L-transformace

Michal Šerý

Automatizace

Hlavní body

1. **Úvod do problematiky**
2. **Transformace**

Komplexní číslo

Tvary komplexního čísla:

$$z = a + jb$$

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$z = re^{j\varphi}$$

$$a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi, r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Podobně:

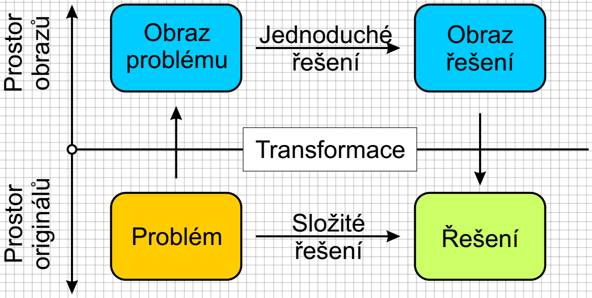
$$e^z = e^{(a+jb)} = e^a . e^{jb}$$

Co potřebujeme vyřešit?

Například rovnice:

$$\ddot{y} + \omega y = 0$$

Princip řešení s použitím transformace



Obrázek: Princip řešení problému

Typy transformací:

Laplaceova transformace: $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$

Fourierova transformace: $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$

Z-transformace: $Z\{f(k)\} = F(z)$

Transformace - definiční vztahy

L-transformace (Laplaceova transformace)
Přímá t $\Rightarrow$ p

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p)$$

$$\text{kde } p = a + j\omega$$

Zpětná p $\Rightarrow$ t

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}dp = f(t)$$

Transformace - definiční vztahy

F-transformace (Fourierova transformace)
zvláštní případ L-transformace pro $p = j\omega$
Přímá

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = F(j\omega)$$

Zpětná

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = f(t)$$

Transformace - definiční vztahy

Z-transformace (pro diskrétní systémy)
Přímá

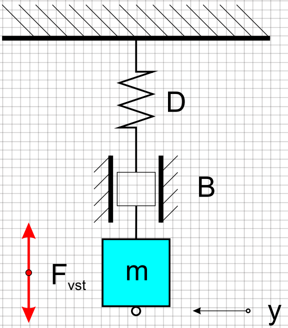
$$Z\{f(k)\} = \sum_{0}^{\infty} f(k) z^{-k} = F(z)$$

k ... je diskrétní čas (posloupnost reálných čísel $k >= 0$)

Zpětná

$$Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{r} F(z) z^{k-1} dz = f(k)$$

Příklad: Mechanický harmonický oscilátor



D ... konstanta pružiny
y ... poloha
B ... tlumení
m ... hmotnost
F_{vst} ... vstupní síla

$$F_D = Dy$$

$$F_B = Bv = B\frac{dy}{dt} = B\dot{y}$$

$$F_m = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y}$$

Rovnováha sil

$$F_m + F_B + F_D = F_{vst}$$

Příklad: Mechanický harmonický oscilátor

Předpokládejme, že v prvním kroku:

$$F_{vst} = 0$$

$$F_m + F_B + F_D = 0$$

potom:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Dy = m\ddot{y} + B\dot{y} + Dy = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\frac{B}{m} = 2b, \frac{D}{m} = \omega^2$$

Příklad: Mechanický harmonický oscilátor

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

$2b\ldots$ konstanta tlumení
$\omega\ldots$ vlastní frekvence

Počáteční podmínky:

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 3$$

Řešení pomocí L-transformace

$$p^2 Y(p) + 2bpY(p) - 3 + \omega^2 Y(p) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{3}{p^2 + 2bp + \omega^2}$$

Charakteristický polynom:

$$p^2 + 2bp + \omega^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$Y(p) = \frac{3}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

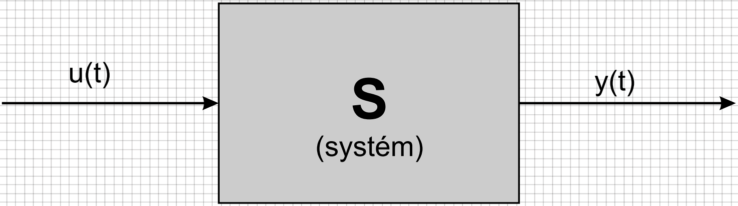
Rozklad na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{3}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$Y(p) = \frac{A}{(p-p_1)} + \frac{B}{(p-p_2)} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}^{-1}(Y(p)) = y(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

Definice systému



Obrázek: Model systém

u(t) . . . vstupní veličiny
y(t) . . . výstupní veličiny

Diferenciální rovnice LTI systému

LTI . . . lineátní stacionární (t-invariantní) systém

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{(m-1)} \frac{d^{(m-1)} u(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Přenos

Přenosem můžeme vyjádřit relaci mezi vstupem a výstupem pouze u systémů **spojitých, lineárních a stacionárních**.

Přenos je potom definován jako: Laplaceův obraz výstupní veličiny ku Laplaceově obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách.

$$G(p) = \frac{\mathscr{L}\{y(t)\}}{\mathscr{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Přenos

$$(a_n p^n + a_{(n-1)} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) Y(p) \\ = (b_m p^m + b_{(m-1)} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0) U(p)$$

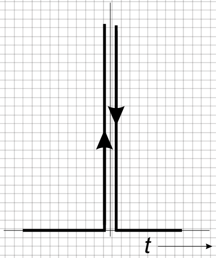
$$P = \frac{b_m p^m + b_{(m-1)} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{(n-1)} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$m < n$$

Typické vstupy

Diracův impulz: $\delta(t)$
nekonečně úzký, nekonečně vysoký, plocha 1

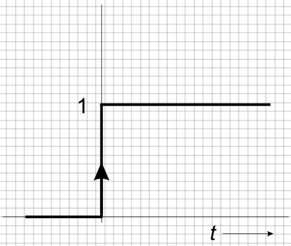
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$



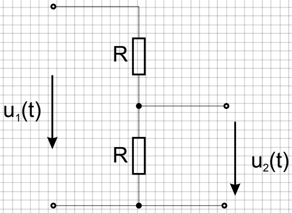
Typické vstupy

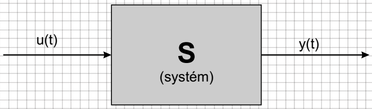
Jednotkový skok: $\mathbb{1}(t)$

$$\mathscr{L}\{\mathbb{1}(t)\} = \frac{1}{p}$$



Příklad: Systém 0. řádu





$$u_2(t) = \frac{R}{R+R} u_1(t) = \frac{1}{2} u_1(t)$$

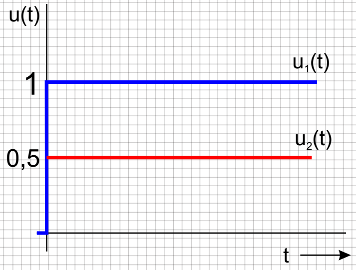
Přenos:

$$G(p) = \frac{\mathscr{L}\{u_2(t)\}}{\mathscr{L}\{u_1(t)\}} = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = 0,5$$

Příklad: Systém 0. řádu

Pro jednotkový skok:

$$Y(p) = G(p)U(p) = 0,5\frac{1}{p}$$



Základní pravidla L-transformace

Linearita

$$\mathscr{L}\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = a_1X(s) \pm a_2X_2(s)$$

Změna měřítka - podobnost

$$\mathscr{L}\{ax(at)\} = X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a > 0$$

Násobení exponenciální funkcí v časové oblasti

$$\mathscr{L}\{e^{\pm at}x(t)\} = X(s \mp a)$$

Základní pravidla L-transformace

Konvoluce v časové oblasti

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau\right\} = X_1(s)X_2(s) =$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} = X_2(s)X_1(s)$$

Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)

$$\mathscr{L}\left\{x(t-a)\right\} = e^{-as}X(s), a \geq 0$$

speciálně pro $a = mT$, $m \geq 0$

$$\mathscr{L}\left\{x(t-mT)\right\} = e^{-mTs}X(s)$$

Základní pravidla L-transformace

Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)

$$\mathscr{L}\left\{x(t+a)\right\} = e^{as}\left[X(s) - \int_0^a x(t)e^{-st}dt\right], a \geq 0$$

speciálně pro $a = mT$, $m \geq 0$

$$\mathscr{L}\left\{x(t+mT)\right\} = e^{mTs}\left[X(s) - \int_0^{mT} x(t)e^{-st}dt\right]$$

Základní pravidla L-transformace

Derivace 1. řádu

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

$x(0)$ je počáteční podmínka

Derivace n-tého řádu

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{i-1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1} x(0)}{dt^{i-1}}$$

$x(0)$ je počáteční podmínka

Základní pravidla L-transformace

Integrál

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

Derivace v oblasti komplexní proměnné (obrazovém prostoru)

$$\mathscr{L}\left\{tx(t)\right\} = -\frac{dX(s)}{ds}$$

Základní pravidla L-transformace

Operace podle nezávislého parametru

$$\mathscr{L}\{x(t,a)\} = X(s,a)$$

$$\mathscr{L}\left\{\lim_{a\to a_0} x(t,a)\right\} = \lim_{a\to a_0} X(s,a)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial x(t,a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial X(s,a)}{\partial a}$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} x(t,a)da\right\} = \int_{a_1}^{a_2} X(s,a)da$$

Základní pravidla L-transformace

Obraz periodické funkce

$$\mathscr{L}\{x(t)+x(t-a)+x(t-2a)+\dots\}=X(s)\frac{1}{1-e^{-as}}$$

a-perioda $a>0$

speciálně pro $a=mT$, $m>0$

$$\mathscr{L}\{x(t)+x(t-mT)+x(t-2mT)+\dots\}=X(s)\frac{1}{1-e^{-mTs}}$$

Základní pravidla L-transformace

Hodnota integrálu v časové oblasti

$$\int_0^\infty x(t)dt = \lim_{s \to 0} X(s)$$

$$\int_0^\infty tx(t)dt = -\lim_{s \to 0} \frac{dX(s)}{ds}$$

Základní pravidla L-transformace

Počáteční hodnota v časové oblasti

$$x(0) = \lim_{t \to 0_+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Koncová hodnota v časové oblasti (pokud existuje)

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Základní slovník L-transformace

Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$
$\dot{\delta}(t)$	s
$\delta(t)$	1
$\delta(t - mT)$	e^{mTs}
$\mathbb{1}(t)(\eta(t))$	$\frac{1}{s}$
$\mathbb{1}(t - mT)(\eta(t - mT)$	$\frac{1}{s}e^{-mTs}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{1}{6}t^3$	$\frac{1}{s^4}$
$b^{\mp at}$, $b > 0$	$\frac{1}{s \pm a \ln b}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s \pm a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$

Základní slovník L-transformace

Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$\frac{1}{3}t^3e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^4}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\frac{1}{a}\left[at-(1-e^{-at})\right]$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$ae^{-at}+be^{-bt}$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$
$1+\frac{be^{-at}+ae^{-bt}}{a-b}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$

Základní slovník L-transformace

Originál $x(t)$	Obraz $X(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Základní slovník L-transformace

****

Základní slovník L-transformace

****