Kapitola 1

Kvadriky jako plochy 2. stupně

1.1 Úvod

Jak známo, každá rovina je v nějaké kartézské nebo afinní soustavě souřadnic dána rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, tedy lineární rovnicí, která neobsahuje kvadratické členy $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ ani žádné členy vyššího stupně. Existují ale plochy v prostoru E^3, které jsou množinou bodů, jejichž souřadnice splňují rovnici, která obsahuje kvadratické členy a žádné členy stupně vyššího. Takové plochy nazýváme plochy 2. stupně nebo kvadratické plochy nebo stručně kvadriky . Těmito plochami se budeme v této knížce zabývat. Jejich důležitost plyne již například z faktu, že mezi tyto plochy patří nejen "královna" mezi plochami — plocha kulová , ale i válcová a kuželová plocha, jednodílný a dvoudílný hyperboloid, hyperbolický paraboliod a další plochy, které se mimo jiné hojně využívají ve stavební praxi. V celé knížce budeme při vyšetřování kvadrik pracovat v kartézské soustavě souřadnic, pokud nebude řečeno jinak.

1.2 Základní pojmy

Definice: *Nechť je dána rovnice ve tvaru*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{1.1}$$

kde koeficienty a_{ij} jsou reálná čísla a alespoň jedno z čísel a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ je různé od nuly. Potom se množina všech bodů eukleidovského prostoru E^3, jejichž souřadnice v nějaké kartézské soustavě souřadnic vyhovují rovnici (1.1) nazývá **plocha** 2. **stupně***, přesněji, plocha* 2. *stupně určená rovnicí (1.1). Místo plocha* 2. *stupně užíváme též název* **kvadratická plocha** *nebo stručně* **kvadrika***. Body, které této rovnici vyhovují jsou body kvadriky.*

Stručně budeme hovořit o kvadrice, která je dána rovnicí (1.1), jako o kvadrice

(1.1). Přitom budeme předpokládat, že rovnice (1.1) je dána v nějaké kartézské soustavě souřadnic a nebudeme tuto skutečnost vždy zdůrazňovat.

Rovnici kvadriky (1.1) lze také zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{1.2}$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i, j = 1, 2, 3, 4$, jak se lze snadno vynásobením příslušných matic přesvědčit. Označíme-li matici $\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}$ písmenem $\mathbf{X}$ a matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

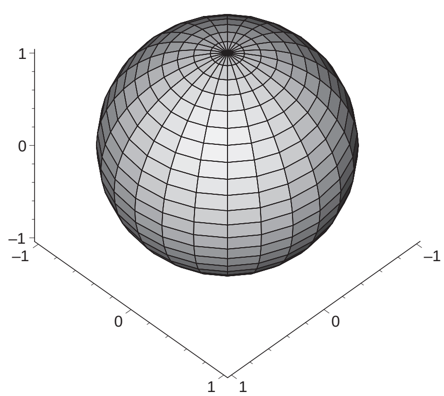
písmenem $\mathbf{K}$, lze rovnici kvadriky (1.1) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{XKX}^{\top} = 0, \tag{1.4}$$

přičemž matice $\mathbf{K}$ je symetrická, tj. $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, kde $\mathbf{K}^T$ značí transponovanou matici.

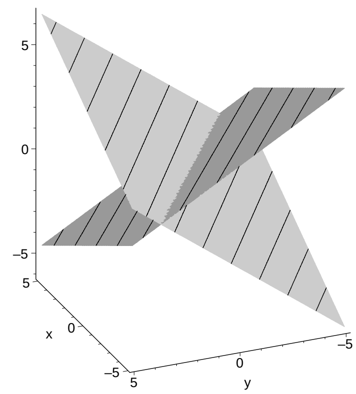
Příklady kvadrik:

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ — kulová plocha se středem v počátku a poloměrem 1.



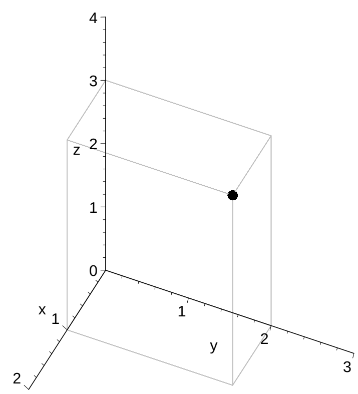
Obrázek 1.1: Kulová plocha

$(2x + 3y - 4z + 1)(3x + 4y + 7z - 3) = 0$ — dvě různé roviny .



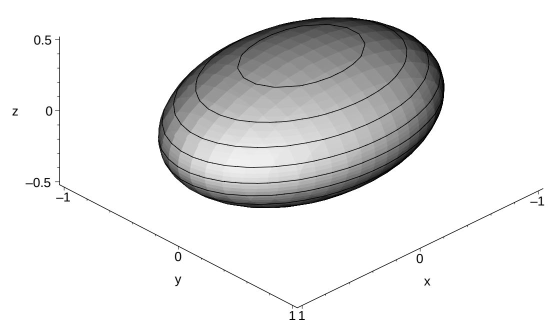
Obrázek 1.2: Dvě různé roviny

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0$ — jediný bod o souřadnicích $[1, 2, 3]$.



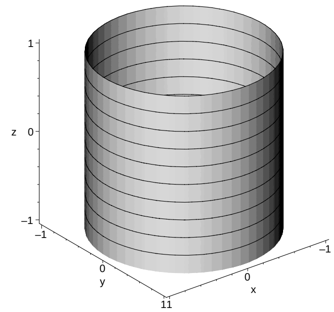
Obrázek 1.3: Bod

$x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 1 = 0$ — elipsoid.



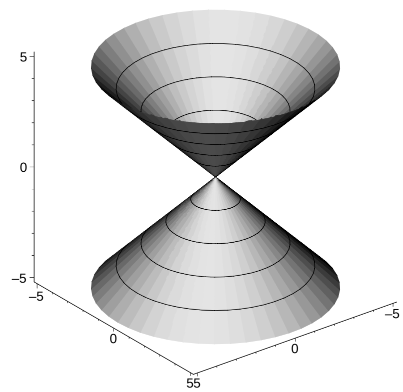
Obrázek 1.4: Elipsoid

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ — válcová plocha s poloměrem 1, jejíž osa je rovnoběžná s osou z. Abychom vyjádřili, že se jedná o množinu ve třírozměrném prostoru měli bychom správně psát $\{[x, y, z];\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.



Obrázek 1.5: Válcová plocha

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ — kuželová plocha s vrcholem v počátku.



Obrázek 1.6: Kuželová plocha

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ — množina prázdná.

PŘÍKLAD 1.2.1 *Odvoďte rovnici kulové plochy se středem v počátku a poloměrem r.*

PŘÍKLAD 1.2.2 *Odvoďte rovnici rotační válcové plochy s osou v z a s poloměrem r.*

PŘÍKLAD 1.2.3 *Hyperbolický paraboloid - příklad zborcené přímkové plochy*

Hyperbolické paraboloidy tvoří zastřešení nástupišť na autobusovém nádraží v Českých Budějovicích (viz Obr. 2.27).