10 Axiomatická výstavba geometrie

„Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.“

Immanuel Kant

AXIOMATICKÝ SYSTÉM (AXIOMY + ZÁKLADNÍ POJMY)

$\downarrow$

$(dedukce,\ definice)$

$\downarrow$

VĚTY

Vývoj pojmu axiom:

axiom (lat. postulát) = požadavek

Euklides (kolem r. 300 pr.n.l.):
axiomy = zřejmé a pravdivé výroky jejichž pravdivost se opírá o naši zkušenost.

> *Eukliduv axiom o rovnoběžkách: „Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší než dva pravé úhly, se vždy protínají, a to po té straně přímky, kde je součet menší.“*

David Hilbert (1862 - 1943):

> *„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a půllitry.“*

→ Princip duality (záměna pojmu v rámci jednoho systému).
→ Různé **modely abstraktní geometrie** (různé **interpretace pojmu**).
Např. Poincarého model nebo Beltramiho - Kleinuv model.

Požadavky na soustavu axiomů:

1. **Bezespornost** - nelze odvodit zároveň V i $\neg V$.

2. **Nezávislost** - žádný axiom nemůže být logickým důsledkem ostatních.

3. **Úplnost** - všechny modely z ní odvozené jsou vzájemně izomorfní,
tj. platí v nich stejné věty.

Soustava axiomů euklidovské geometrie
Není jednoznačně určena, tj. může jich být více a mohou se lišit axiomy i jejich počtem.

Co je v jedné soustavě axiomem, může být v jiné soustavě větou deduktivně odvozenou.

10.1 Hilbertova soustava axiomů euklidovské geometrie

Axiomy
- incidence
- uspořádání
- shodnosti
- spojitosti
- rovnoběžnosti

10.1.1 Axiomy incidence I

I1: Dva různé body mají společnou jednu přímku.
I2: Přímka obsahuje aspoň dva různé body.
I3: Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.
I4: Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.
I5: Jestliže dva různé body přímky p leží v rovině ρ, potom všechny body přímky p leží v ρ.
I6: Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.
I7: Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.
I8: Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

Definice: Tři body, které leží na téže přímce, nazýváme **kolineární**.

ÚKOL: Užitím axiomů **I** dokažte následující věty:

Věta: Průnikem dvou různých rovin, které mají společný aspoň jeden bod, je přímka.
(Řešení: $I6 \longrightarrow I1 \longrightarrow I5$)

Věta: Tři nekolineární body jsou navzájem různé.
(Řešení: $A = B = C$ nebo $A = B \neq C$ vede ke sporu)

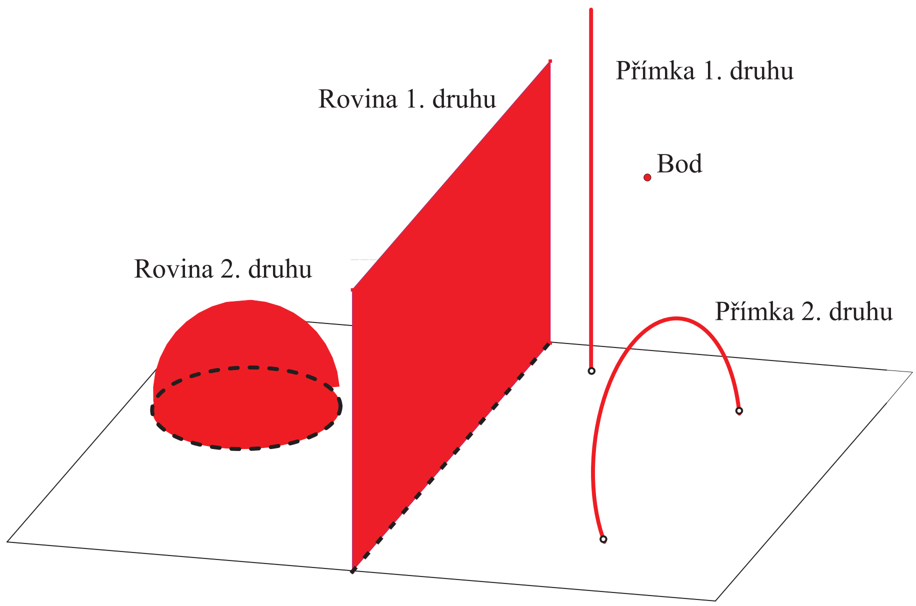
Modely geometrie [I]:
(tj. modely geometrie založené pouze na axiomech incidence)

M1: Minimální model

- čtyři body,
- šest přímek (protože existuje $\binom{4}{2} = 6$ neuspořádaných dvojic ze čtyř prvků),
- čtyři roviny (protože existuje $\binom{4}{3} = 4$ neuspořádaných trojic ze čtyř prvků).

M2: Poincarého model

Je tvořen **vnitřními** body poloprostoru omezeného rovinou ω. Rozlišujeme zde přímky a roviny prvého a druhého druhu (viz Obr. 3). Přímka prvého druhu je tvořena vnitřními body polopřímky kolmé na rovinu ω, přímka druhého druhu je tvořena vnitřními body polokružnice kolmé k rovině ω a se středem v rovině ω. Rovina prvého druhu je tvořena vnitřními body poloroviny kolmé na

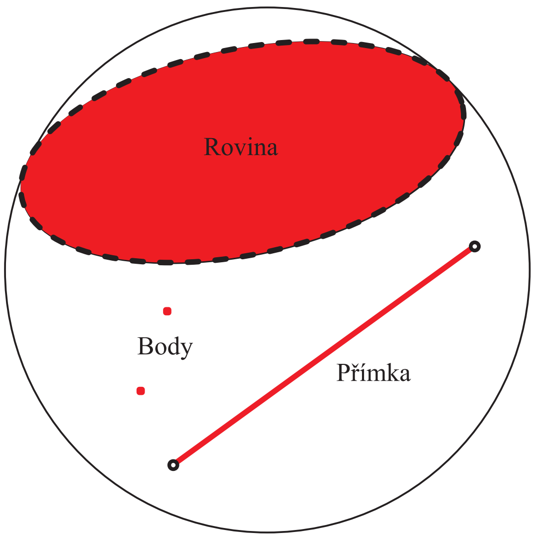


Obrázek 3: Poincarého model

ω a rovina druhého druhu potom odpovídá vnitřním bodům polokoule se středem v ω. Incidence je euklidovská.

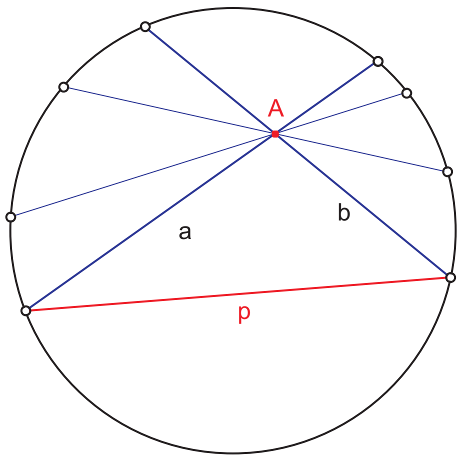
M3: Beltramiho - Kleinův model

Tvořen vnitřními body koule. Přímku reprezentují vnitřní body tětivy koule a rovinu vnitřní body jejího „rovinného" řezu (viz Obr. 4). Incidence je euklidovská.

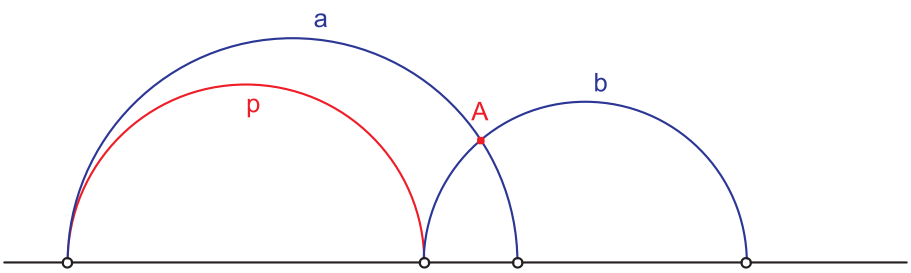


Obrázek 4: Beltramiho-Kleinův model

Modely **M2**,**M3** nejsou modely euklidovské geometrie, nesplňují axiom rovnoběžnosti (viz Obr. 5,6). Vidíme, že v obou případech existuje více než jedna rovnoběžka s p, tj. přímka, která prochází bodem A a nemá s danou přímkou p žádný společný bod. Přímky a, b jsou hraniční přímky.



Obrázek 5: M2: axiom rovnoběžnosti



Obrázek 6: M2: axiom rovnoběžnosti

M4: Aritmetický celočíselný model planimetrie

- bod = uspořádaná dvojice celých čísel $[x, y] \in Z$,
- přímka = body splňující rovnici $ax + by + c = 0,\ \ a, b, c \in Z$.

Poznámka: Stejně můžeme definovat model racionální (tj. $[x, y] \in Q,\ \ , a, b, c \in Q$) či reálný (tj. $[x, y] \in R,\ \ , a, b, c \in R$).

10.1.2 Axiomy uspořádání U

Týkají se vlastnosti „bod leží mezi jinými dvěma“.

U1: Jestliže bod B leží mezi body A, C, jsou A, B, C tři různé body na přímce a platí též, že B leží mezi body C, A.

U2: Jestliže A, B jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce AB aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C.

U3: Ze tří různých bodů A, B, C ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.

U4: (Paschův axiom) Jsou-li A, B, C tři nekolineární body a přímka p, která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body A, C, potom přímka p obsahuje bod mezi A, B nebo mezi B, C.

ÚKOL: Užitím axiomů **I, U** dokažte následující věty:

Věta: Mezi dvěma různými body leží aspoň jeden bod.
(Řešení: $I3 \longrightarrow U2 \longrightarrow U2 \longrightarrow U4$)

Věta: Na každé přímce existuje nekonečně mnoho bodů.

Geometrie [IU] se nazývá též **geometrie polohy**

Modely s konečným počtem prvků nemohou splňovat axiomy uspořádání. Proč?
(Řešení: Podle $I3, I1$ existuje v takové geometrii vždy aspoň jedna přímka, tj. podle $U2$ nekonečně mnoho bodů)

Modely [IU]:

Beltramiho - Kleinuv model
Uspořádání platí ve smyslu euklidovském.

Poincarého model
Uspořádání platí ve smyslu euklidovském.

Aritmetický racionální model planimetrie
Proč již nestačí aritmetický celočíselný model?

10.1.3 Axiomy shodnosti S

- metrické vlastnosti

- formulují základní vlastnosti shodnosti úseček

S1: Je-li $AB = CD$, potom $A \neq B, C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB = BA$. (*Shodnost se týká pouze dvojic různých bodů.*)

S2: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Potom existuje jediný bod E polopřímky CD, pro který platí $AB = CE$. (*Nanášení úsečky na polopřímku.*)

S3: Jestliže $AB = CD$ a $CD = EF$, potom $AB = EF$. (*Tranzitivnost shodnosti.*)

S4: Jestliže bod C leží mezi body A, B, bod C' mezi body A', B' a jestliže platí $AC = A'C', BC = B'C'$, potom platí $AB = A'B'$. (*Grafický součet dvou úseček.*)

S5: Nechť jsou $ABC, A'B'K$ dvě trojice nekolineárních bodů a nechť $AB = A'B'$. Potom existuje jediný bod C' poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC = A'C', BC = B'C'$.(*Přenesení trojúhelníka k dané úsečce do dané poloroviny.*)

S6: Nechť jsou $ABC, A'B'C'$ dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$. Nechť dále leží bod P mezi body A, B a bod P' mezi body A', B' tak, že $AP = A'P'$. Potom $CP = C'P'$.

ÚKOL: Užitím axiomů **S** dokažte, že shodnost se týká neuspořádaných dvojic bodů.

(Řešení: $S1: \ AB = CD, CD = DC, \ S3: AB = DC$)

10.1.4 Axiomy pohybu S^*

- axiomatickým pojmem je shodné zobrazení (**přemístění**)

S^*1: Leží-li bod C mezi body A, B a jsou-li A', B', C' obrazy bodu v přemístění, leží bod C' mezi body A', B'.

S^*2: Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.

S^*3: Nechť jsou $ABC, A'KL$ dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod A do bodu A', polopřímku AB do polopřímky $A'K'$ a polorovinu ABC do poloroviny $A'KL$.

S^*4: Jestliže jsou A, B dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod A do bodu B a bod B do bodu A.

S^*5: Jestliže je $\angle BAC$ dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku AB do polopřímky AC a polopřímku AC do polopřímky AB.

S^*6: Složením dvou přemístění vznikne přemístění.

S^*7: Identita je přemístění.

S^*8: Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.

S^*6, S^*7, S^*8 - všechna přemístění tvoří grupu

Věta: Abstraktní geometrie [IUS], [IUS*] jsou totožné, tj. skupiny axiomu S, S^* jsou ekvivalentní.

Modely [IUS], [IUS*]:

Model planimetrie - zobrazení inverzní ke stereografické projekci.

Aritmetický model reálný
Proč již nestačí aritmetický racionální model?

Beltramiho - Kleinuv model

Úsečka AB je shodná s CD právě když

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(TWCD)|,$$

kde U, V, T, W jsou krajní body úseček AB, CD, které, jak víme, do modelu již nepatří. Uvedenou podmínka shodnosti vychází z toho, že výraz $|\ln(UVAB)|$ je invariantem rovností

$$(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA).$$

10.1.5 Axiomy spojitosti A, C, D

Lze změřit každou úsečku?
Existuje ke každému číslu odpovídající úsečka ?

Archimedův axiom

A: Jsou dány úsečky AB, CD. Na polopřímku AB postupně nanášíme úsečku CD a dostaneme body $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}$. Potom existuje takové $n \in N$, že bod P_{n+1} neleží uvnitř AB.

Cantorův axiom(axiom úplnosti)

C: Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.

Věta: Jestliže průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených neobsahuje žádnou úsečku, je tento průnik množinou s jedním bodem.
(Dokážeme sporem)

Věta: V geometrii [IUSAC] je každé kladné číslo velikostí nějaké úsečky.

Axiomy A, C lze nahradit jediným axiomem D:

Dedekindův axiom

D: Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka (případně s vynecháním jednoho nebo obou krajních bodů).

Absolutní geometrie: [IUSAC], [IUSD]

= společný základ euklidovské i neeuklidovské geometrie.

10.1.6 Axiom rovnobežnosti R

Definice 10.1 *Souběžky - dvě přímky v téže rovině, které nemají společný bod.*

Jestliže prochází daným bodem A jediná souběžka s danou přímkou p, nazýváme ji **rovnoběžkou s přímkou** p. Jestliže procházejí daným bodem A aspoň dvě souběžky s přímkou p, potom **rovnoběžkami s přímkou** p nazýváme ty dvě z nich, v nichž leží ramena vrcholových úhlů vyplněných ostatními souběžkami.

Některé věty absolutní geometrie:

Věta: (Legendrova) Jsou-li čísla α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, platí $\alpha+\beta+\gamma \leq \pi$.

Věta: Jestliže je p libovolná přímka, A bod, který na ní neleží, potom bodem A prochází aspoň jedna souběžka s přímkou p.

Axiom rovnoběžnosti

R: Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází nejvýše jedna souběžka s přímkou p.

Tento axiom je ekvivalentní s Euklidovým pátým postulátem. Ten se jeví tak samozřejmý, že byl dlouho považován za pouhý důsledek předchozích čtyř postulátů. Snahy o jeho odvození z těchto postulátů však vedly vždy jenom k jeho novým formulacím (některé viz níže). Důkazem toho, že axiom rovnoběžnosti je skutečným axiomem a nikoliv důsledkem jiných axiomů, bylo až objevení existence geometrie [IUSDnonR] (Lobačevskij), která se ukázala jako logicky bezesporná. R a zároven nonR nemůže být totiž důsledkem axiomů IUSD, jsou tedy na nich nezávislé.

[IUSDR] = euklidovská geometrie

[IUSDnonR] = hyperbolická (Lobačevského) geometrie

Některé věty ekvivalentní s R:

1. *Existuje aspoň jeden euklidovský trojúhelník.*

2. *Existuje dutý úhel takový, že každý jeho vnitřní bod náleží úsečce, jejíž krajní body leží na ramenech tohoto úhlu.*

3. *Pythagorova veta*

4. *Každé dvě kolmice ke dvěma různoběžkám jsou různoběžné.*

5. *Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 2π.*

6. *Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.*

7. *Euklidův pátý postulát.*

Poznámka: Objevení ekvivalence uvedených vět s axiomem R je výsledkem snah o odvození R z ostatních axiomů.

10.1.7 Lobačevského geometrie [IUSDnonR]

L: Existují přímka p a bod D, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem D neprotínají přímku p.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Shodují-li se dva trojúhelníky v úhlech, jsou shodné.

Čím je menší součet úhlů trojúhelníka, tím je větší jeho obsah.

Čím menší je obsah trojúhelníka, tím je součet úhlů bližší k π.

Lobačevského formule:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\Pi(x)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}$$

úhel souběžnosti: $\alpha = \Pi(x)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\Pi(x)\right) = \frac{\pi}{2}$$

V dostatečně malé části Lobačevského roviny lze užívat euklidovské geometrie, aniž se dopustíme podstatných chyb.

model: Beltramiho-Kleinův model

Riemannova geometrie

= eliptická geometrie

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Model: povrch koule

Literatura:

[1] Vyšín, J. a kol.: Geometria pre pedagogické fakulty II, Bratislava, 1970.
[2] Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN Praha, 1988.
[3] Devlin, K: Jazyk matematiky, ARGO, 2003.