

7.9 Cvičení

1. Vypočtěte determinanty následujících matic. O správnosti výsledku se přesvědčte užitím nějakého počítačového programu, například wxMaxima, Maple nebo Derive.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \text{ d) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -8 \end{bmatrix}, \text{ f) } \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ g) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix},$$

$$\text{h) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \text{ i) } \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ j) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & \cos x & -\sin x \\ 5 & \sin x & \cos x \end{bmatrix},$$

$$\text{k) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ l) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ m) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\text{n) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ o) } \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \text{ p) } \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

2. Vypočtěte determinanty matic (matice řádu vyššího než 3 řešte rozvojem i eliminací):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix}, \quad \text{h) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

3. Pokuste se ukázat, že platí vztahy

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B, \quad \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

a s jejich pomocí vypočtěte determinanty matic:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 9 & -5 \end{bmatrix}.$$

4. Určete, pro která x je daná matice regulární:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x & x \\ x & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 0 & x \end{bmatrix}.$$

5. Vypočítejte determinanty:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

6. Pro matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ určete následující hodnoty:

$$\text{a) } \det(A), \quad \text{b) } \det(A^{-1}), \quad \text{c) } \det(A^T), \quad \text{d) } \det(5A).$$

7. Vypočítejte, pro která x je daná matice A regulární / singulární:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & -1 & x \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \end{bmatrix}.$$