden bod. Pokud čtvercovou síť neomezeně zjemňujeme, konvergují tyto součty k hodnotám (limitám), z nichž první nazýváme *vnitřní Jordanova–Peanova míra*, druhou pak *vnější Jordanova–Peanova míra* daného útvaru (tj. dané množiny bodů)  $U$ . Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, nazývá se daná množina *měřitelná v Jordanově–Peanově smyslu*. Společná hodnota se pak nazývá *Jordanova–Peanova míra* útvaru (množiny)  $U$ , [13].



Obrázek 65: Výpočet obsahu plochy rybníka Lusného; Jordanova–Peanova míra [13]

## 10 Objem a povrch trojrozměrného útvaru

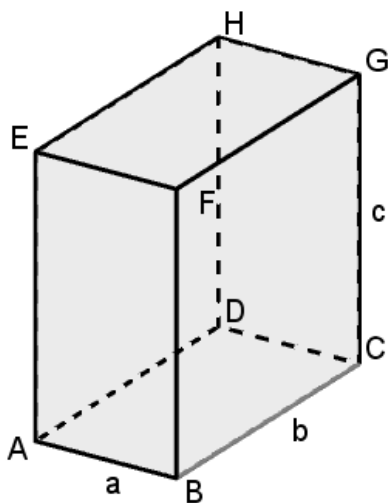
### Krychle



Objem:  $V = a^3$

Povrch:  $S = 6a^2$

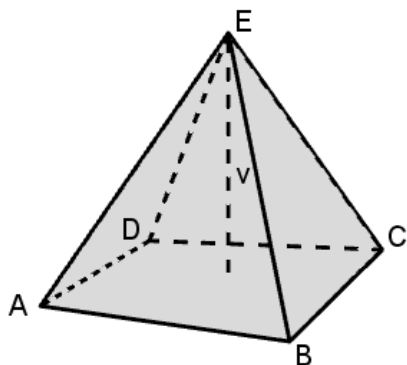
### Kvádr



Objem:  $V = abc$

Povrch:  $S = 2(ab + ac + bc)$

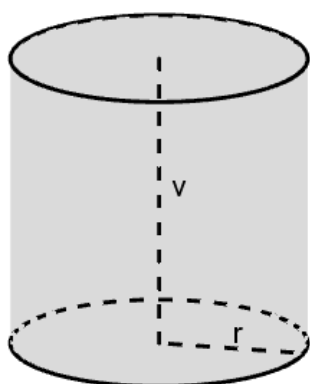
## Jehlan



Objem:  $V = \frac{1}{3} S_p v$

Povrch:  $S = S_p + S_{pl}$

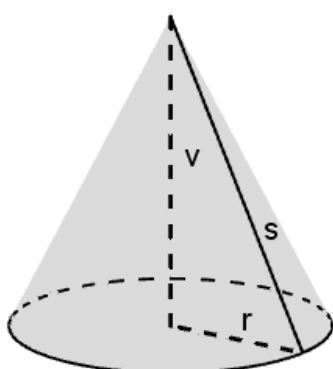
## Válec



Objem:  $V = \pi r^2 v$

Povrch:  $S = 2S_p + s_{pl} = 2\pi r (r + v)$

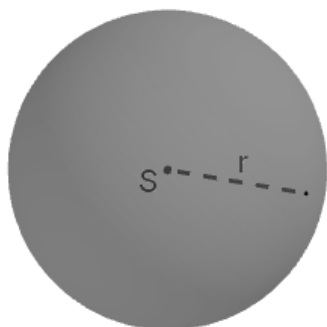
## Kužel



Objem:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

Povrch:  $S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s)$

## Koule



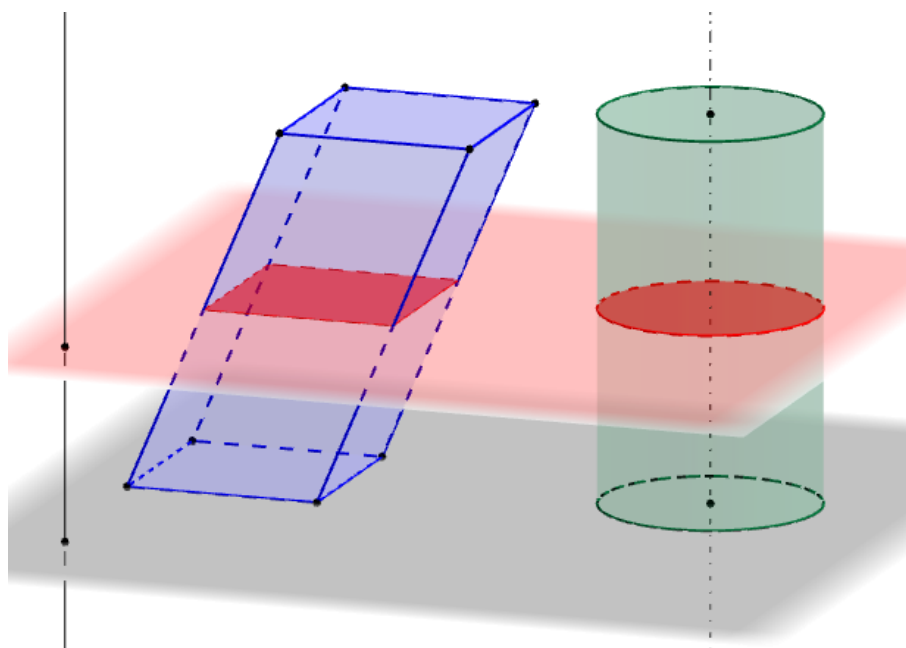
$$\text{Objem: } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Povrch: } S = 4\pi r^2$$

## 11 Cavalieriho princip

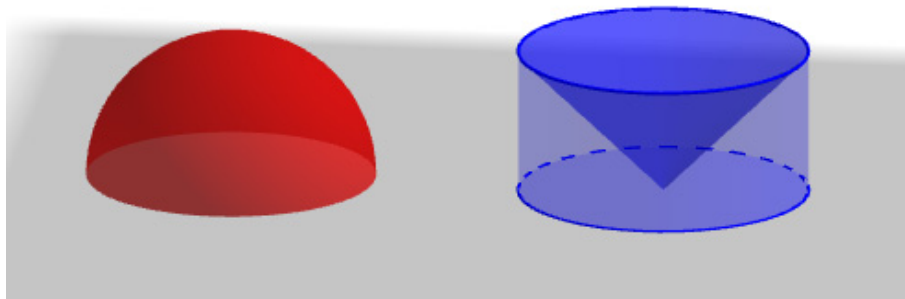
*Bonaventura Cavalieri*, 1598–1647, italský matematik.

Pro výpočet objemu některých dalších těles (např. kosého hranolu) můžeme využít tzv. *Cavalieriho princip*: *Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá s ní rovnoběžná rovina protíná obě tělesa v rovinných útvarech o téměř obsahu, pak mají obě tělesa stejný objem, viz Obr. 66.*



Obrázek 66: Cavalieriho princip (jako dynamický apilet najdete tento obrázek na adrese <https://www.geogebra.org/m/nEBFuYXP> )

**PŘÍKLAD 11.1.** Na Obr. 67 jsou dvě tělesa s podstavami v téže rovině: polokoule o poloměru  $r$  a válec o poloměru  $i$  výšce  $r$ , z něhož je odebrán kužel o poloměru  $i$  výšce  $r$  (jeho podstava je totožná s horní podstavou válce a vrcholem je střed dolní podstavu válce). Užitím Cavalieriho principu ukažte, že obě tělesa mají stejný objem  $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ .



Obrázek 67: Cavalieriho princip: Obě tělesa mají stejný objem

## 12 Planimetrie

Eukleidovská geometrie se rozděluje na geometrii v rovině, *planimetrii*, a geometrii v trojrozměrném prostoru, *stereometrii*.

### 12.1 Symetrie



Obrázek 68:

*Symetrie roviny:* Transformace roviny, při níž buď zůstává obrazec zachován, nebo zůstává zachována nějaká jeho vlastnost.

Symetrie:

- zrcadlení (osová souměrnost),
- otočení (rotace),
- posunutí,
- stejnolehlost.



## 12.2 Geometrické zobrazení

**Definice 2** ((Geometrické) zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu  $X$  (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod  $X' = f(X)$ .*



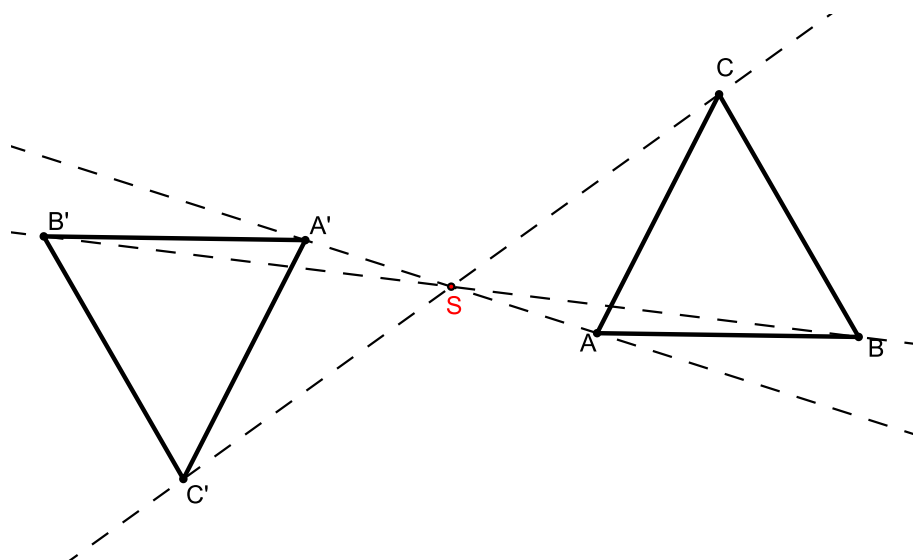
Obrázek 69: Zobrazení z trojrozměrného prostoru do roviny; *Kleť*, 1084 m. n. m.

Geometrická zobrazení, se kterými budeme pracovat, tj. např. shodná zobrazení a stejnoolehlost, jsou zobrazení *prostá*, tj. dvěma různým bodům-vzorům jsou přiřazeny dva různé obrazy<sup>5</sup>. Jak ale uvidíme níže, existují i geometrická zobrazení, která *prostá* nejsou.

<sup>5</sup>Tato zobrazení jsou dokonce *vzájemně jednoznačná*, tj. jsou *prostá* a zároveň zobrazeními na množinu. *Zobrazením na množinu* rozumíme zobrazení, pro které platí, že každý bod množiny, do níž zobrazuje, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů.

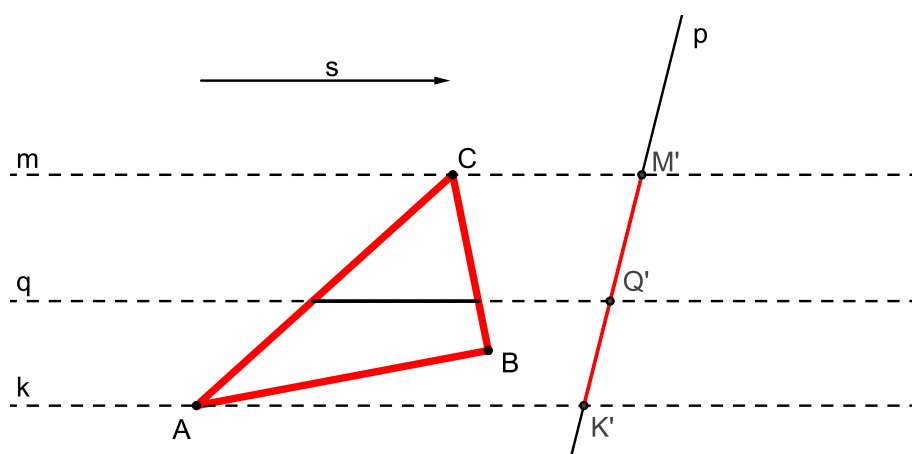
## Příklady geometrických zobrazení

Středová souměrnost, viz Obr. 70



Obrázek 70: Středová souměrnost se středem  $S$

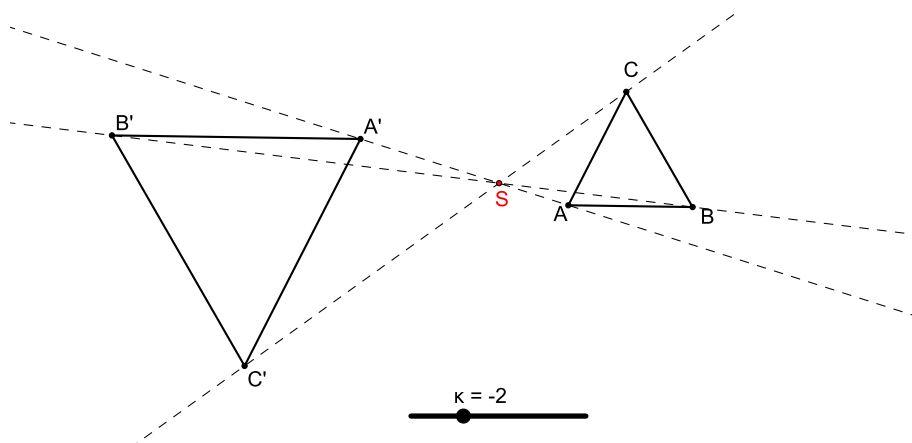
Rovnoběžné promítání do přímky (dané směrem  $\vec{s}$  a přímkou  $p$ ), viz Obr. 71<sup>6</sup>



Obrázek 71: Rovnoběžné promítání ve směru  $\vec{s}$  z roviny do přímky  $p$

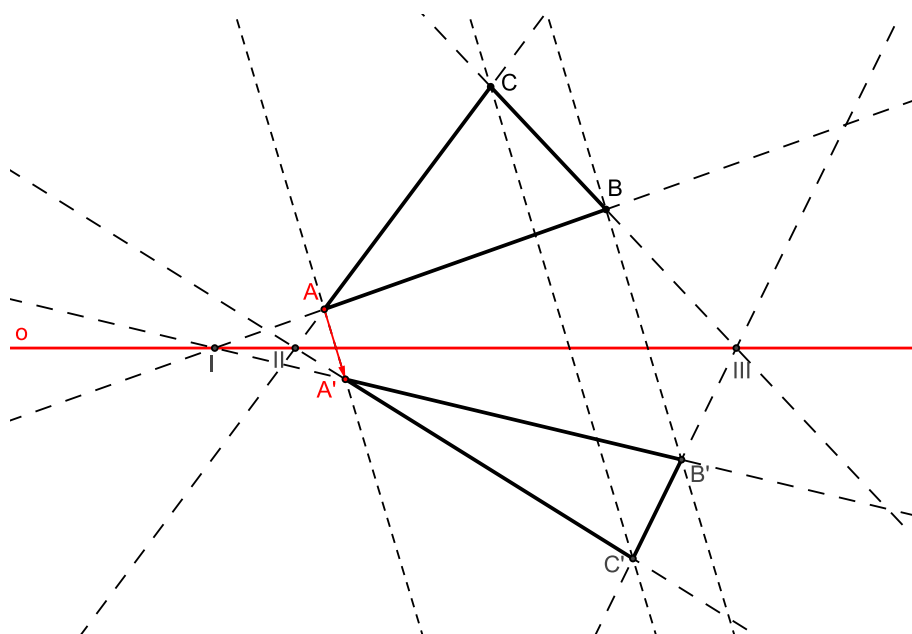
<sup>6</sup>Toto zobrazení není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem  $\vec{s}$  se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek  $k, m, q$  se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů  $K', M', Q'$ .

**Stejnolehlost** (daná středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ), viz Obr. 72



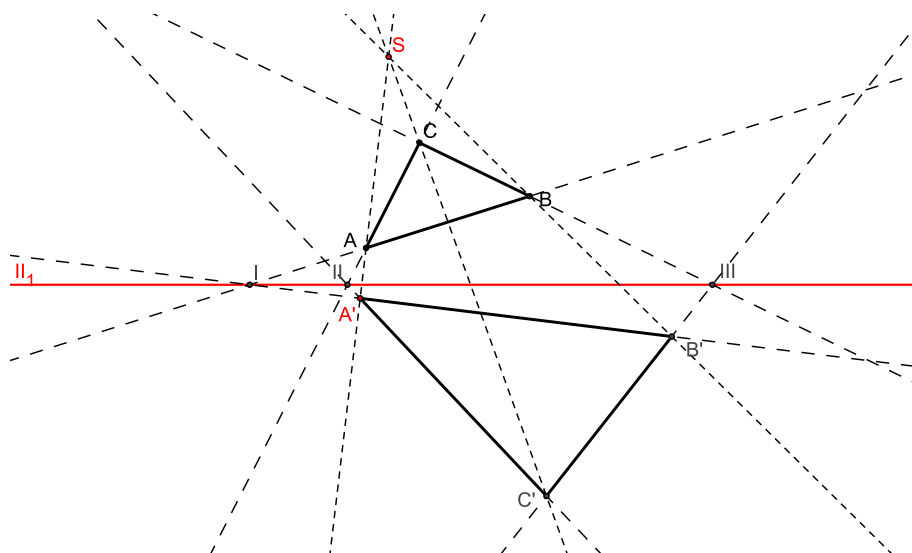
Obrázek 72: Stejnolehlost se středem  $S$  a s koeficientem  $\kappa = -2$

**Osová afinita** (daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 73



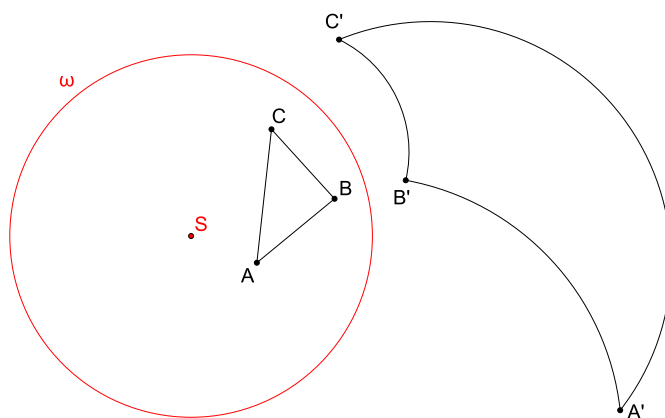
Obrázek 73: Osová afinita daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Středová kolineace** (daná osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 74



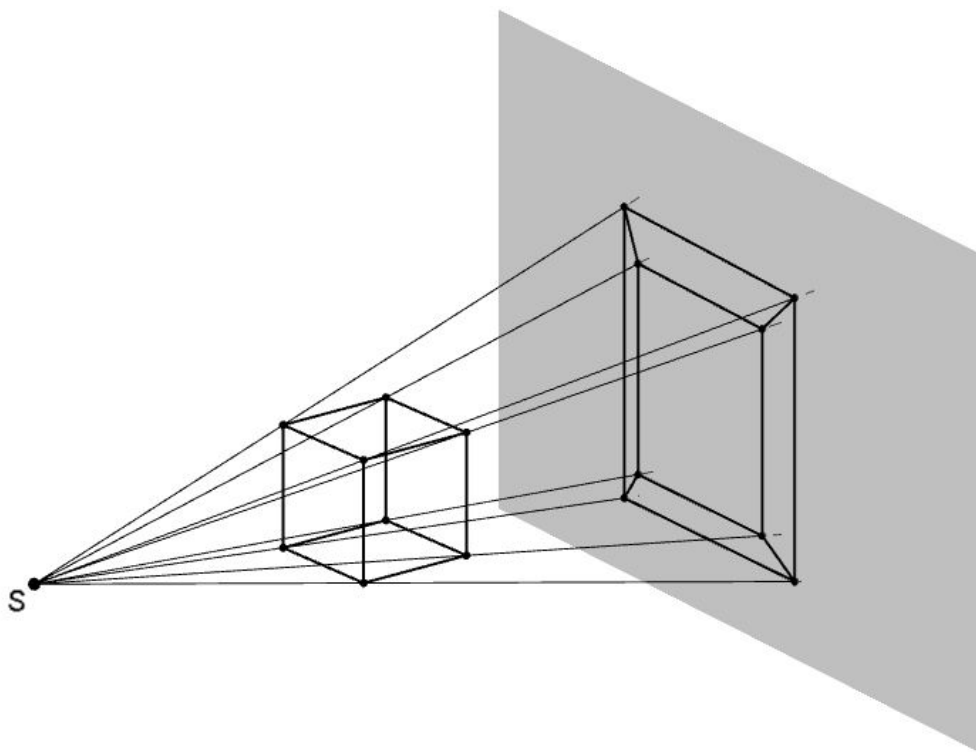
Obrázek 74: Středová kolineace daná středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Kruhová inverze** (daná *určující kružnicí*  $\omega = (S, r)$  a vztahem  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$  mezi vzorem  $X$  a obrazem  $X'$ ), viz Obr. 75



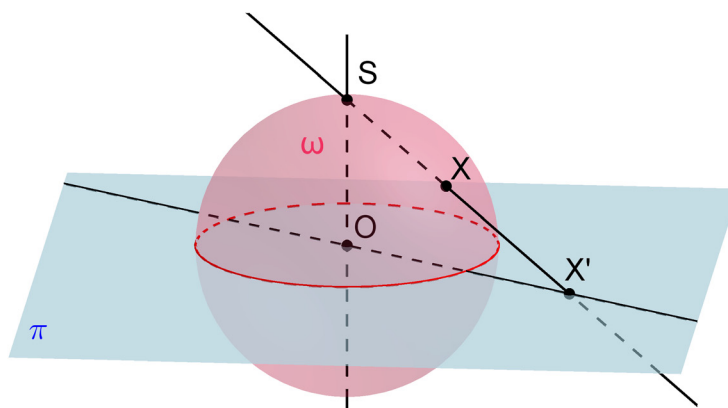
Obrázek 75: Kruhová inverze daná kružnicí  $\omega$

**Středové promítání** (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem  $S$ ), viz Obr. 76



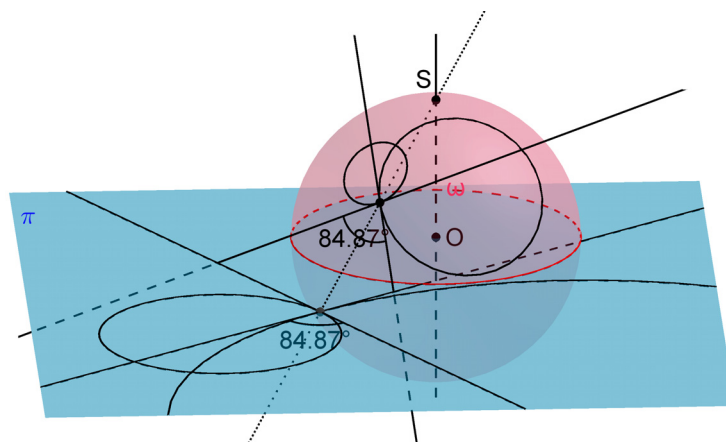
Obrázek 76: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

**Stereografická projekce**<sup>7</sup>, viz Obr. 77



Obrázek 77: Stereografická projekce

<sup>7</sup>Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání  $S$  ležící na kulové ploše  $\omega$  a pro průmětnu  $\pi$  rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání  $S$



Obrázek 78: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává

### 12.3 Geometrické zobrazení v rovině

*Geometrickým zobrazením v rovině* rozumíme předpis, kterým je každému bodu  $X$  roviny (říkáme mu *vzor*) přiřazen právě jeden bod  $Y$  téže roviny (říkáme mu *obraz*).

Příklady takovýchto geometrických zobrazení jsou *osová souměrnost*, *středová souměrnost*, *otočení*, *posunutí*, *posunuté zrcadlení*, *identita* a *stejnolehlost*.

## 13 Shodná zobrazení v rovině

**Definice 3** (Shodné zobrazení). *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům  $X, Y$  přiřazuje body  $X', Y'$  tak, že*

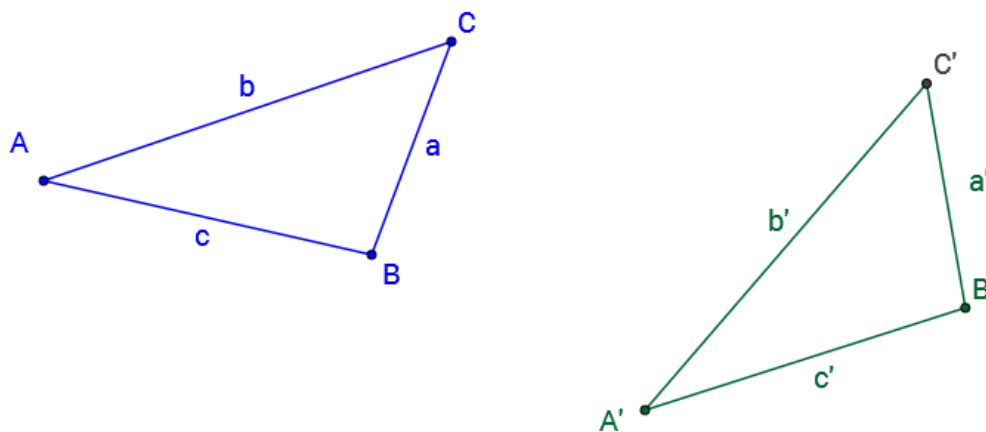
$$|X'Y'| = |XY|$$

*se nazývá shodné zobrazení v rovině (též izometrické zobrazení).*

Zjednodušeně říkáme, že *shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů*. Vzdálenost bodů je tedy *invariantem* shodného zobrazení.

**Jak poznáme shodné útvary ?**

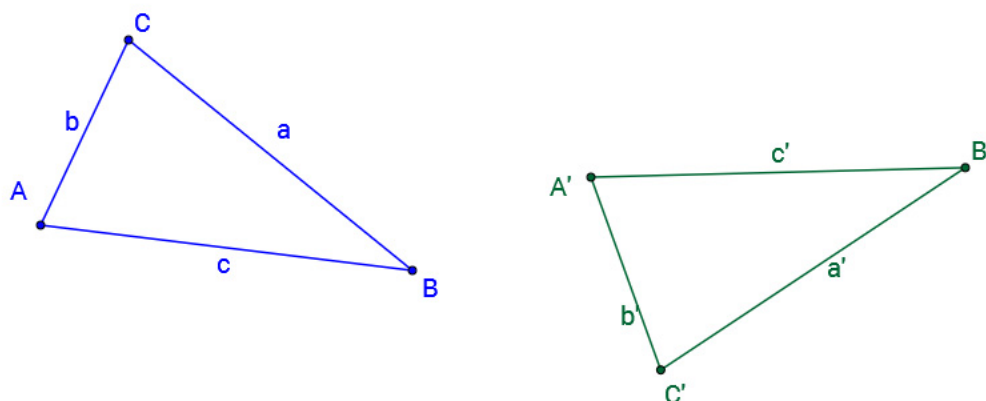
**Shodnost přímá:** Po přemístění v rámci roviny se útvary kryjí, viz Obr. 79.



Obrázek 79: Shodnost přímá

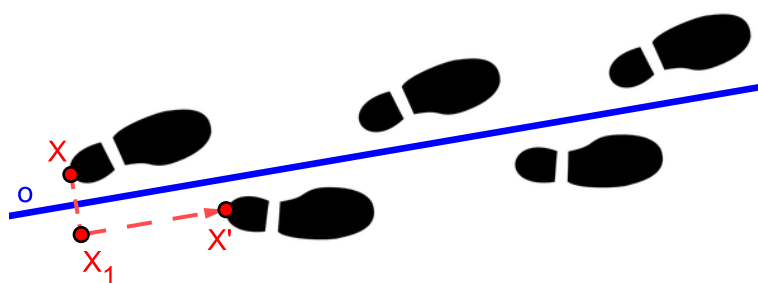
**Přímými shodnostmi** v rovině jsou *středová souměrnost, otočení, posunutí* a *identita*.

**Shodnost nepřímá:** Po žádném přemístění v rámci roviny se útvary nekryjí, jeden z nich je třeba ještě „převrátit“ (tj. vypomoci si manipulací v trojrozměrném prostoru), viz Obr. 80.



Obrázek 80: Shodnost nepřímá

**Nepřímými shodnostmi** v rovině jsou *osová souměrnost* a *posunuté zrcadlení*.



Obrázek 81: Posunuté zrcadlení

### 13.1 Vlastnosti shodných zobrazení

- Každé shodné zobrazení je prosté.
- Úsečka se zobrazí na úsečku.
- Polopřímka se zobrazí na polopřímku.



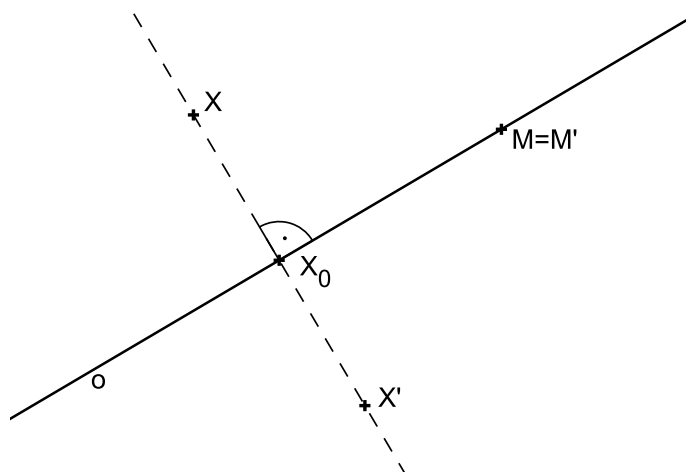
- Přímka se zobrazí na přímku.
- Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
- Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
- Polorovina se zobrazí na polorovinu.

## 13.2 Osová souměrnost



Obrázek 82: Osová souměrnost (zrcadlení)

**Definice 4.** Necht' je dána přímka  $o$ , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz  $M'$  libovolného bodu  $M$  této přímky  $o$  platí  $M' \equiv M$ . Ke každému bodu  $X$ , který neleží na přímce  $o$ , sestrojíme obraz  $X'$  následujícím způsobem: Bodem  $X$  vedeme kolmici  $k$  na přímku  $o$  a její patu označíme  $X_0$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $X_0X$  sestrojíme bod  $X'$  tak, že  $|X'X_0| = |XX_0|$ . Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou  $o$**  a značíme ho  $\mathcal{O}(o)$ .

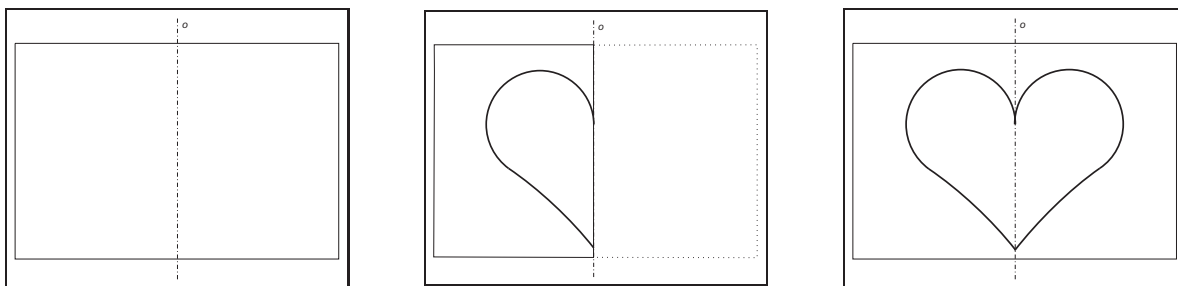


Obrázek 83: Definice osové souměrnosti

### Poznámky:

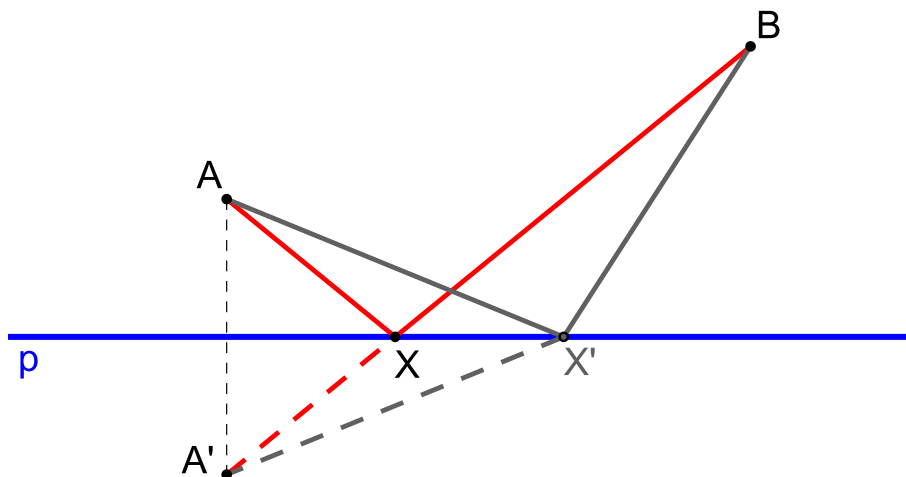
1. O bodech  $X$ ,  $X'$  říkáme, že je to dvojice bodu souměrně sdružených podle osy  $o$ .
2. Osová souměrnost je příkladem *involutorního zobrazení* (též *involuce*).

Příkladem uplatnění osové souměrnosti, se kterým se většina z nás setkala, je postup při „výrobě“ papírového srdce co nejdokonalejšího tvaru (viz Obr. 84). Z papíru přeloženého napůl vystříhneme polovinu srdce, která se po rozevření papíru „zobrazí“ v osové souměrnosti kolem osy přeložení.



Obrázek 84: Osová souměrnost v praxi

**PŘÍKLAD 13.1.** Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Najdete všechny body  $X \in p$  takové, že součet vzdáleností  $|AX| + |BX|$  je minimální.



Obrázek 85: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 85

### Samodružné body, přímky a směry osové souměrnosti<sup>8</sup>

Všechny *samodružné body* osové souměrnosti vyplňují osu souměrnosti  $o$ . Říkáme, že osa  $o$  je *přímkou samodružných bodů* osové souměrnosti.

*Samodružné přímky* osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.

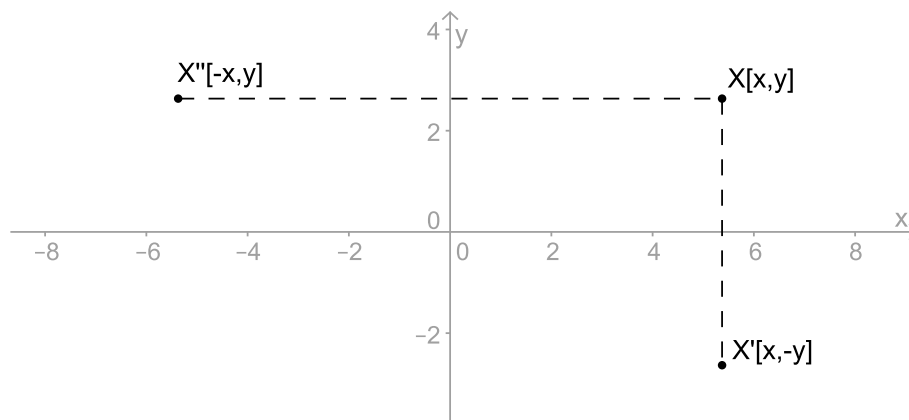
Osová souměrnost má dva *samodružné směry*, (1) směr kolmý na osu souměrnosti a (2) směr rovnoběžný s osou souměrnosti.

<sup>8</sup>Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Tato skutečnost se využívá ke klasifikaci shodností.

## Analytické vyjádření osové souměrnosti $O(o)$ v rovině

**PŘÍKLAD 13.2.** *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ ).*

*Řešení:* Dle obrázku 86 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření<sup>9</sup>.



Obrázek 86: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ )

*Osová souměrnost s osou  $x$ :*

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

*Osová souměrnost s osou  $y$ :*

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

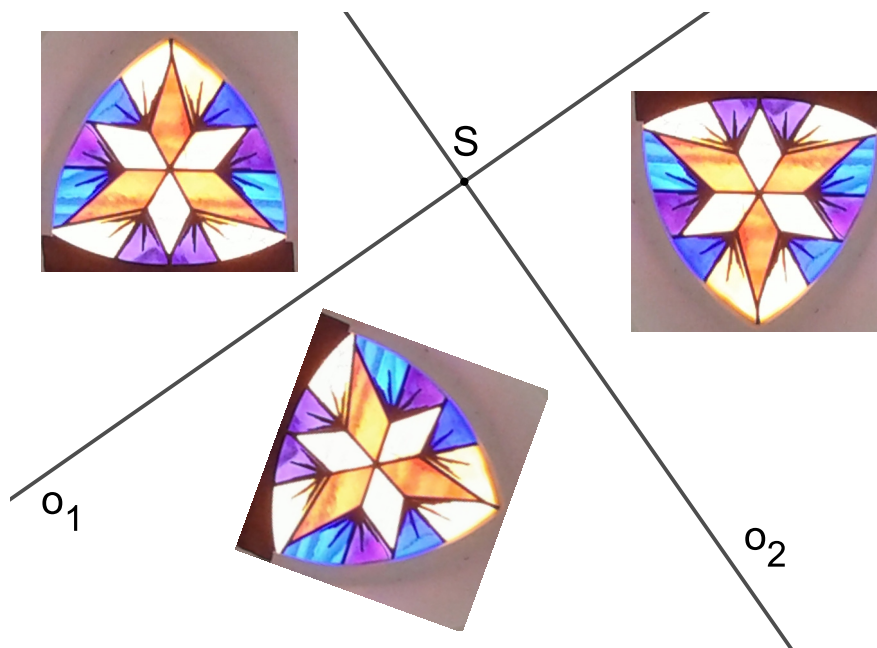
---

<sup>9</sup>Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Osová  $O(o)$  souměrnost podle osy  $o$  dané rovnicí  $o: ax + by + c = 0$  má potom takovéto parametrické rovnice

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c)$$

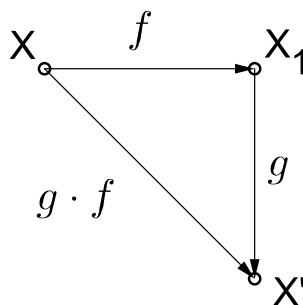
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)$$

### 13.3 Skládání zobrazení



Obrázek 87: Složení dvou osových souměrností s kolmými osami

**Definice 5** (Skládání zobrazení). *Nechť  $f, g$  jsou dvě zobrazení, viz Obr. 88. Jestliže bod  $X_1$  je obrazem bodu  $X$  v zobrazení  $f$  (tj.  $X_1 = f(X)$ ) a bod  $X'$  je obrazem bodu  $X_1$  v zobrazení  $g$  (tj.  $X' = g(X_1)$ ), potom je každému bodu  $X$  přiřazen bod  $X' = g(f(X))$ . Tím je definováno zobrazení  $h$  přiřazující bodu  $X$  bod  $X' = g(f(X))$  o kterém říkáme, že vzniklo složením zobrazení  $f$  a  $g$ . Zapisujeme  $h = g \cdot f$ ,  $h = gf$ ,  $h = g \circ f$  nebo  $h = g(f(X))$ .*



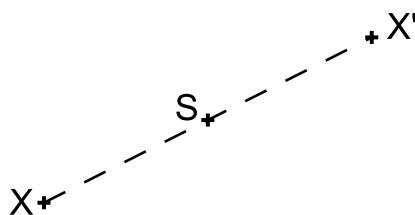
Obrázek 88: Skládání zobrazení  $f$  a  $g$

## 13.4 Středová souměrnost



Obrázek 89: Alhambra, kachel (<https://openclipart.org/detail/224123/alhambra-tile>)

**Definice 6.** *Středová souměrnost se středem  $S$  je shodné zobrazení, které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{S}(S)$ .*



Obrázek 90: Středová souměrnost  $\mathcal{S}(S)$

**Poznámka.** Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Můžeme ji chápat též jako speciální případ rotace  $\mathbf{R}(S, \alpha)$  pro  $\alpha = 180^\circ$ , tj.  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, 180^\circ)$ .

*Středová souměrnost vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti  $S$  odpovídá průsečíku těchto os), viz Obr. 89, a naopak, lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti,*

jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti  $S$ , přitom jedna z os je volitelná.

*Středová souměrnost je přímá shodnost a involuce (involutorní zobrazení).*

### Samodružné body, přímky a směry středové souměrnosti

Středová souměrnost má *jediný samodružný bod*, střed  $S$ , a *všechny směry samodružné*. Obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem  $S$  je *samodružná přímka*.

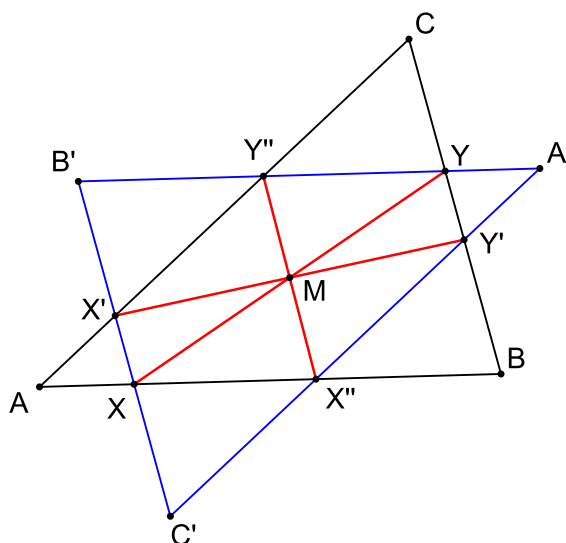
### Analytické vyjádření středové souměrnosti $S(S)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$x' = -x + 2s_1$$

$$y' = -y + 2s_2$$

**PŘÍKLAD 13.3.** *Je dán trojúhelník  $ABC$  a jeho vnitřní bod  $M$ . Se-strojte všechny úsečky  $XY$  se středem  $M$  a s krajními body  $X, Y$  na hranici trojúhelníku.*



Obrázek 91: Řešení příkladu 13.3

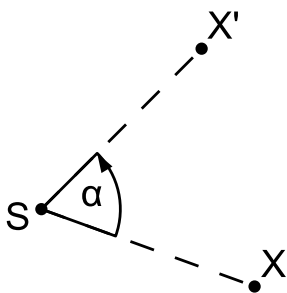


## 13.5 Otočení



Obrázek 92: Rotační symetrie

**Definice 7. Otočení** (též **rotace**) je zobrazení určené středem  $S$  a orientovaným úhlem velikosti  $\varphi$ , které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{R}(S, \varphi)$ , bod  $S$  se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti  $\varphi$  je úhel otočení.



Obrázek 93: Otočení  $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Otočení lze vytvořit složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami. Jeho středem je průsečík těchto os. Naopak, každé otočení lze rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou různoběžné a procházejí středem otočení. Jednu z těchto os lze při tom volit libovolně tak, aby procházela středem otočení. Druhá je pak touto volbou určena jednoznačně.

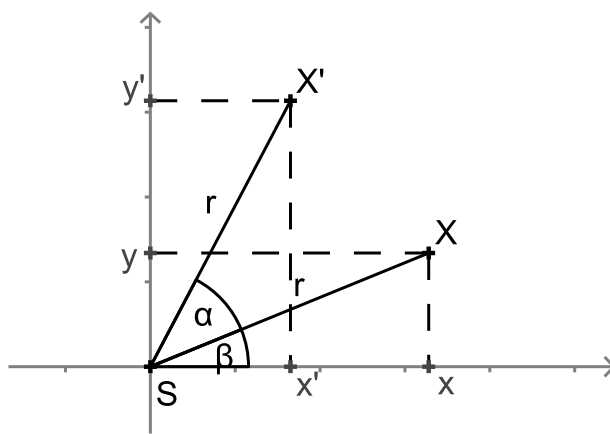


## Samodružné body a směry otočení

Otočení má *jediný samodružný bod*, je jím střed otočení. Nemá *žádný samodružný směr*.

**PŘÍKLAD 13.4.** *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$ .*

*Řešení:* Postupujeme podle obrázku 94.



Obrázek 94: Otočení  $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku<sup>10</sup> jsou

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

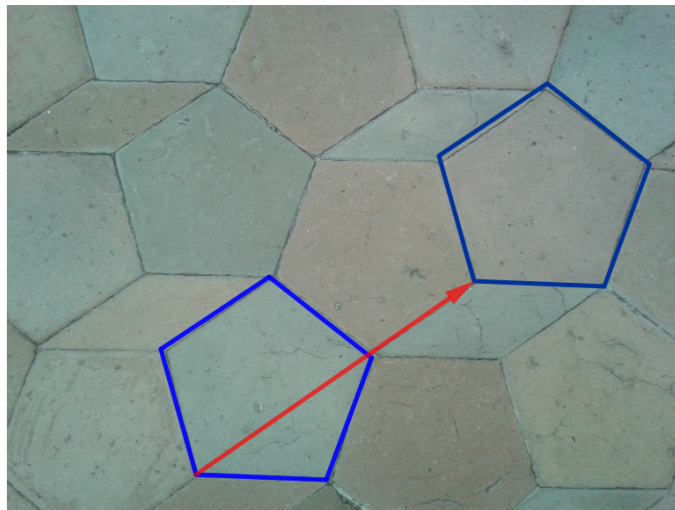
Otočení se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\alpha$  převádí přímku  $p$  v přímku  $p'$  různoběžnou s  $p$ ; přitom dva vrcholové úhly, které  $p$  a  $p'$  tvoří, mají velikost  $\alpha$ .

**PŘÍKLAD 13.5.** *Jsou dány různé rovnoběžné přímky  $a, b, c$  a bod  $A$ , který leží na přímce  $a$ . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vrcholy  $B, C$  leží po řadě na přímkách  $b, c$ .*

<sup>10</sup> Analytické vyjádření otočení (rotace)  $\mathbf{R}(S, \alpha)$  se středem  $S[s_1, s_2]$

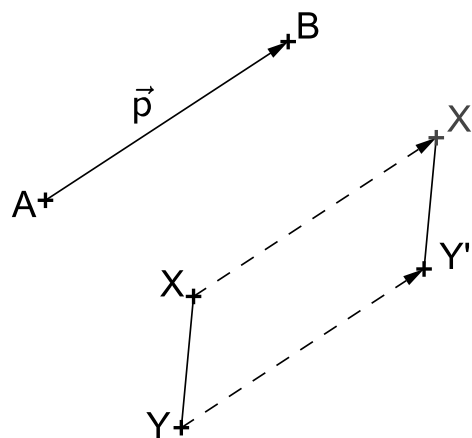
$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\ y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2 \end{aligned}$$

## 13.6 Posunutí (Translace)



Obrázek 95: Posunutí

**Definice 8.** Orientovanou úsečkou  $AB$  je dán vektor  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ . **Posunutí** (též **translace**) je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje bod  $X'$  tak, že platí  $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$ , tj.  $X' = X + \vec{p}$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{T}(\vec{p})$ .



Obrázek 96: Posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$

*Posunutí* (též *translaci*) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Naopak, každou translaci lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

### **Samodružné body, směry a přímky posunutí**

Posunutí (translace) nemá *žádný samodružný bod* a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné, tj. má *všechny směry samodružné*. Samodružnými přímkami jsou *přímky rovnoběžné se směrem posunutí*.

### **Analytické vyjádření posunutí (translace) $T(\vec{p})$ v rovině**

Rovnice posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$ , kde  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p_1 \\y' &= y + p_2\end{aligned}$$

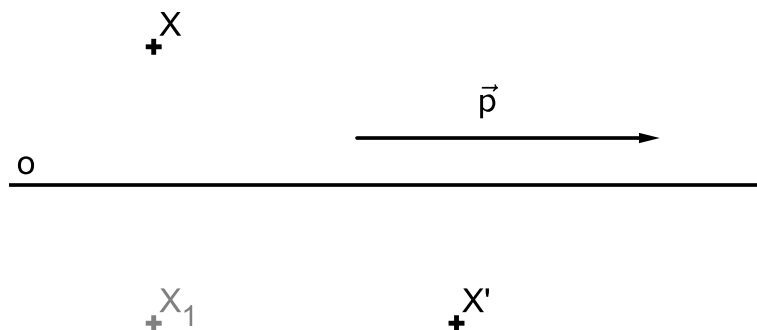
**PŘÍKLAD 13.6.** *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran  $a, b, c, d$ .* [1]

## 13.7 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost)



Obrázek 97: Kachní stopy - otisky levé a pravé nohy jsou ve vztahu posunutého zrcadlení

**Definice 9.** Zobrazení složené z posunutí ve směru dané přímky  $o$  a osové souměrnosti podle osy  $o$  se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).

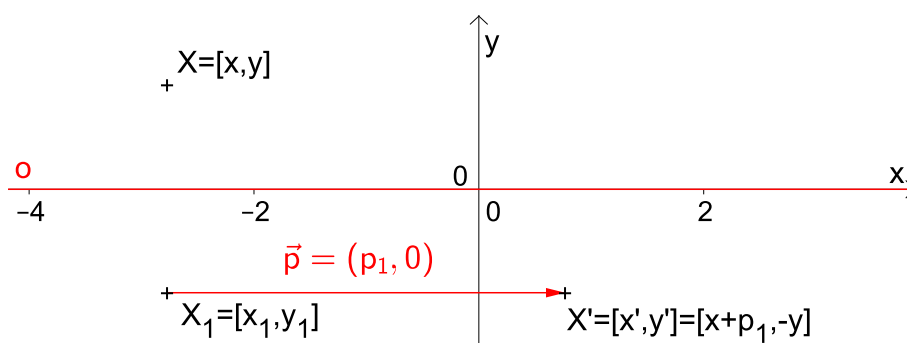


Obrázek 98: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

### Samodružné body, směry a přímky

Posunuté zrcadlení nemá samodružné body. Samodružnou přímkou tohoto zobrazení je osa  $o$ . Samodružné směry jsou dva na sebe kolmé směry, směr kolmý na osu a směr rovnoběžný s osou.

### Analytické vyjádření posunutého zrcadlení

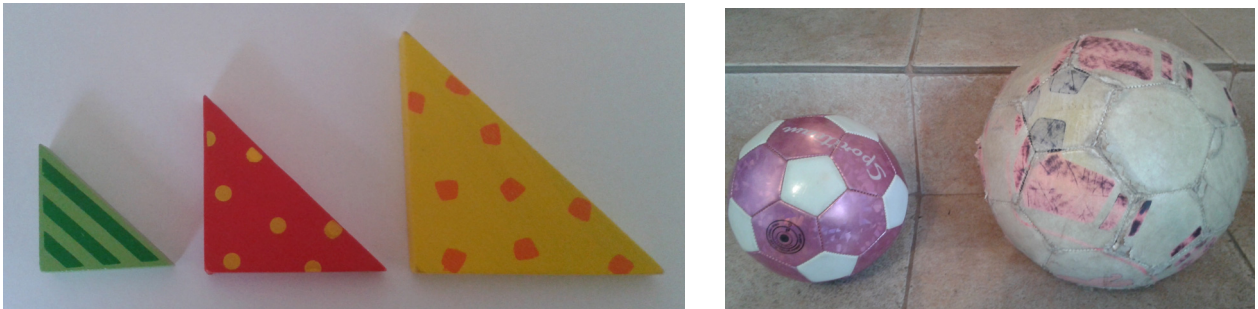


Obrázek 99: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose  $x$  a vektorem posunutí  $\vec{p} = (p_1, 0)$  (viz Obr. 99)

$$\mathcal{Z} : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

## 14 Podobná zobrazení



Obrázek 100: Podobné útvary

**Definice 10** (Podobné zobrazení). *Geometrické zobrazení  $f$  se nazývá „podobné zobrazení“, jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  uvažovaného prostoru (v našem případě se bude jednat převážně o rovinu) a jejich obrazy  $X', Y'$  platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|. \quad (7)$$

*Číslo  $k$  se nazývá koeficient podobného zobrazení  $f$ .*

**Poznámka.** Podobná zobrazení, u nichž vzory i obrazy patří do téhož prostoru, např. roviny, nazýváme *podobné transformace roviny* zkráceně *podobnosti*. Potom hovoříme např. o *podobnostech v rovině*<sup>11</sup> nebo o *podobnostech v trojrozměrném prostoru*.

### Vlastní podobnosti

Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme *vlastní podobnosti*.

Platí toto tvrzení: *Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod*. Jeho důkaz se provádí většinou ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem  $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň

<sup>11</sup>Můžeme také rovnou definovat tyto *podobné transformace roviny*, tj. *podobnosti v rovině*, takto:

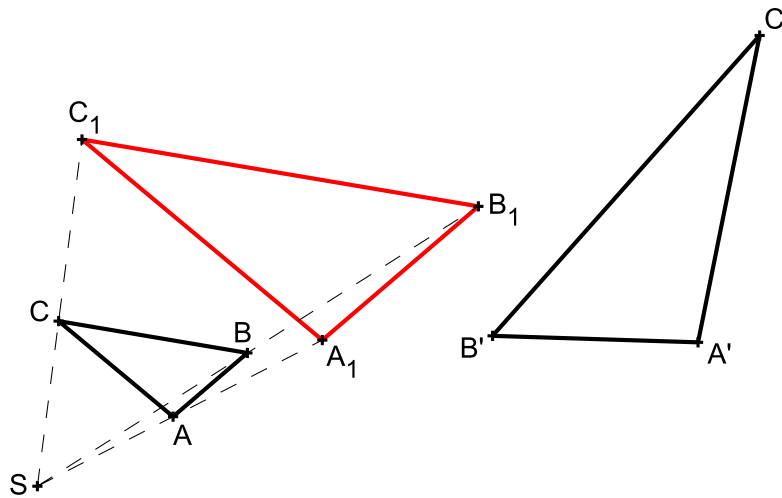
**Definice** (Podobnost) Zobrazení  $f$  roviny (eukleidovského prostoru  $E_2$ ) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  roviny a jejich obrazy  $X', Y'$  platí  $|X'Y'| = k|XY|$ . Číslo  $k$  se nazývá koeficient podobnosti  $f$ .

jeden. Dohromady nám tedy vyjde, že vlastní podobnost musí mít právě jeden samodružný bod.

**PŘÍKLAD 14.1.** *Pokuste se najít argumenty pro výše uvedené tvrzení, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod*

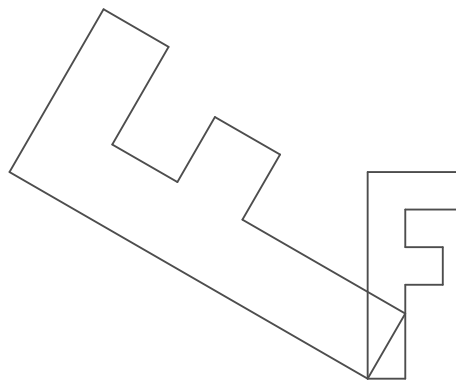
## Podobnosti v rovině jako složená zobrazení

Každé podobné zobrazení lze složit ze *stejnolehlosti*<sup>12</sup> a *shodného zobrazení*, viz Obr. 101.



Obrázek 101: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

**PŘÍKLAD 14.2.** *Pokuste se popsat stejnolehlost a shodnost, jejichž složením vznikne podobnost zachycená na Obr. 102.*



Obrázek 102: Podobné zobrazení v rovině

<sup>12</sup>O stejnolehlosti pojednává kapitola 15 začínající na str. 82

**PŘÍKLAD 14.3.** Víte v jakém vztahu jsou papíry různých velikostí formátu A? Jsou vzájemně podobné?

**PŘÍKLAD 14.4.** V eukleidovské rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body  $A, B, S$  zobrazí po řadě na body  $D, B, C$ . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

**PŘÍKLAD 14.5.** Sestrojte alespoň jeden trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AB| : |AC| = 3 : 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\rho = 1,8 \text{ cm}$  (poloměr kružnice vepsané).

**PŘÍKLAD 14.6.** Sestrojte kosodélník  $ABCD$ , je-li dáno  $|\angle DAB| = \alpha$ ,  $|\angle ABD| = \varepsilon$ ,  $|AC| = e$ .

**PŘÍKLAD 14.7.** Jsou krabice na Obr. 103 geometricky podobné?



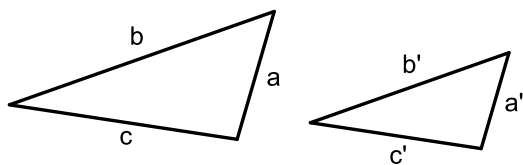
Obrázek 103: Jsou vzájemně podobné (z hlediska geometrického)?

## 14.1 Věty o podobnosti trojúhelníků

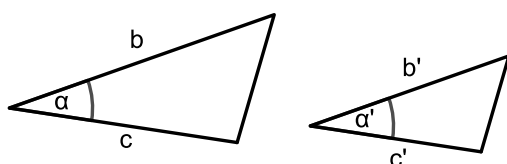
Dva trojúhelníky jsou *podobné*, jestliže mají stejné poměry délek sobě odpovídajících si stran a stejné velikosti sobě odpovídajících vnitřních úhlů.



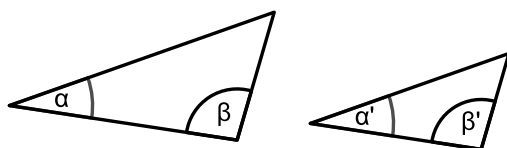
Pro identifikaci dvojice podobných trojúhelníků lze dle situace použít několik kritérií, která jsou známa jako *věty o podobnosti trojúhelníků*: *sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*, viz Obr. 104–107



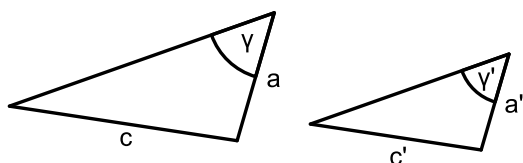
Obrázek 104: *sss*:  $a'/a = b'/b = c'/c$



Obrázek 105: *sus*:  $b'/b = c'/c$ ,  $\alpha = \alpha'$

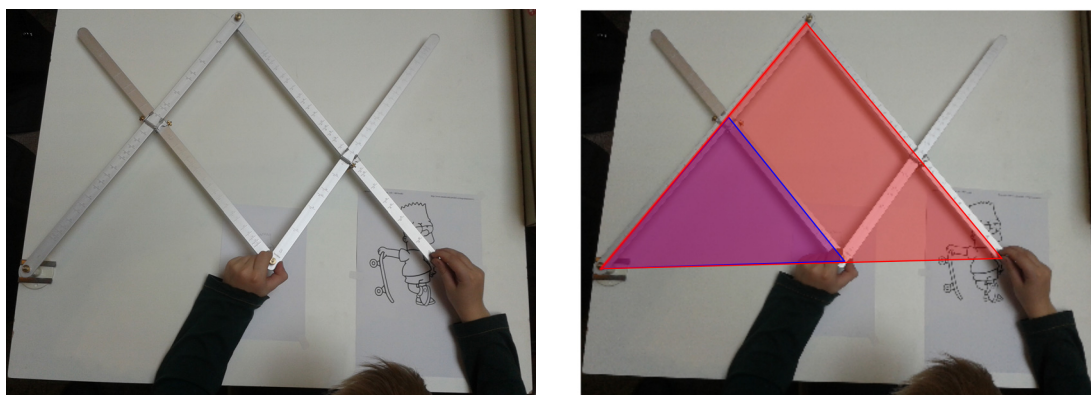


Obrázek 106: *uu*:  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$



Obrázek 107: *Ssu*:  $c > a$ ,  $a'/a = c'/c$ ,  $\gamma = \gamma'$

## 15 Stejnolehlost



Obrázek 108: Pantograf – mechanická realizace stejnohlosti

Stejnolehlost patří mezi tzv. *homotetie*<sup>13</sup>, tj. zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

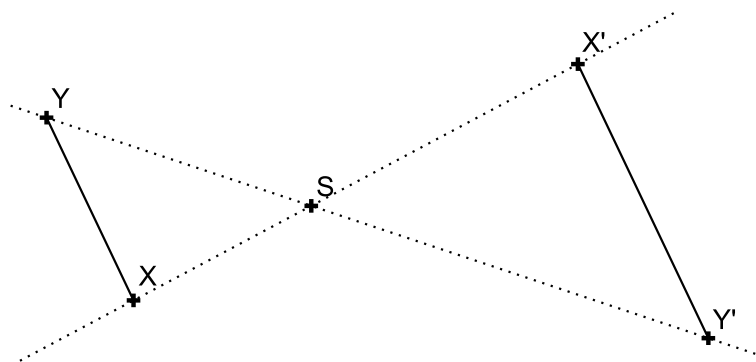
**Definice 11** (Stejnolehlost). *Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). Stejnolehlost  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tímto způsobem:*

1. Pro  $X \equiv S$  je  $X' \equiv X$ ,

2. Pro  $X \neq S$  je  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ ,

pro  $\kappa > 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{SX}$  a

pro  $\kappa < 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce opačné k  $\overrightarrow{SX}$ .



Obrázek 109: Stejnolehlost  $H(S, \kappa = -1.5)$

<sup>13</sup>Anglicky je stejnohlost *homothety*, též *dilation*, viz [https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic\\_transformation](https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic_transformation)  
Působení stejnohlosti na trojúhelník si vyzkoušejte pomocí apletu <https://www.geogebra.org/m/arUb8mt6>

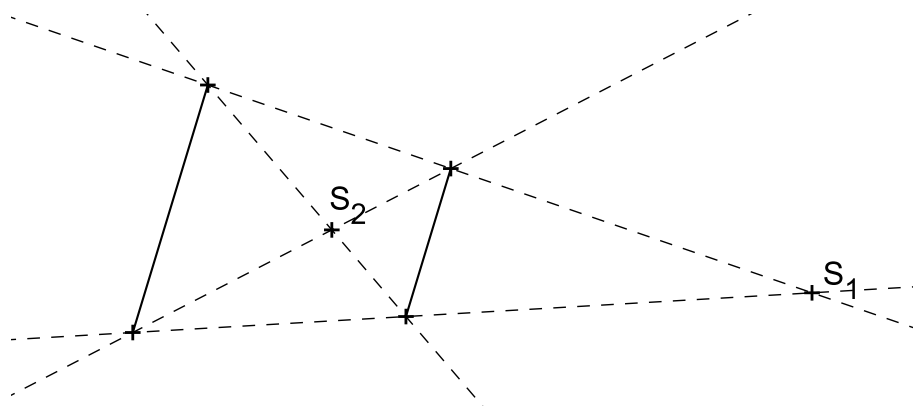
**Poznámka.** Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti  $H(S; \kappa)$  je stejnoolehlost se stejným středem  $S$ , ale s opačným koeficientem  $\frac{1}{\kappa}$ , tj.  $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$ .

**Vlastnosti stejnoolehlosti  $H(S, \kappa)$ :**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$ ;  $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$ .
3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ( $\kappa > 0$ ) nebo nesouhlasně ( $\kappa < 0$ ) rovnoběžná .
4. Obrazem úhlu  $\angle AVB$  je úhel  $\angle A'V'B'$ ;  $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$ .

**PŘÍKLAD 15.1.** Jsou dány dvě vzájemně rovnoběžné úsečky různých délek. Určete středy stejnoolehlostí, v nichž se jedna z nich zobrazuje na druhou.

Řešení viz Obr. 110.



Obrázek 110: Středy stejnoolehlostí dvou rovnoběžných úseček

**PŘÍKLAD 15.2.** Uvažujte variantu předchozího příkladu 15.1, v níž jsou dané úsečky v jedné přímce, viz Obr. 111

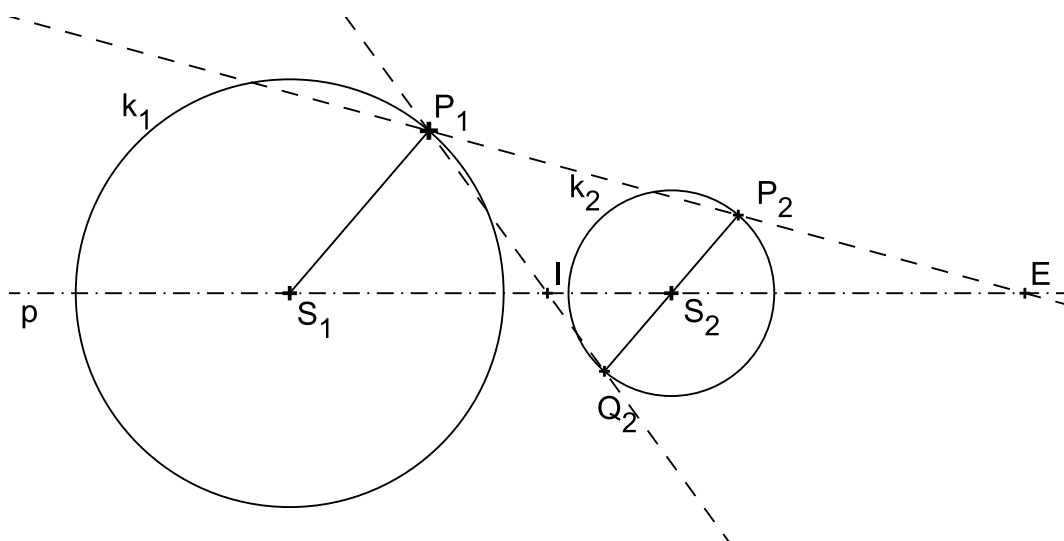
Řešení viz <https://www.geogebra.org/m/qSQGSZeP>



Obrázek 111: Jak určit středy stejnolehlostí dvou kolineárních úseček?

## 15.1 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice  $k_1(S_1; r_1)$ ,  $k_2(S_2; r_2)$  s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici  $k_1$  do kružnice  $k_2$ :  $H_1(E, r_2/r_1)$  a  $H_2(I, -r_2/r_1)$  (Bod  $E$  se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod  $I$  potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě  $T$ , je  $T = I$  v případě vnějšího dotyku a  $T = E$  v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 112: Stejnolehlost kružnic

**PŘÍKLAD 15.3.** Jsou dány dvě kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$  s různými středy a poloměry. Sestrojte jejich společné tečny.

**PŘÍKLAD 15.4.** Do půlkruhu s průměrem  $AB$  vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby strana  $KL$  ležela na úsečce  $AB$  a další dva vrcholy  $M, N$  na dané půlkružnici.

**PŘÍKLAD 15.5.** Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $v_a = 5\text{cm}$ ,  $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ,

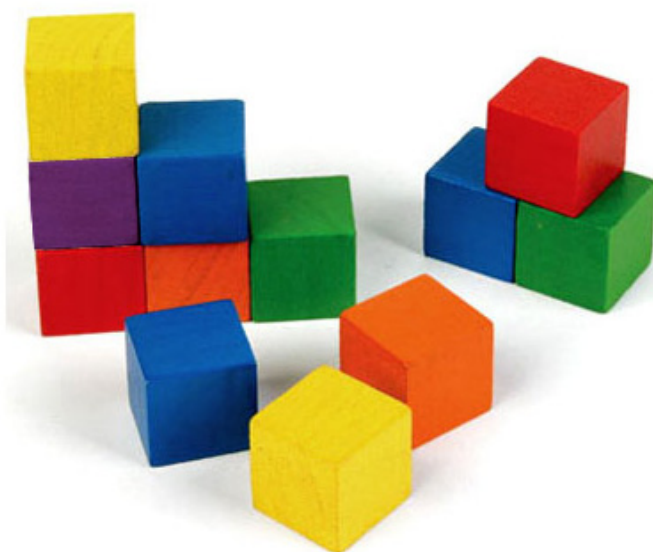
b)  $\alpha, \beta, v_c,$

c)  $\alpha, \beta, t_c,$

d)  $a : b = 3 : 5, \gamma = 60^\circ, t_c = 6cm.$

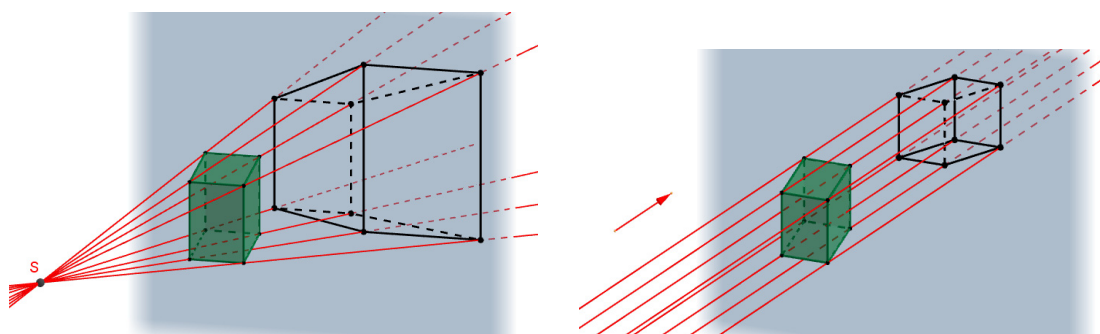
## 16 Stereometrie

Stereometrie je geometrií trojrozměrného prostoru. Při vyučování stereometrie sledujeme dle [5] (viz str. 354) jako jeden z cílů rozvoj těchto schopností: *schopnost názorně zachytit prostorovou situaci rovinným obrázkem, schopnost analýzy rovinného obrázku prostorové situace (tj. schopnost vidět takový obrázek „prostorově“), konstrukce těles, jejich řezů a sítí, prostorová představivost, ozřejmování vztahů zachycených útvarů.*



Obrázek 113: Kostka jako výchozí geometrické těleso

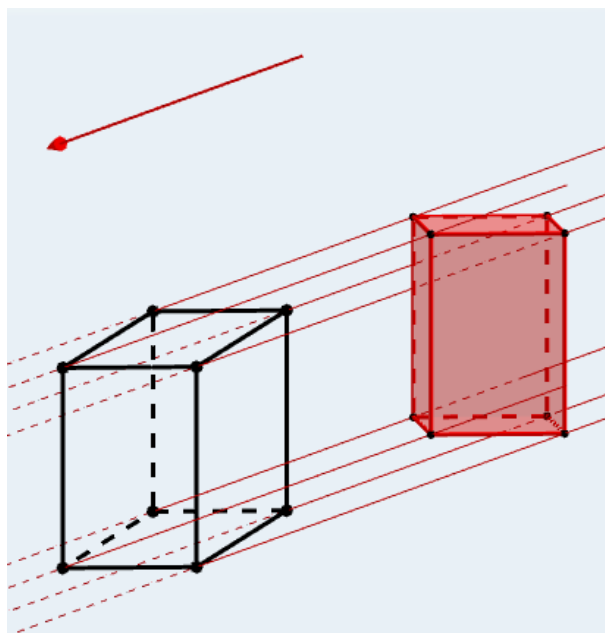
### 16.1 Středové a rovnoběžné promítání do roviny



Obrázek 114: Středové (vlevo) a rovnoběžné (vpravo) promítání trojrozměrného útvaru do roviny

## 16.2 Volné rovnoběžné promítání

Základní metodou zobrazení trojrozměrných těles používanou ve výuce na základní a střední škole je *volné rovnoběžné promítání*.

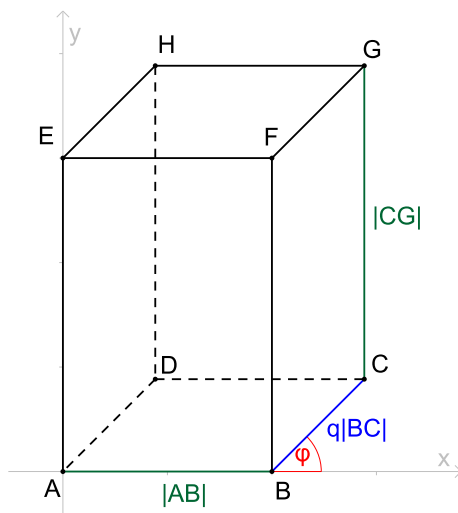


Obrázek 115: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádrů v „průčelné“ poloze

*Volným rovnoběžným promítáním* (nazývá se též zkráceně *Volné promítání*) nazýváme rovnoběžné promítání, u kterého nezadáváme souřadnicové osy (přesněji jejich průměty). Při zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání dbáme na dodržení těchto vlastností (viz Obr. 115):

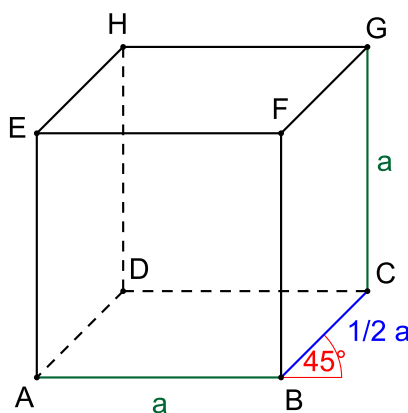
- Průmětem libovolné přímky je buď přímka nebo bod.
- Průmětem libovolných dvou rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (mohou i splývat) nebo dva body.
- Průmětem každého geometrického útvaru, který leží v průčelné rovině (tj. v rovině rovnoběžné s průmětnou) je útvar s ním shodný.
- Geometrický útvar, který neleží v průčelné rovině se zpravidla zkresluje. Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky  $AB$ ,  $CD$  a jejich obrazy  $A'B'$ ,  $C'D'$  platí  $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$ .

- Obrazy úseček kolmých k průmětně (tj. k jakékoliv průčelné rovině) jsou vzájemně rovnoběžné a s vodorovným směrem (představme si třeba směr kladné poloosy  $x$ ) svírají úhel  $\varphi$  (zpravidla volíme  $\varphi = 45^\circ$ ). Velikost obrazu každé takové úsečky je potom  $q$  násobkem velikosti původní úsečky, tj. pro každou úsečku  $KM$  kolmou k průmětně a její obraz  $K'M'$  platí  $|K'M'| = q|KM|$  (zpravidla volíme  $q = \frac{1}{2}$ ).



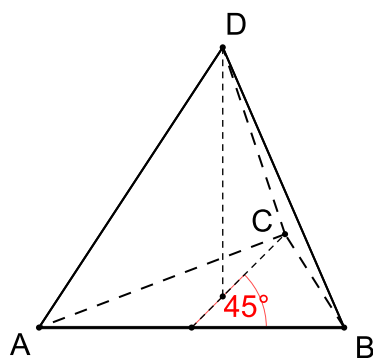
Obrázek 116: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kváдру  $4 \times 5 \times 6$

**PŘÍKLAD 16.1.** *Naučte se načrtnout od ruky krychli, pravidelný čtyřstěn a válec ve volném rovnoběžném promítání ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $q = 1/2$ ), viz Obr. 117, 118 a 119.*

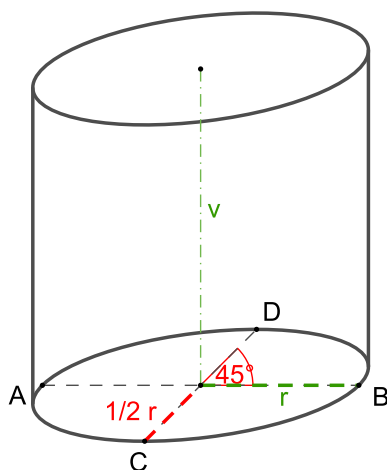


Obrázek 117: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení krychle  $a \times a \times a$





Obrázek 118: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení pravidelného čtyřstěnu s hranou délky  $a$



Obrázek 119: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení válce s poloměrem  $r$  a výškou  $v$

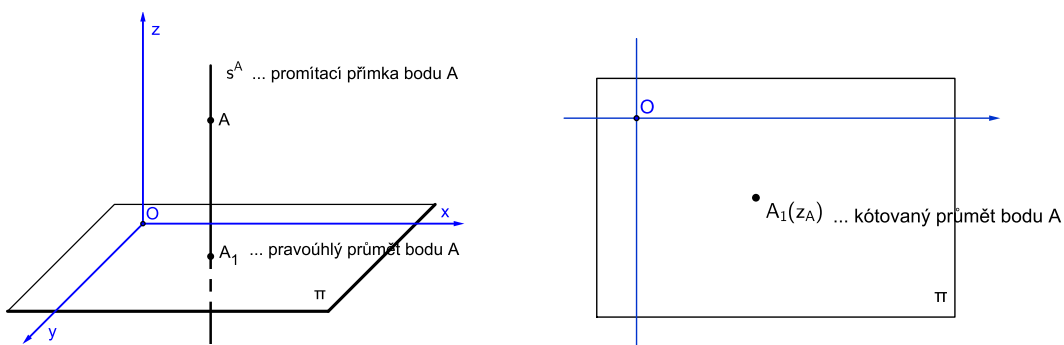
### 16.3 Další zobrazovací metody

V technické praxi, ale nejenom tam, se používají následující metody pro zobrazení trojrozměrných útvarů v rovině:

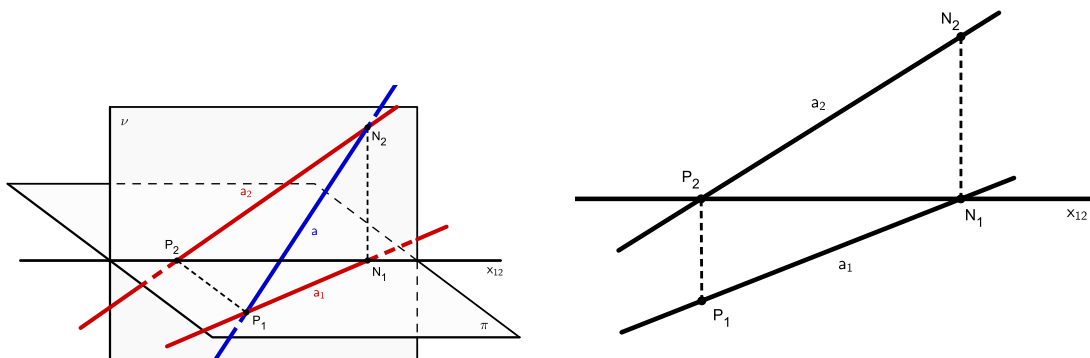
- *kótované promítání*; rovnoběžné promítání kolmo na jednu průmětnu (*půdorysnu*), viz Obr. 120,
- *Mongeovo promítání*; útvar je promítnut dvěma rovnoběžnými promítáními na dvě vzájemně kolmé průmětny (*nárysnu* a *půdorysnu*), viz Obr. 121,
- *kosouhlé promítání*; rovnoběžné promítání ve směru kosém na jednu průmětnu, která je totožná s jednou ze souřadnicových rovin, speciál-

ním případem kosoúhlého promítání je *volné rovnoběžné promítání*, viz Obr. 122,

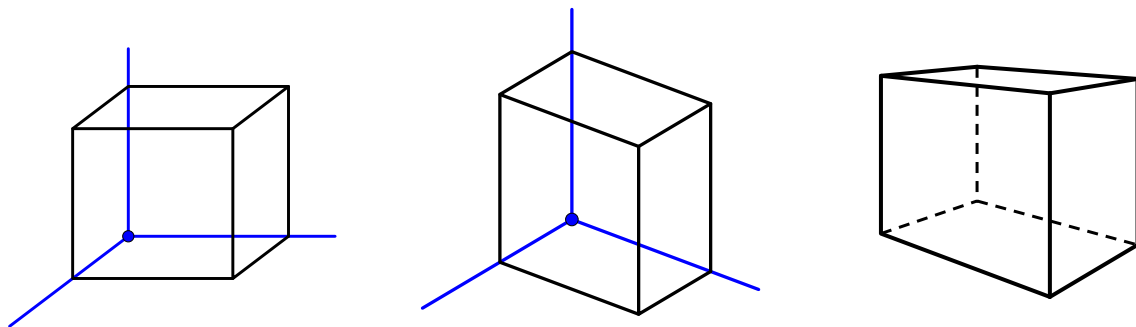
- *axonometrie*; rovnoběžné promítání na rovinu obecně umístěnou vzhledem k souřadnicovým osám, pokud je směr promítání kolmý, hovoříme o *pravoúhlé axonometrii*, viz Obr. 122,
- *perspektiva*; středové promítání, odpovídá našemu zrakovému vjemu, existuje více druhů perspektivy, viz Obr. 122.



Obrázek 120: Kótované promítání – zobrazení bodu



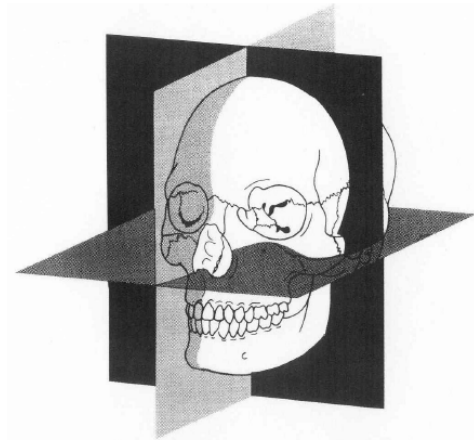
Obrázek 121: Mongeovo promítání – zobrazení přímky



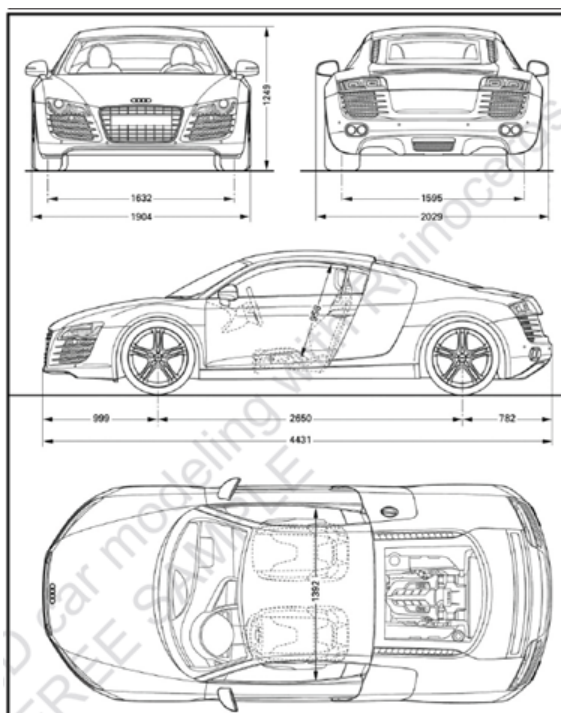
Obrázek 122: Kosoúhlé promítání (vlevo), pravoúhlá axonometrie (uprostřed), perspektiva (vpravo)

## 16.4 Sdružené průměty prostorového útvaru

Pro zachycení informací o prostorovém útvaru využíváme jeho kolmé průměty do jedné, dvou i více průměten, viz Obr. 123. Často je kombinujeme i s názorným průmětem útvaru, viz Obr. 124



Obrázek 123: Nárýs, půdorys a bokorys (*H. Stachell: The status of today's descriptive geometry related education in Europe*)

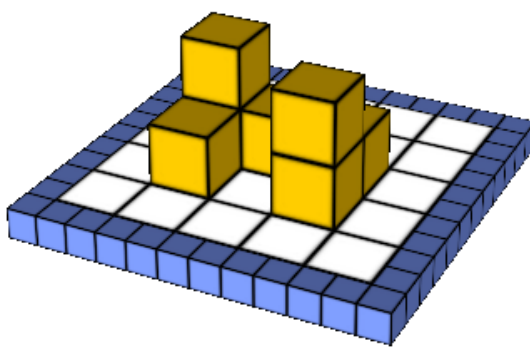


Obrázek 124: Audi R8 ([www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf](http://www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf))

## 16.5 Stavby z krychlí

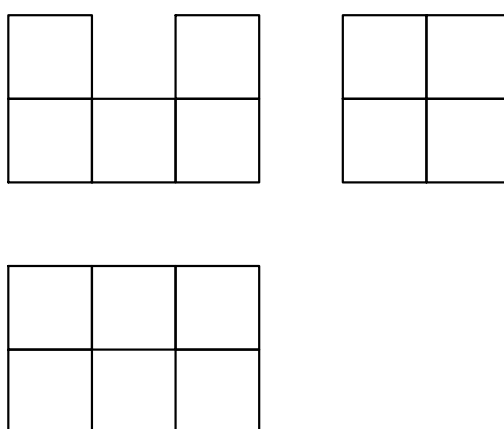
Jako stavbu z krychlí rozumíme mnohostěn, který vznikl spojením několika krychlí slepením jejich stěn.

**PŘÍKLAD 16.2.** Na Obr. 125 je stavba z kostek, která byla vytvořena v software Elica DALEST<sup>14</sup>. Zobrazte nárys, půdorys a bokorys této stavby. Je její tvar určen těmito třemi průměty jednoznačně? Dalo by se k jednoznačnému určení stavby využít pouze jejího půdorysu?



Obrázek 125: Stavba z kostek (<http://www.elica.net/dalest/dalest.html>)

Nárys, půdorys a bokorys tělesa z Obr. 125 vidíme na Obr. 126. Je zřejmé,



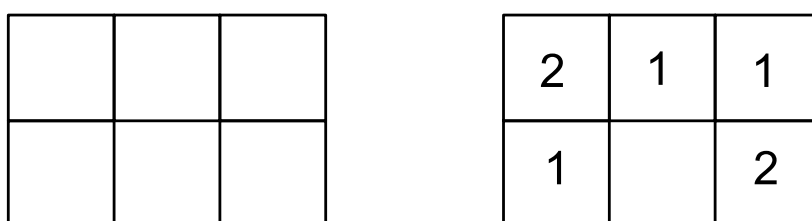
Obrázek 126: Stavba z Obr. 125 – nárys, půdorys a bokorys

že těmito třemi průměty není dané těleso jednoznačně určeno. Existuje

<sup>14</sup><http://www.elica.net/dalest/dalest.html>

více různých těles postavených z kostek, které mají stejné průměty. Zkuste nějaké takové těleso načrtnout ve volném rovnoběžném promítání.

Přesto existuje možnost, jak takové těleso jednoznačně určit jenom jedním průmětem! Jedná se o *kótovaný půdorys*, v němž je výška jednotlivých „věží“ z kostek, z nichž je těleso sestaveno, vyjádřena číslem uvedeným v jejím půdorysu. Srovnání běžného a kótovaného půdorysu uvažovaného tělesa vidíme na Obr. 127

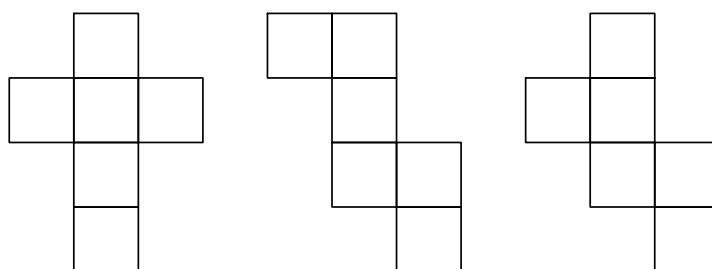


Obrázek 127: Půdorysy stavby z kostek – běžný (vlevo) a kótovaný (vpravo)

## 16.6 Síť těles složených z kostek

Sítí mnohostěňů (těleso „slepené“ z kostek je mnohostěň) rozumíme takové souvislé uspořádání všech jejich stěn do roviny, že po jeho vystřížení bychom byli schopni z něho těleso vytvořit (přesněji povrch či hranici tělesa).

**PŘÍKLAD 16.3.** *Pokuste se nakreslit co nejvíce sítí krychle.*



Obrázek 128: Tři vybrané sítě krychle

Existuje 11 různých sítí krychle. Tři z nich vidíme na Obr. 128. Pokuste se načrtnout i ty ostatní, nebo alespoň některé z nich.

## Literatura

- [1] Devlin, K. *Jazyk matematiky*. ARGO, 2003.
- [2] Askew, M. a S. Ebbutt. *Geometrie bez (m)učení: od Pythagora k dobývání vesmíru: abeceda geometrie v každodenním životě: fascinující tvary a konstrukce*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4125-3.
- [3] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [4] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907.  
Dostupné na [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides\\_Servit.pdf](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf)
- [5] Hejný, M. et al. *Teória vyučovania matematiky 2*. 1. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1988.
- [6] Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.
- [7] Kuřina, F. *10 pohledů na geometrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.
- [8] Kuřina, F. *Matematika jako pedagogický problém: mé didaktické krédo*. Hradec Králové: Gaudamus, 2016.
- [9] Odvárko, O., Kadleček, J. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-276-7.
- [10] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.  
Dostupné na <http://dml.cz/dmlcz/402750>
- [11] Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.
- [12] Švrček, J. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1.
- [13] Schwabik, Š., Šarmanová, P. Určitý integrál a počátky teorie míry (19. století) In: Štefan Schwabik (author); Petra Šarmanová (author): *Malý průvodce historií integrálu*. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 54–69.
- [14] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství*. Práh, Praha, 2003.
- [15] Vyšín, J. a kol.: *Geometria pre pedagogické fakulty II*, Bratislava, 1970.