1 Lineární algebra

Slovo ALGEBRA pochází z arabského „al-jabr“, což znamená „nahrazení“. Toto slovo se objevilo v názvu knihy

Hisab al-džebr val-muqabala
(„Věda o redukci a vzájemném rušení“)

islámského matematika

Muhammada ibn Músá al-Chvárizmího
(790? - 850?, Chiva, Bagdád),

která je považována za vůbec první knihu o algebře.

Původně se jednalo o nauku o řešení rovnic. Dnešní algebra je daleko abstraktnější. Zabývá se studiem operací na množinách různých prvků a vlastnostmi **struktur**, které takto vznikají. Známými představiteli těchto struktur jsou **grupa** a **těleso**.

Základním rysem algebry je **označení studovaných objektů písmeny**. Tento formalismus navrhl *René Descartes* (1596 - 1650). Písmena ze začátku abecedy $(a, b, c, ...)$ měla reprezentovat libovolná čísla - parametry. Písmena z konce abecedy $(p, q, r, s, t, ..., x, y, z)$ pak měla představovat proměnné hodnoty konkrétních veličin (tlak, teplota, …, souřadnice).

Lineární algebra se zabývá vektory, maticemi, soustavami lineárních rovnic a vektorovými prostory.

2 Matice

Matice vznikly v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic. Pojem „matice" (angl. matrix) zavedl v roce 1850 anglický matematik *James Joseph Sylvester* (1814–1897). Metoda řešení soustav odpovídající použití matic však byla známa již dlouho před tím[1].

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede například úloha nalezení koeficientů tzv. *lineární kombinace vektorů*. Pojem *vektor* znáte ze střední školy - z fyziky, kde jste ho používali pro znázornění velikosti a směru vektorové veličiny (tzv. *fyzikální vektor*), a z geometrie, kde jste vektor používali k vyjádření směru a velikosti posunutí v tomto směru, např. při zápisu parametrických rovnic přímky (tzv. *geometrický vektor*). Pro ilustraci pojmu *lineární kombinace* nyní použijeme tzv. *aritmetický vektor*, tj. vektor jako uspořádanou $n-$tici reálných čísel. Později budeme využívat skutečnosti, že při zavedení souřadnicového systému existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi geometrickými a aritmetickými vektory.

Aritmetické vektory můžeme násobit reálným číslem (tak, že tímto číslem vynásobíme každý prvek vektoru), vektory se stejným počtem prvků pak můžeme sčítat (tak, že sčítáme sobě odpovídající prvky). Kombinace těchto dvou operací s vektory se nazývá *lineární kombinace vektorů*. Máme-li například tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o stejném počtu prvků, potom výraz $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$, kde $k, l, m \in R$, nazýváme *lineární kombinace vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ s koeficienty k, l, m.* Výsledkem lineární kombinace vektorů je opět vektor.

Příklad 1. *Vytvořte lineární kombinaci $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ pro vektory $\vec{a} = (-2, 1, 5), \vec{b} = (2, 0, 3), \vec{c} = (1, -3, 9)$ a koeficienty $k = -3, l = 2, m = 4$.*

[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)

Příklad 2. *Určete koeficienty $x, y, z \in R$, pro které platí následující rovnost:* $x(2,0,-1) + y(1,3,5) + z(0,4,3) = (3,9,2)$.

Řešení: Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnice

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3y + 4z &= 9 \\ -x + 5y + 3z &= 2, \end{aligned}$$

kterou si můžeme schematicky zapsat pomocí tzv. *rozšířené matice soustavy*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Tu potom upravíme užitím tzv. *Gaussovy eliminace*. Této metodě se budeme detailně věnovat později (viz str. 24). Zde si pouze uvedeme jednu z možných posloupností vzájemně ekvivalentních matic, které vedou k příslušné matici v *Gaussově tvaru*. Zvídavý čtenář si pak sám může promyslet jednotlivé úpravy odpovídající uvedeným maticím.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Příklad 3. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1, & \sqrt{2}, & 5, & -0.14 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definice 2.1 (**Matice**). *Matice je obdélníkové nebo čtvercové uspořádání prvků do řádků a sloupců.*

Typ matice

Matice A je typu $(3, 3)$, matice B je typu $(3, 1)$, matice C a E jsou typu $(3, 4)$ a matice D je typu $(1, 4)$.

Typ matice zapisujeme buď ve tvaru (m, n) nebo ve tvaru $m \times n$ (čteme „m krát n“). Je-li potřeba informovat o typu matice, zapisujeme $A_{(3,3)}$, $B_{(3,1)}$, $C_{(3,4)}$ nebo $A_{3\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times4}$.

Matice A je příkladem tzv. **čtvercové matice**. Konkrétně se jedná o čtvercovou matici řádu 3 (nebo 3. řádu, nebo 3. stupně).

Prvek matice

Jeho umístění v matici je udáno číslem řádku (index i) a číslem sloupce (index j).

Prvek matice A značíme a_{ij}, prvek matice M potom m_{ij}.

Příklad 4. *Je dána matice*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Určete hodnoty prvků m_{21}, m_{22}, m_{12} této matice.

Prvkem matice může být číslo, funkce nebo klidně zase matice.

Zápis matice
K zápisu matic budeme používat hranaté nebo kulaté závorky:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Rovnými závorkami pak budeme značit **determinant matice**:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Symbolický zápis matice
Matice označujeme velkými písmeny, např. $A, B, M, N, ...$, jejich prvky potom odpovídajícími malými písmeny $a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, ...$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Příklady matic: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+4i & 2-3i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, 3, 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Obdélníková matice $\quad m \neq n$

Čtvercová matice $\quad m = n$

Čtvercová matice typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice** $n-$**tého řádu**.

Řádky a sloupce matice

Prvky matice jsou organizovány do řádků (řádkových vektorů) a sloupců (sloupcových vektorů).

$i-$tý řádek (řádkový vektor): $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = a_i$

$j-$tý sloupec (sloupcový vektor): $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) = \overline{a}_i$

Příklad 5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transponovaná matice k matici A: $\quad A^T$

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}].$$

Příklad 6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hlavní diagonála matice

- je tvořena prvky se stejným číslem řádku a sloupce, tj. prvky a_{ii}.

Diagonální matice

- všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule

Příklad 7.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Většinou se pod pojmem diagonální matice rozumí matice čtvercová. Někdy se však tento pojem zobecňuje i na obdélníkové matice.

Jednotková matice
- diagonální matice se všemi prvky na hlavní diagonále rovnými jedné, tj. $a_{ii} = 1$.

Příklad 8.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Jednotková matice je čtvercová. Je-li třeba, zapisujeme $I_{(n,n)}$ nebo $I_{n\times n}$, např. $I_{3\times 3}$.

Trojúhelníková matice

$$\text{horní: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{dolní: } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poznámka. Trojúhelníková matice je čtvercová.

Symetrická matice: $\quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{tj.} \quad A^T = A$

Příklad 9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Symetrická matice je čtvercová.

Příklad 10. *Zápis kuželosečky* $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$ *pomocí (symetrické) matice:*

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Antisymetrická matice: $\quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad$ tj. $\quad A^T = -A$

Příklad 11.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 12. *Matice otočení kolem počátku o úhel* α*:*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Nulová matice: $a_{ij} = 0$

Příklad 13.

$$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1 Cvičení - Užití matic při řešení soustav lineárních rovnic

Lineární kombinace vektorů

1. Vytvořte uvedenou lineární kombinaci s danými vektory a koeficienty.

a) $k\vec{a} + l\vec{b}$; $\vec{a} = (1, 3, 0), \vec{b} = (-2, 0, 4); k = 1, l = 5$,

b) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\vec{a} = (2, 10), \vec{b} = (-1, 5), \vec{c} = (9, -7); k = 4, l = 3, m = -2$,

c) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\vec{a} = (4, 3, -2), \vec{b} = (0, 2, -1), \vec{c} = (3, 1, -7); k = 2, l = -3, m = 5$,

d) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$; $\vec{a} = (1, 0, 2), \vec{b} = (0, 1), \vec{c} = (3, 1, 0); k = 7, l = 4, m = -2$.

2. Určete koeficienty příslušné lineární kombinace tak, aby platila uvedená rovnost.

a) $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{o}$; $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (-2, 6), \vec{o} = (0, 0)$ (*nulový vektor*),

b) $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{d}$; $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{b} = (0, 1, -1), \vec{c} = (1, 1, 0), \vec{d} = (1, 2, 1)$.

Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3)

(a) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x - 5y &= 2 \end{aligned}$

(e) $x + 2y - z = 3$ (f) $x + y = 1$ (g) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$

(h) $\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$ (i) $\begin{aligned} x - y + 5z &= 2 \\ 4x + 3y - z &= 3 \\ 8x + 6y - 2z &= 7 \end{aligned}$ (j) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 9 \\ x - y + z &= 2 \\ x - 4y + 2z &= -3 \end{aligned}$

Úlohy na další procvičení

2. Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a)
$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 5x - 15y &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x + z - 2w &= -3 \\ 2x - y + 2z - w &= -5 \\ -6y - 4z + 2w &= 2 \\ x + 3y + 2z - w &= 1 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$

Domácí úkol

Příklad 1: Řešte dané soustavy v R^2 (R^3, R^4)

(a)
$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 6u + v &= 5 \\ 3u - 2v &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$x + 2y = 3$$

(d)
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= 9 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0 \\ 2p - q + 3r &= 3 \\ -p - q &= 6 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 2u - v + 2w &= 2 \\ -u - v + 3w &= 1 \\ 3u - 2w &= 1 \end{aligned}$$

Příklad 2: Určete hodnoty koeficientů a, b a c tak, aby soustava rovnic $ax + by + cz = 3$, $ax - y + cz = 1$, $x + by - cz = 2$ měla řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Příklad 3: Jaká množství 20% a 60% alkoholu musíme smísit, abychom dostali 50 litrů 30% alkoholu?

Příklad 4: Výlet lodí po proudu řeky do místa vzdáleného 75 km trvá 3 hodiny, zpáteční cesta proti proudu pak trvá 5 hodin. Určete průměrnou rychlost lodi vzhledem ke klidné vodě a průměrnou rychlost vody tekoucí v řece.

3 Algebraické operace s maticemi

3.1 Rovnost matic

$$A = B$$

Dvě matice se rovnají, jsou-li téhož typu a rovnají-li se jejich vzájemně si odpovídající prvky, tj. $a_{ij} = b_{ij}$.

Příklad 14.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.2 Sčítání matic

$$A + B$$

Odčítání matic $A - B$ definujeme pomocí ščítání a opačné matice k B:

$$A - B = A + (-B).$$

Sčítat (odčítat) můžeme pouze matice téhož typu. Výsledkem je matice, jejíž prvky jsou součtem (rozdílem) vzájemně si odpovídajících prvků daných matic.

Příklad 15. *Sčítání a odčítání matic:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ NELZE,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ NELZE.

Vlastnosti operace sčítání matic na množině matic typu (m,n):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$A + B = B + A,$$

iii) asociativní

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

iv) s neutrálním prvkem (nulová matice)

$$A + O = O + A = A.$$

v) s inverzními prvky (opačné matice)

$$A + (-A) = O.$$

Množina $M_{(m,n)}$ matic typu (m,n) tvoří spolu s operací sčítání matic **komutativní grupu**, zapisujeme $(M_{(m,n)}, +)$.

3.3 Násobení matice reálným číslem

$$k \cdot A,\ k \in R$$

Číslem k násobíme každý prvek matice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ k \in R,\ \text{potom k} \cdot \text{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

Příklad 16.

a) $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 14 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 & 35 & 10 \\ 15 & 20 & 80 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 16 \end{bmatrix}$.

Příklad 17. *Vypočtěte:*

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastnosti operace násobení matice reálným číslem (skalární násobení matice):

i) neomezeně definovaná,

ii) komutativní

$$kA = Ak,$$

iii) asociativní

$$k(lA) = (kl)A,$$

iv) distributivní

$$k(A + B) = kA + kB,$$

$$(k+l)A = kA + lA,$$

v) s jednotkovým prvkem (skalárem)

$$1A = A,$$

vi) násobení -1 (vznikne matice opačná):

$$(-1)A = -A,$$

vii) násobení 0 (vznikne matice nulová):

$$0A = O_{(m,n)}.$$

Příklad 18. *Vypočtěte hodnotu výrazu (výsledkem je matice)* $2A + 3B$*, jsou-li dány matice:* $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Příklad 19. *Zjednodušte výraz:* $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 20. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 0 \\ -20 & 13 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *určete* $A + 2(B - 2C)$

Příklad 21. *Pro* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ *určete neznámou matici* X *v rovnici* $X + A = 0$.