Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Diplomová práce

Aplikovaná matematika - sbírka řešených příkladů

Autor diplomové práce: Eva Kutová

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2010

Jihočeská univerzita

Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Eva Kutová**
Studijní program:	M5704 Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky a výpočetní techniky
Název závěrečné práce:	**Aplikovaná matematika - sbírka řešených příkladů**

Garantující pracoviště	katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
Datum zadání závěrečné práce:	26. 11. 2008
Datum odevzdání závěrečné práce:	26.11.2010

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicých dne ______________ ____________________

podpis

Anotace

KUTOVÁ, EVA. Aplikovaná matematika - sbírka řešených příkladů České Budějovice: Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, 2010.

Práce obsahuje řešení příkladů aplikované matematiky. Zahrnuje příklady na geometrické aplikace teorie dvojných a trojných integrálů, tj. výpočet obsahů, objemů, hmotnosti a souřadnic těžiště. Každý příklad je podrobně vyřešen a doplněn o obrázek. Příklady jsou řazeny dle obtížnosti.

Klíčová slova: dvojný integrál, trojný integrál, obsah, objem, hmotnost, souřadnice těžiště, polární souřadnice, cylindrické souřadnice, sférické souřadnice.

Annotation

KUTOVÁ, Eva. Applied mathematics - a digest of solved problems. České Budějovice: Pedagogical faculty , 2010

This thesis contains solutions to chosen problems of applied mathematics. It comprises examples related to geometrical applications of the double and triple integrals theory, ie calculation methods of areas, volumes, mass and coordinates of gravity centres. Each problems solution is described in detail and supplemented with a picture. The problems are arranged according to complexity.

Keywords: double integral, triple integral, area, volume, mass, centre of gravity coordinates, polar coordinates, cylindrical coordinates, spherical coordinates.

Poděkování

Děkuji především vedoucí práce paní RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za cenné rady a připomínky při psaní této diplomové práce.

Obsah

Úvod **1**

1 Dvojný integrál - výpočet obsahu **3**

1.1 Výpočet obsahu bez užití transformace 3

1.2 Výpočet obsahu pomocí transformace do polárních souřadnic 16

1.3 Výpočet obsahu pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic 23

1.4 Výpočet obsahu pomocí substituce 26

2 Dvojný integrál - výpočet objemu **31**

2.1 Výpočet objemu bez užití transformace 31

2.2 Výpočet objemu pomocí transformace do polárních souřadnic 44

2.3 Výpočet objemu pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic 49

2.4 Výpočet objemu pomocí substituce 52

3 Dvojný integrál - výpočet hmotnosti **55**

3.1 Výpočet hmotnosti bez užití transformace 55

3.2 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do polárních souřadnic . . . 62

3.3 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic 65

4 Dvojný integrál - výpočet souřadnic těžiště **68**

4.1 Výpočet souřadnic těžiště bez užití transformace 68

4.2 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do polárních souřadnic 81

4.3 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic 87

5 Trojný integrál - výpočet objemu **92**

5.1 Výpočet objemu bez užití transformace 92

5.2 Výpočet objemu pomocí transformace do cylindrických souřadnic . . 101

5.3 Výpočet objemu pomocí transformace do sférických souřadnic 115

5.4 Výpočet objemu pomocí substituce 128

6 Trojný integrál - výpočet hmotnosti **131**

6.1 Výpočet hmotnosti bez užití transformace 131

6.2 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do cylindrických souřadnic . 133

6.3 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do sférických souřadnic . . . 139

7 Trojný integrál - výpočet souřadnic těžiště **143**

7.1 Výpočet souřadnic těžiště bez užití transformace 143

7.2 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do cylindrických souřadnic 151

7.3 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do sférických souřadnic 156

Literatura **163**

Seznam obrázků

1.1 $y = x$, $x = 1$, $y = 5x$ . . . 4

1.2 $xy = 4$, $y = \frac{4}{x}$ . . . 5

1.3 $xy = 4$, $y = 4$, $x^2 = 2y$, $x = 0$ . . . 6

1.4 $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $y = 8$, $y = 0$ . . . 7

1.5 $y \leq \arcsin x$, $y \geq \frac{x^2}{2}$, $y \leq \frac{\pi}{2}$ . . . 8

1.6 $y^2 = 2x + 1$, $y^2 = -4x + 4$ . . . 9

1.7 $y \leq -x^3$, $y \leq 2x^3$, $y \geq x^3 - 1$ . . . 10

1.8 elipsa s poloosami a, b . . . 11

1.9 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . . . 13

1.10 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ a $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq 1$ . . . 15

1.11 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . . . 17

1.12 Bernoulliho lemniskáta . . . 19

1.13 $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$, $x^2 + y^2 \geq 1$ . . . 21

1.14 Elipsa s poloosami a, b . . . 24

1.15 $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ . . . 27

1.16 $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 2$ . . . 28

1.17 $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ . . . 29

1.18 $u = 2$, $u = 4$, $v = 2$, $v = 4$ . . . 30

2.1 $y = x$, $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$ . . . 32

2.2 $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 12 + y - x^2$ . . . 33

2.3 $y = x^2$, $x = y^2$ . . . 34

2.4 $y = x^2$, $x + y + z = 4$, $y = 1$, $z = 0$ . . . 35

2.5 $y = x^2$, $y = 1$ . . . 35

2.6 $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$, $0 \leq z \leq 9$ 37
2.7 $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$ 37
2.8 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$, $z = x^2 + y^2 + 1$ 39
2.9 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$, $z = \frac{y^2}{2}$ 40
2.10 $z = \frac{xy}{2}$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ 41
2.11 $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ 42
2.12 $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, osa prvního kvadrantu $y = x$ 43
2.13 $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = z$ 45
2.14 $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ 45
2.15 $e^{-x^2-y^2} = z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ 47
2.16 $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, $x + y = 1$ 50
2.17 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi\frac{\pi}{2}$ 51
2.18 $v = 1$,$v = u$, $v = -u$ 53

3.1 $y = \sin 2x$, pro $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 56
3.2 $y \leq e^{2x}$, $y \geq e^x$, $y \leq e^\pi$ 58
3.3 Obdélník se stranami a, b 59
3.4 Trojúhelník omezený přímkou $x + y = 1$ a osami souřadnicovými . . . 60
3.5 Mezikruží o poloměrech $0 \leq a \leq b$ 63
3.6 Elipsa se středem v počátku 66

4.1 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $y = 0$, $x = 0$ 70
4.2 Zobrazení těžiště 71
4.3 $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ 71
4.4 Zobrazení těžiště 72
4.5 $y = 2x - x^2$,$y = -x$ 73
4.6 Zobrazení těžiště 74
4.7 $0 \leq x \leq y \leq 3, y \leq \frac{1}{x}$ 74
4.8 Zobrazení těžiště 76
4.9 $x = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ 76
4.10 Zobrazení těžiště 78
4.11 $x^2 + y^2 = 1$, $y = x + 1$, $y = 0$ 78

4.12 Zobrazení těžiště . . . 80
4.13 $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ . . . 82
4.14 Zobrazení těžiště . . . 83
4.15 $x^2 + y^2 = 1$,$x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ . . . 84
4.16 Zobrazení těžiště . . . 86
4.17 $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 4$ . . . 88
4.18 Zobrazení těžiště . . . 89
4.19 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $y = 0$, $x = 0$ . . . 90
4.20 Zobrazení těžiště . . . 91

5.1 $0 \leq z \leq 9$, $y \geq x^2$ a $x^2 \leq 4 - 3y$ . . . 93
5.2 $y \geq x^2$ a $x^2 \leq 4 - 3y$ . . . 93
5.3 $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y + z \leq 6$, $z \geq 0$ . . . 94
5.4 $x^2 + y^2 = 1$ . . . 95
5.5 $x^2 + y^2 = 1$ . . . 95
5.6 $z \leq 1$, $z \geq \sqrt[3]{x^2}$, $0 \leq y \leq 1$ . . . 96
5.7 $z = 1$, $z = \sqrt[3]{x^2}$, $0 \leq y \leq 1$ . . . 97
5.8 $z \geq x^2 + y^2$, $z \leq x^2 + 2y^2$, $y \geq x$, $y \geq 2x$, $y \leq 1$ . . . 97
5.9 $y = x$, $y = 2x$, $y = 1$ . . . 98
5.10 $z = y^2$, $z = 2y^2$, $y = 0$, $y = 1$ . . . 98
5.11 $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x^2$ a $y = x$ . . . 99
5.12 $y = x^2$ a $y = x$ . . . 100
5.13 $z = y^2$, $z = 2y^2$ . . . 100
5.14 $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$ . . . 103
5.15 $z = y^2$, $z^2 = y^2$ . . . 104
5.16 $z \leq y^2 + 1$, $z \geq -x^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq -x$, $x \geq 0$ . . . 105
5.17 $x^2 + y^2 = 1$, $y = -x$, $x = 0$ . . . 106
5.18 $z = 1$, $z = -x^2$, $x = 1$, $x = 0$ . . . 106
5.19 $z = y^2 + 1$, $z = 0$, $y = 1$ . . . 107
5.20 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ . . . 108
5.21 $y^2 + z^2 \leq 4$, $y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ . . . 109
5.22 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ . . . 110

5.23 $y^2 + (w+1)^2 \leq 4$, $y^2 + (w-1)^2 \leq 4$ 111
5.24 $z = (x-1)^2 + y^2$ a $z = 2(1-x)$ 112
5.25 $z = (x-1)^2$ a $z = 2(1-x)$ 113
5.26 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ 116
5.27 $y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$, $y^2 = z^2$ 117
5.28 $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (x^2 + y^2)^2$ 118
5.29 $(x^2 + z^2)^3 = x^4$ 119
5.30 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2$ 120
5.31 $(x^2 + z^2)^2 = x^2 - z^2$ 121
5.32 $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = z\left(x^2 + y^2\right)$ 123
5.33 $\left(x^2 + z^2\right)^2 = x^2 - z^2$ 125
5.34 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 126
5.35 $z = x^2 + y^2$, $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$, $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$ 129
5.36 $w = \frac{u+uv^2}{v}$, $z = 2\frac{u+uv^2}{v}$, $u = 1$, $u = 2$, $v = \frac{1}{2}$, $v = 2$ 130

6.1 $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 132
6.2 Válec s poloměrem podstavy R a výškou h 134
6.3 Válec s poloměrem podstavy R a výškou h 135
6.4 $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 0$ 137
6.5 Koule s poloměrem R 140
6.6 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 141

7.1 $z \geq 0$, $y \geq 4x^2$, $z \leq \frac{4-y}{2}$ 145
7.2 Těžiště tělesa 146
7.3 $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq y^2 - x^2$ 147
7.4 Těžiště tělesa 148
7.5 $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$ 148
7.6 $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x = 6$ 149
7.7 Těžiště tělesa 150
7.8 $z \leq 4$, $z \geq 4\left(x^2 + y^2\right)$ 152
7.9 Těžiště tělesa 153
7.10 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$ 154

7.11 Těžiště tělesa 155

7.12 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 157

7.13 Těžiště tělesa 159

7.14 Koule s poloměrem 1j a středem S=[0,0,1] 160

7.15 Těžiště tělesa 162

Úvod

Cílem mé diplomové práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na aplikaci dvojných a trojných integrálů. Práce je určena studentům učitelství matematiky, kteří jsou již seznámeni s problematikou dvojného a trojného integrálu a rozšiřují si tyto znalosti o jejich aplikace. Těžištěm diplomové práce je vybrání vhodných zadání příkladů z různých zdrojů, vyřešení a srozumitelné vysvětlení řešení. Zejména byly použity zdroje [1], [2] a [4].

Práce je obsahově rozdělena na sedm kapitol, z obecnějšího pohledu se ale zabývá dvěma základními oblastmi, a sice problematikami aplikace dvojných integrálů na jedné straně, a aplikacemi trojných integrálů na straně druhé. První oblast je z hlediska návodů i vysvětlení řešení příkladů zpracována podrobněji. Obsahuje kapitoly zabývající se výpočtem objemů těles, obsahů, hmotností a souřadnic těžišť rovinných ploch. Druhá oblast je rozdělena na kapitoly zaměřené na výpočet objemů, hmotností a souřadnic těžišť těles. Ostatní aplikace, jako jsou např. moment setrvačnosti, potenciál tíhového pole atd., jsem do sbírky nezahrnula, neboť se domnívám, že pro studenty nefyzikální oborů jsou tyto pojmy méně známé. Každá kapitola je dále rozčleněna na podkapitoly podle způsobu užití transformací souřadnic.

Ve sbírce jsou užité teoretické návody, které obsahují pouze teorii potřebnou k výpočtu příkladů. Při sestavování návodů jsem vycházela z literatury [1], [10].

Příklady jsou řazeny podle obtížnosti. U některých příkladů je uvedeno více různých způsobů řešení, čímž chci docílit většího pochopení a širšího náhledu na tuto problematiku. Každý příklad je podrobně vysvětlen a doplněn obrázky. Na obrázky se často odkazuji, aby došlo u studenta k reálnějšímu pohledu na řešení a jeho pochopení, nikoli pouze ke slepému dodržování postupu při výpočtu.

U cílových výpočtů integrálů jsou popsány podrobné postupy. Objevují se tam ale i příklady, u kterých jsem podrobnou integraci přeskočila; jedná se o integraci funkcí$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ a $g(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$. Proto jsem u prvního výskytu tohoto integrálu uvedla na konci příkladu poznámku, obsahující přesný výpočet neurčitého integrálu daného typu; dále je pak vždy uváděn odkaz na tuto poznámku. V příkladech zaměřených na výpočet hmotnosti jsem zařadila i příklady, u nichž musíme nejdříve určit funkční předpis hustoty. Většinu příkladu jsem čerpala z literatury [2] a [4].

Práce je vysázená systémem Latex, konkrétně v online programu TexOnWeb. Obrázky jsou vytvořeny v programech OpenOffice3.1 Draw (v příkladech 3.3, 3.4, 3.5, 3.6), GeoGebra3D Beta (příklad 6.1) a Maple 9.5 (ostatní). Obrázky zobrazující těžiště jsou upravovány v programu Gimp2.

Kapitola 1

Dvojný integrál - výpočet obsahu

1.1 Výpočet obsahu bez užití transformace

***Návod* 1.1** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Obsah plochy Ω je dán vzorcem*

$$S = \iint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\textit{např. } \Omega = \{[x,y]; x \in \langle a,b \rangle, y \in \langle g(x), h(x) \rangle\},$$

potom

$$S = \iint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} 1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Analogicky, dá-li se množina Ω napsat jako

$$\Omega = \{[x,y]; x \in \langle g(y), h(y) \rangle, y \in \langle c,d \rangle\},$$

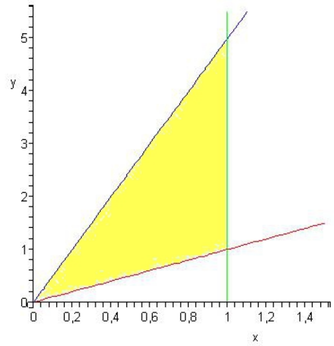
potom

$$S = \iint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} 1 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 1.1 ([2]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $x = 1$ a $y = 5x$.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu je omezena přímkami $y = x$, $x = 1$ a $y = 5x$, viz obrázek 1.1 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.1: $y = x$, $x = 1$, $y = 5x$

Meze x-ové souřadnice určuje průsečík osy prvního kvadrantu (přímka $y = x$) a přímky $y = 5x$, x-ová souřadnice tohoto průsečíku je $x = 0$, a přímka $x = 1$. Dolní mez y-ové souřadnice určuje osa kvadrantu a horní mez přímka $y = 5x$.
Výpočet obsahu obrazce:

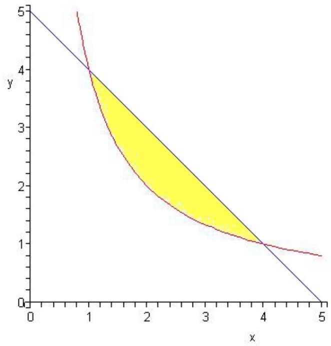
$$S = \int_0^1 \left(\int_x^{5x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 [y]_x^{5x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (5x - x)\mathrm{d}x = \left[\frac{4x^2}{2} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2$$

Obsah obrazce je $S = 2\mathrm{j}^2$.

Příklad 1.2 ([2]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $xy = 4$ a $y = \frac{4}{x}$.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu je část hyperboly $y = \frac{4}{x}$ protnutá přímkou $x+y-5 = 0$, viz obr.1.2 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.2: $xy = 4$, $y = \frac{4}{x}$

Pro určení mezí x-ové souřadnice musíme nalézt průsečíky ramene hyperboly a přímky. Řešíme rovnici $\frac{4}{x} = 5 - x$ a odtud dostáváme $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$. Dolní mezí y-ové souřadnice je hyperbola $y = \frac{4}{x}$, horní mezí je přímka $y = 5 - x$.
Výpočet obsahu dané oblasti:

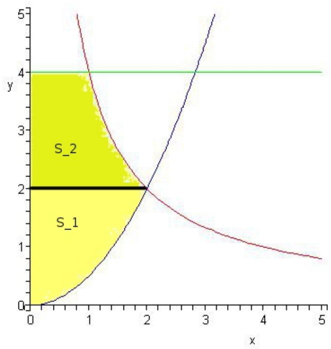
$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left(\int_{\frac{4}{x}}^{5-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^4 [y]_{\frac{4}{x}}^{5-x} \mathrm{d}x = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\right]_1^4 \mathrm{d}x = \\ &= 20 - 8 - \ln 16 - 5 + \frac{1}{2} + 4\ln 1 = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \end{aligned}$$

Obsah obrazce je $S = \left(\frac{15}{2} - 8\ln 2\right)\mathrm{j}^2$.

Příklad 1.3 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $xy = 4$, $y = 4$, $x^2 = 2y$ a $x = 0$.

Řešení

Rovinný obrazec je omezen částí hyperboly $y = \frac{4}{x}$, částí paraboly $y = \frac{x^2}{2}$, osou y a přímkou $y = 4$, viz obrázek 1.3 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.3: $xy = 4$, $y = 4$, $x^2 = 2y$, $x = 0$

Výpočet obsahu plochy musíme rozdělit na dvě části. K tomu, abychom si tyto části určili, potřebujeme určit průsečíky daných funkcí. Průsečíkem funkcí $y = 4$ a $xy = 4$ je $x = 1$ a průsečíkem funkcí $xy = 4$ a $x^2 = 2y$ je $x = 2$. Jedna část obrazce je tedy určena intervaly $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $y \in \left\langle 4, \frac{x^2}{2} \right\rangle$, druhá část obrazce je určena intervaly $x \in \langle 1; 2 \rangle$ a $y \in \left\langle 4, \frac{x^2}{2} \right\rangle$.
Výpočet obsahu první části obrazce:

$$S_1 = \int_1^0 \left(\int_4^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^0 [y]_4^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_1^0 \left(4 - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 4 - \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

Výpočet obsahu druhé části obrazce:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 [y]_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 = \\ &= 4 \ln 2 - \frac{8}{6} - 4 \ln 1 + \frac{1}{6} = \left(4 \ln 2 - \frac{7}{6} \right) \end{aligned}$$

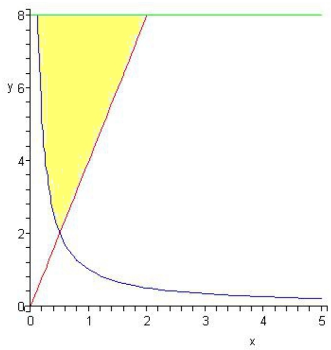
Obsah rovinného obrazce je součet obou obsahů S_1 a S_2,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{23}{6} + 4 \ln 2 - \frac{7}{6} = 4 \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right) j^2$$

Příklad 1.4 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $y = 8$ a $y = 0$.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu obrazce je omezena přímkami $y = 8$ a $y = 4x$, dále pak částí hyperboly $y = \frac{1}{x}$, viz obrázek 1.4.



Obrázek 1.4: $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $y = 8$, $y = 0$

Pokud bychom ponechali obvyklé pořadí integrace, tedy konstantní meze by určovala proměnná x, oblast bychom rozdělili na dvě části a každou část museli spočítat zvlášĹĽ. Proto je u tohoto typu příkladu výhodnější přehodit pořadí integrace. Krajní meze y-ové souřadnice oblasti získáme jako y-ové souřadnice průsečíku hyperboly $y = 4x$ a přímky $y = 8$. Řešíme rovnici $4x = 8$, odtud $y = 2$. Pro proměnnou y jsme získali interval $\langle 2; 8\rangle$. Pak proměnná x je v mezích $x = \frac{1}{y}$ a $x = \frac{y}{4}$.
Výpočet obsahu obrazce:

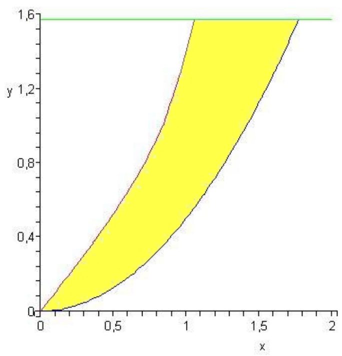
$$\begin{aligned} S &= \int\limits_2^8 \left(\int\limits_{\frac{1}{y}}^{\frac{y}{4}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_2^8 [y]_{\frac{1}{y}}^{\frac{y}{4}} \mathrm{d}y = \int\limits_2^8 \left(\frac{y}{4} - \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{8} - \ln y \right]_2^8 = \\ &= 8 - 3\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 2 = \frac{15}{2} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

Obsah rovinného obrazce je $S = \frac{15}{2} - 2\ln 2 \mathrm{j}^2$.

Příklad 1.5 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y \leq \arcsin x$, $y \geq \frac{x^2}{2}$ a $y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení

Obrazec je omezený částí paraboly $y = \frac{x^2}{2}$, funkcí $y = \arcsin x$ a přímkou $y \leq \frac{\pi}{2}$, viz obrázek 1.5.



Obrázek 1.5: $y \leq \arcsin x$, $y \geq \frac{x^2}{2}$, $y \leq \frac{\pi}{2}$

V tomto případě je vhodné přehodit integraci proměnných. Pokud bychom nechali za konstantní meze meze proměnné x, počítali bychom obsah dvou částí obrazce. Z obrázku (1.5) je patrné, že $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Meze pro proměnnou x určíme z nerovnic:

$$y \leq \arcsin x, \qquad y \geq \frac{x^2}{2}$$

$$\sin y \leq x, \qquad \sqrt{2y} \geq x \qquad \text{(za předpokladu } x \geq 0 \text{ a } y \geq 0\text{)}$$

odtud získáváme

$$\sin y \leq x \leq \sqrt{2y}$$

Výpočet obsahu obrazce:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin y}^{\sqrt{2y}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x]_{\sin y}^{\sqrt{2y}} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2y} - \sin y \right) \mathrm{d}y = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}} + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

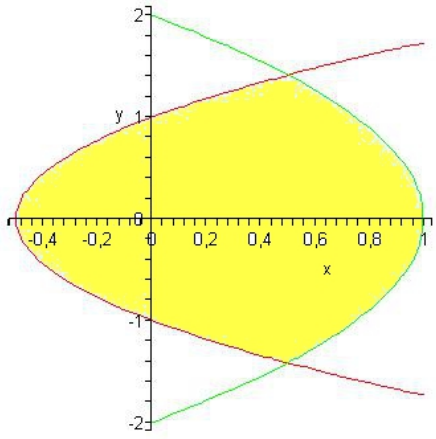
$$= \frac{\pi\sqrt{\pi} - 3}{3}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{\pi\sqrt{\pi}-3}{3}\mathrm{j}^2$.

Příklad 1.6 ([1]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y^2 = 2x + 1$ a $y^2 = -4x + 4$.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu je průnikem dvou parabol, viz obrázek 1.6.



Obrázek 1.6: $y^2 = 2x + 1$, $y^2 = -4x + 4$

Pokud zanecháme konstantní meze proměnné x, musíme výpočet obsahu rozdělit na dvě části. Proto je výhodnější zvolit za konstantní meze meze proměnné y. Navíc je obrazec symetrický dle osy x, takže můžeme počítat obsah pouze pšlky obrazce a ten pak zdvojnásobit.

Dolní mez proměnné y určuje osa x, tedy $y = 0$. Horní mezí je y-ová souřadnice průsečíku obou parabol v prvním kvadrantu. Řešíme rovnici $\frac{y^2-1}{2} = \frac{4-y^2}{4}$, odtud $y = \sqrt{2}$.

Výpočet obsahu:

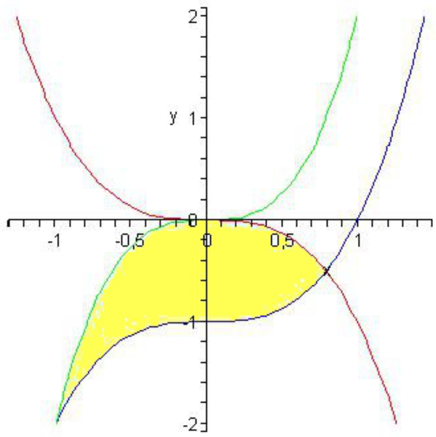
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot S &= \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\int\limits_{\frac{y^2-1}{2}}^{\frac{4-y^2}{4}} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\sqrt{2}} [x]_{\frac{y^2-1}{2}}^{\frac{4-y^2}{4}}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (\frac{6-3y^2}{4})\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[6y - \frac{3y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{4}\left(6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Obsah obrazce omezeného parabolami je $S = 2\sqrt{2}\mathrm{j}^2$.

Příklad 1.7 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y \leq -x^3$, $y \leq 2x^3$ a $y \geq x^3 - 1$.

Řešení

Rovinný obrazec je omezen zdola křivkou $y = x^3 - 1$ a shora křivkami $y = -x^3$ a $y = 2x^3$, viz obrázek 1.7 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.7: $y \leq -x^3$, $y \leq 2x^3$, $y \geq x^3 - 1$

Výpočet obsahu tohoto obrazce musíme rozdělit na dvě části. První část oblasti obrazce je od průsečíku křivky $y = x^3 - 1$ s křivkou $y = 2x^3$, druhá oblast probíhá od osy y po průsečík křivek $y = x^3 - 1$ a $y = 2x^3$. Řešíme rovnice

$$\begin{aligned} 2x^3 &= x^3 - 1 \\ -x^3 &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

Z rovnic dostaneme x-ové souřadnice průsečíky,tj. $x_1 = -1$ a $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Výpočet obsahu první části obrazce:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{x^3-1}^{2x^3} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} [y]_{x^3-1}^{2x^3} \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} (2x^3 - x^3 + 1) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^{0} = \\ &= \frac{-1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Výpočet obsahu druhé části obrazce:

$$S_2 \;=\; \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \left(\int\limits_{x^3-1}^{-x^3} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} [y]_{x^3-1}^{-x^3} \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} (-x^3 - x^3 + 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^4}{4} + x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} =$$
$$= \frac{-1}{4\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{2}}$$

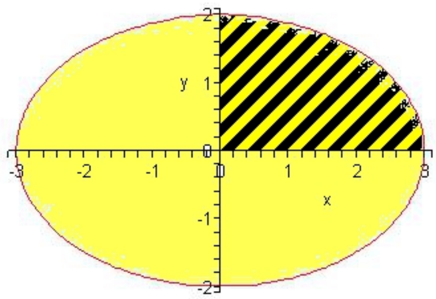
Obsah rovinného obrazce je součet obou obsahů S_1 a S_2,

$$S \;=\; S_1 + S_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) j^2.$$

Příklad 1.8 ([2]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného elipsou s poloosami a, b.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu je ohraničena elipsou s rovnicí $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, viz obrázek 1.8 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.8: elipsa s poloosami a, b

Pro výpočet obsahu obrazce stačí, budeme-li integrovat pouze přes část, která leží v prvním kvadrantu. Obsah této části poté vynásobíme čtyřikrát.

Za konstantní meze vezmeme meze proměnné x, kterým je interval $\langle 0; 1 \rangle$. Meze proměnné y jsou dány osou x a rovnicí elipsy, tedy interval $\left\langle 0; b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\rangle$.

Čtvrtinový obsah obrazce vypočítáme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\cdot S &= \int\limits_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^a [y]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}x = b\int\limits_0^a \sqrt{\frac{1}{a^2}(a^2-x^2)}\mathrm{d}x = \\
&= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{b}{a}(a^2\frac{\pi}{4}) = \frac{ab\pi}{4}
\end{aligned}$$

Obsah obrazce ohraničeného elipsou je $S = 4\frac{ab\pi}{4} = ab\pi\mathrm{j}^2$.

Poznámka: Řešení integrálu v tomto příkladu je pracné a výhodnější je použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic, viz příklad (1.14).

Poznámka: V příkladě řešíme integraci funkce $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$. Postup řešení neurčitého integrálu tohoto typu:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x =$$

Použijeme metodu per partes:

$$u = \sqrt{a^2-x^2} \qquad v` = 1$$

$$u` = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad v = x$$

$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x + a^2\arcsin\frac{x}{a}
\end{aligned}$$

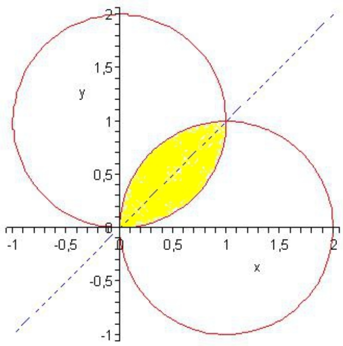
nyní integrál z pravé strany přičteme k integrálu z levé strany:

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} \\
\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}
\end{aligned}$$

Příklad 1.9 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $(x-1)^2+y^2=1$ a $x^2+(y-1)^2=1$.

Řešení

Hledaným obsahem je průnik dvou kružnic, přičemž jedna má střed v bodě [0;1] a druhá v bodě [1;0], obě kružnice mají stejný poloměr, viz obrázek 1.9.



Obrázek 1.9: $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$

Nejdříve si určíme konstantní meze proměnné x, což jsou x-ové souřadnice průsečíky daných kružnic. Řešíme rovnici $\sqrt{1-(1-x^2)} = 1+\sqrt{1-x^2}$. Po výpočtu dostaneme $x=0$ a $x=1$. Vzhledem k tomu, že obě kružnice mají stejný poloměr, je průnik symetrický vzhledem k přímce $y=x$. Získáváme tedy integrační oblast $\langle 0;1\rangle \text{x} \left\langle x; \sqrt{1-(1-x^2)}\right\rangle$.

Výpočet poloviny obsahu obrazce:

$$\frac{1}{2}\cdot S = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [y]_x^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1-(x-1)^2} - x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci:

$x-1=t$

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$x = 0 \to t = -1$$

$$x = 1 \to t = 0$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Obsah rovinného obrazce je $S = 2 \cdot (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\mathrm{j}^2$.

Poznámka: Tento příklad můžeme řešit pomocí transformace do polárních souřadnic. Viz příklad (1.11).

Poznámka: V příkladě řešíme integraci funkce $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Postup řešení neurčitého integrálu tohoto typu je vyřešen v poznámce na straně 11.

Příklad 1.10 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného nerovnicemi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ a $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq 1$.

Řešení

Oblast pro výpočet obsahu je část paraboly $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ vyťatá přímkou $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, viz. obr.1.10 (vyšrafovaná část).

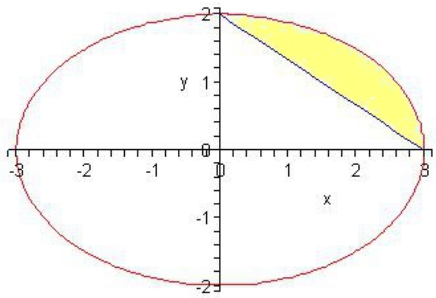
Za konstantní meze zvolíme meze proměnné x, což jsou x-ové souřadnice průsečíky přímky $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ s osami x, y, tj. $0 \leq x \leq 3$. Proměnné meze vyjádříme z rovnice přímky a elipsy, tedy $\frac{6-2x}{3} \leq y \leq \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}$.

Výpočet obsahu rovinné plochy:

$$S = \int_0^3 \left(\int_{\frac{6-2x}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^3 [y]_{\frac{6-2x}{3}}^{\frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(\sqrt{9-x^2} - 3 + x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{9\pi}{4} - 9 + \frac{9}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 3$$

Obsah obrazce je $\frac{3\pi}{2} - 3\mathrm{j}^2$.



Obrázek 1.10: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ a $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq 1$

Poznámka: Postup řešení tohoto příkladu nás vede na integraci funkce typu $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Příklad lze řešit i jinými způsoby. Jedním z nich je tranformace na zobecněné polární souřadnice, viz příklad 1.15. Nebo substitucí proměnných na nové proměnné $u = 3x$ a $v = 2y$, tím se zbavíme nepříjemných úprav zlomky, ale dostaneme se opět k integraci výše zmíněné funkce.

Poznámka: V příkladě řešíme integraci funkce $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Postup řešení neurčitého integrálu tohoto typu je ukázán v poznámce na straně 11.

1.2 Výpočet obsahu pomocí transformace do polárních souřadnic

***Návod* 1.2** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \\ \textit{kde} \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle \,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$.
Jakobišv determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Pak obsah plochy Ω je dán vzorcem

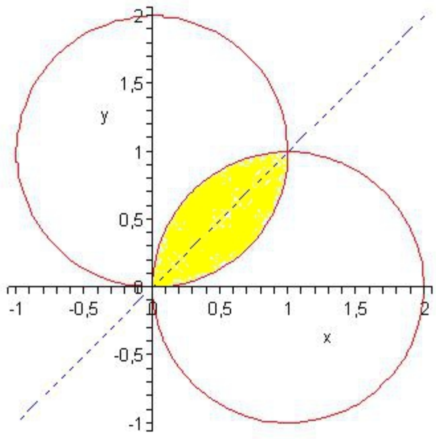
$$S = \iint\limits_{\Psi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka: *Transformaci do polárních souřadnic je vhodné zavést většinou tehdy, když Ω je kruh, mezikruží nebo kruhová výseč se středem v počátku. Pak Ψ bude obdélník a nový integrál bude mít konstantní meze.*

Příklad 1.11 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $(x-1)^2+y^2=1$ a $x^2+(y-1)^2=1$.

Řešení

Hledaným obsahem je obsah průniku dvou kružnic, přičemž jedna má střed v bodě [0;1] a druhá v bodě [1;0], obě kružnice mají stejný poloměr, viz obrázek 1.11.



Obrázek 1.11: $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$

Oblast hledaného obsahu je symetrická dle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky $y=x$), proto stačí vypočítat pouze polovinu obsahu. Použijeme transformace do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Jakobián této transformace je $J=r$.

Dosazením transformovaných souřadnic do nerovnice určující integrační oblast získáváme:

$$0 \le r \le x^2+(y-1)^2 = 1$$
$$0 \le r \le r^2 - 2r\sin\varphi$$
$$0 \le r \le 2\sin\varphi$$

Pohybujeme se pouze v prvním kvadrantu a z podmínky $0 \le r \le 2\sin\varphi$ plyne

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

Výpočet poloviny obsahu obrazce:

$$\frac{1}{2}\cdot S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\sin\varphi} r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\sin\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi =$$

Použijeme substituci:

$$2\varphi = t$$
$$d\varphi = \frac{1}{2}dt$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\varphi = 0 \to t = 0$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \to t = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos t}{2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t - \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Obsah rovinného obrazce je $S = 2\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 1) = (\frac{\pi}{2} - 1)j^2$.

Poznámka: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladě 1.9.

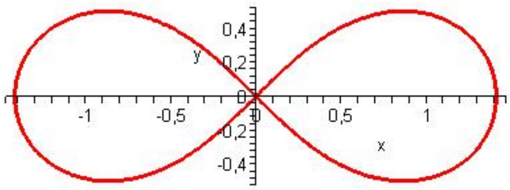
Příklad 1.12 ([3]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkou $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$.

Řešení

Máme vypočítat obsah Bernoulliho lemniskáty, která je zadaná rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = 2\ (x^2 - y^2)$, viz obr.1.12.

Lemniskáta je symetrická dle soustavy souřadné, takže pro zjištění obsahu nám stačí spočítat obsah plochy v prvním kvadrantu a ten pak zčtyřnásobit. Pro tento příklad je vhodné zavést transformaci do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{a jakobián transformace je } J = r.$$



Obrázek 1.12: Bernoulliho lemniskáta

Pohybujeme-li se v prvním kvadrantu, pak dolní mez pro proměnnou r je $r = 0$. Horní mez zjistíme z nerovnice

$$\begin{aligned}
\left(x^2+y^2\right)^2 &\leq 2\left(x^2-y^2\right) \\
&\ \text{po dosazení nových proměnných získáme} \\
r^4 &\leq 2r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) \\
r^2 &\leq 2\cos 2\varphi \\
r &\leq \sqrt{2\cos 2\varphi} \\
&\ \text{odtud můžeme určit meze pro proměnnou } \varphi \\
0 &\leq \sqrt{2\cos 2\varphi} \\
&\ \text{a pro první kvadrant tedy platí} \\
0 &\leq \cos 2\varphi \\
&\ 2\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\
&\ \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Výpočet čtvrtiny obsahu lemniskáty:

$$\frac{1}{4}\cdot S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

Použijeme substituci:

$$2\varphi = t$$
$$d\varphi = \frac{1}{2}dt$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\varphi = 0 \rightarrow t = 0$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Obsah Bernoulliho lemniskáty zadané rovnicí $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2\left(x^2-y^2\right)$ je $S = 4\cdot\frac{1}{2} = 2\mathrm{j}^2$.

Příklad 1.13 ([3]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2\left(x^2-y^2\right)$ a $x^2+y^2 \geq 1$.

Řešení

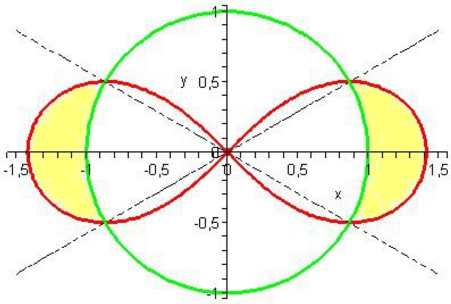
V předchozím příkladě počítáme obsah Bernoulliho lemniskáty, která je zadaná rovnicí $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2\left(x^2-y^2\right)$. Nyní oblast pro výpočet obsahu máme omezenou kružnicí s poloměrem 1j a středem v počátku souřadnicového systému, viz obr. 1.13.

Tento příklad opět budeme řešit pomocí transformace do polárních souřadnic, takže si zavedeme transformaci

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \text{kde jakobián transformace je } J = r.$$

Pak pro proměnnou r platí:

$$r^4 \leq 2r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$



Obrázek 1.13: $(x^2+y^2)^2 = 2\,(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \geq 1$

$$\begin{aligned} r^2 &\leq 2\cos 2\varphi \\ r &\leq \sqrt{2\cos 2\varphi} \\ &\text{a zároveĹ z nerovnice} \\ x^2+y^2 &\geq 1 \\ r^2 &\geq 1 \\ r &\geq 1 \\ &\text{z toho vyplývá} \\ 1 &\leq r \leq \sqrt{2\cos 2\varphi} \end{aligned}$$

Tak jako v předchozím příkladě, budeme i zde pro zjednodušení budeme počítat pouze tu část obrazce, která leží v prvním kvadrantu. Pro meze proměnné φ platí

$$\begin{aligned} \sqrt{2\cos 2\varphi} &\geq 1 \\ \cos 2\varphi &\geq \frac{1}{2} \\ &2\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle \\ &\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \end{aligned}$$

Výpočet čtvrtiny obsahu obrazce:

$$\frac{1}{4}\cdot S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int\limits_1^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

Použijeme substituci:

$$2\varphi = t$$
$$d\varphi = \frac{1}{2}dt$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\varphi = 0 \rightarrow t = 0$$
$$\varphi = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t \mathrm{d}t - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

Obsah obrazce je $S = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\mathrm{j}^2$.

1.3 Výpočet obsahu pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

***Návod* 1.3** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Zobecněné polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi \\ y &= br\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{(}a,\ b \text{ jsou konstanty),}$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle . \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r,\varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y) \in \Omega$.
Jakobišv determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Pak obsah plochy Ω je dán vzorcem

$$S = \iint\limits_{\Psi} abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 1.14 ([2]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného elipsou s poloosami a, b.

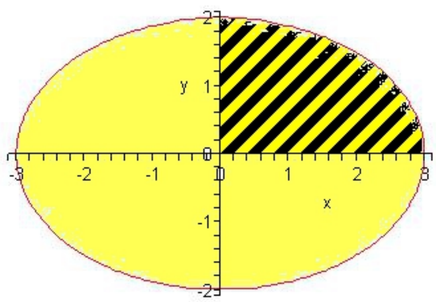
Řešení

Protože v tomto případě je obrazce ohraničen elipsou (obrázek 1.14), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

Jakobián této transformace je

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$



Obrázek 1.14: Elipsa s poloosami a, b

V transformovaném zobrazení má elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rovnici $r = 1$. Pro výpočet obsahu obrazce stačí, budeme-li integrovat pouze přes část, která leží v prvním kvadrantu. Obsah této části poté vynásobíme čtyřikrát. Dosazením substituce do nerovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ a za podmínky $x \geq 0$ a $y \geq 0$ dostáváme

$$0 \leq r \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Výpočet čtvrtinového obsahu obrazce omezeného elipsou

$$\frac{1}{4}\cdot S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 abr\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi = \frac{ab}{2}[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}$$

Obsah obrazce ohraničeného elipsou je $S = 4\cdot\frac{ab\pi}{4} = ab\pi\mathrm{j}^2$.

Poznámka: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladě 1.8.

Příklad 1.15 ([4]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného nerovnicemi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1$ a $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\geq 1$.

Řešení Oblast pro výpočet obsahu je část paraboly $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ vyťatá přímkou $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$, viz. obr.1.10 (vyšrafovaná část).

Tento příklad můžeme řešit pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic. Toto řešení zpočátku vypadá snadno, protože díky transformaci proměnných na $x = 3r\cos\varphi$ a $y = 2r\cos\varphi$ po dosazení do nerovnice $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1$ vyjde $r\leq 1$. Ovšem po dosazení do nerovnice $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\geq 1$ dostáváme $r\geq\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$, což nás dožene opět k nesnadnému řešení integrálu.

Jakobián této transformace je

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3r\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r.$$

Situaci na obrázku 1.10 můžeme popsat i tak, že obsah obrazce je rozdíl obsahu čtvrtky elipsy a trojúhelníku, jehož odvěsny leží na souřadnicových osách. Délky odvěsen známe a obsah trojúhelníku je tedy $3\mathrm{j}^2$.

Obsah části elipsy vypočítáme pomocí dvojného integrálu:

$$S = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = 3\,[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$$

Obsah obrazce je $S = (\frac{3\pi}{2}-3)\mathrm{j}^2$.

Poznámka: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladě 1.10.

1.4 Výpočet obsahu pomocí substituce

***Návod* 1.4** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Zobecněná transformace je dána předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= g(u,v) \\ y &= h(u,v), \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(u,v) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y) \in \Omega$. Přičemž funkce g a h a jejich parciální derivace jsou v Ψ spojité.
Jakobišv determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak obsah plochy Ω je dán vzorcem

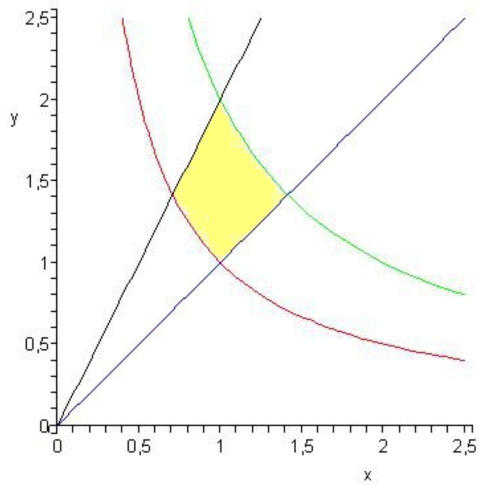
$$S = \iint\limits_{\Psi} |J| \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota Jakobiova determinantu.

Příklad 1.16 ([1]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$ a zároveĽ $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Řešení

Obrazec je omezen hyperbolami $y = \frac{1}{x}$ a $y = \frac{2}{x}$ a přímkami $y = x$ a $y = 2x$, viz obr. 1.15 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.15: $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

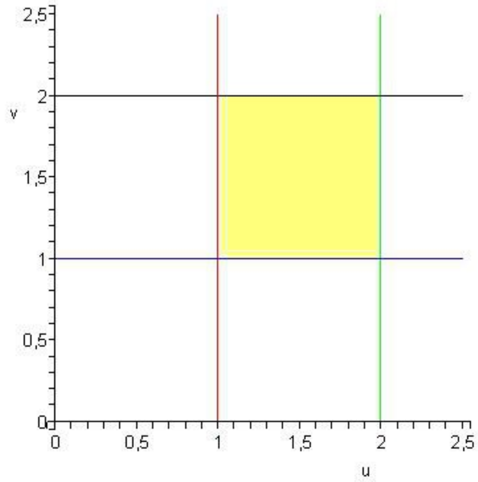
Pro výpočet obsahu daného obrazce je třeba integrační oblast rozdělit na dvě části. Příklad tak vede na výpočet dvou dvojných integrálů. Příklad si můžeme zjednodušit volbou vhodné transformace. Zavedeme nové proměnné pomocí soustavy

$$\begin{aligned} xy &= u \\ \frac{y}{x} &= v \end{aligned}$$

Hyperboly $xy = 1$ a $xy = 2$ ze systému souřadného $0xy$ se zobrazí na přímky $u = 1$ a $u = 2$ v systému souřadném $0uv$. Přímky $y = x$ a $y = 2x$ se zobrazí na přímky $v = 1$ a $v = 2$. Plocha se zobrazí na obdélník, viz. obrázek 1.16.

Při zavedení nových proměnných je třeba vyjádřit si proměnné x a y pomocí u a v ze soustavy, která přísluůnou transformaci proměnných zavádí

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$



Obrázek 1.16: $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 2$

Vypočítáme jakobián zobrazení

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \qquad \neq 0 \quad \text{pro} \quad v \in \langle 1; 3 \rangle$$

Zvolené zobrazení je vzájemně jednoznačné, protože jakobián je nenulový. Funkce $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a jejich parciální derivace jsou spojité.

Výpočet obsahu obrazce:

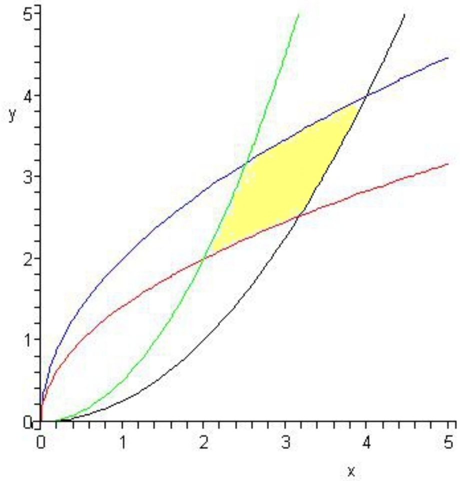
$$S = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{2v} \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_1^2 \left[\frac{\ln v}{2} \right]_1^2 \mathrm{d}u = \frac{\ln 2}{2} [u]_1^2 = \frac{\ln 2}{2}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{\ln 2}{2}$j^2.

Příklad 1.17 ([1]) Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$ a zároveĹ $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Řešení

Obrazec je omezen parabolami $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$ a zároveň leží v prvním kvadrantu, viz obr.1.17 (vyšrafovaná část).



Obrázek 1.17: $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Pokud bychom integrovali podle proměnných x a y, museli bychom integrovanou oblast rozdělit na tři části a počítat tři dvojné integrály. Zavedeme si vhodnou transformaci, která nám zjednoduší výpočet.

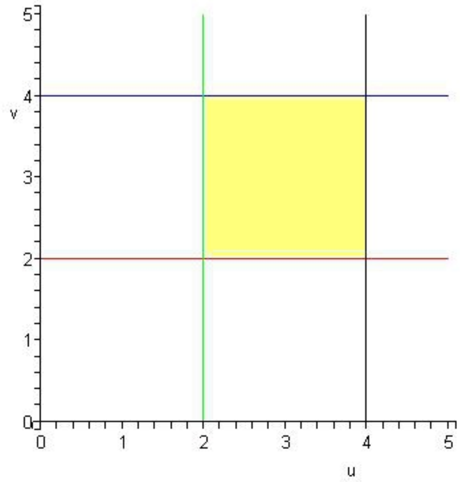
Nové proměnné soustavy

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y} &= u \\ \frac{y^2}{x} &= v \end{aligned}$$

Paraboly $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = 4y$ se zobrazí na přímky $v = 2$, $v = 4$, $u = 2$, $u = 4$. Plocha se zobrazí na obdélník, viz obrázek 1.18.

Při zavedení nových proměnných je třeba vyjádřit si proměnné x a y pomocí u a v ze soustavy, která přísluůnou transformaci proměnných zavádí

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{u^2 v} \\ y &= \sqrt[3]{u v^2} \end{aligned}$$



Obrázek 1.18: $u = 2$, $u = 4$, $v = 2$, $v = 4$

Vypočítáme jakobián zobrazení

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{2uv}{3\sqrt[3]{u^2v^4}} & \frac{v^2}{3\sqrt[3]{u^2v^4}} \\ \frac{u^2}{3\sqrt[3]{u^4v^2}} & \frac{2uv}{3\sqrt[3]{u^4v^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

Zvolené zobrazení je vzájemně jednoznačné, protože Jakobián je nenulový. Funkce $x = \sqrt[3]{u^2v}$ a $y = \sqrt[3]{uv^2}$ a jejich parciální derivace jsou spojité.

Výpočet obsahu obrazce:

$$S = \int_2^4 \left(\int_2^4 \frac{1}{3} \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{3}(4-2)(4-2) = \frac{4}{3}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{4}{3}\mathrm{j}^2$.

Kapitola 2

Dvojný integrál - výpočet objemu

2.1 Výpočet objemu bez užití transformace

***Návod* 2.1** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Objem válcovitého tělesa, které je omezeno shora plochou $z = f(x, y) \geq 0$, zdola plochou $z = 0$ a z boků přímou válcovou plochou, která vymezuje v rovině xy množinu Ω, se rovná*

$$V = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\textit{např. } \Omega = \{[x, y]; x \in \langle a, b\rangle, y \in \langle g(x), h(x)\rangle\},$$

potom

$$V = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Analogicky, dá-li se množina Ω napsat jako

$$\Omega = \{[x, y]; x \in \langle g(y), h(y)\rangle, y \in \langle c, d\rangle\},$$

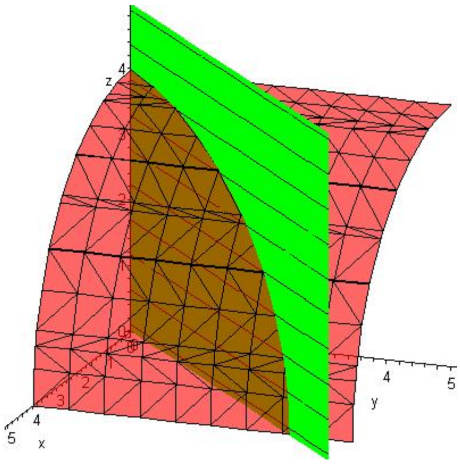
potom

$$V = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 2.1 ([4]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $y = x$, $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$, $z = 0$ a $x \geq 0$.

Řešení

Plocha $x^2 + z^2 = 16$ je válcová plocha, jejíž osa je totožná s osou y. Roviny $y = x$, $y = 0$, $z = 0$ v ní protínají klín, jehož objem máme vypočítat, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: $y = x$, $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$

Těleso je ohraničené shora plochou $x^2 + z^2 = 16$, odtud dostáváme integrační funkci $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. Integrační obor v rovině $z = 0$ je omezen rovnicemi $y = 0$ a $y = x$ a podmínkou $x \geq 0$. Meze proměnné x jsou $x = 0$ a $x = 4$. Meze proměnné y jsou dány z rovin $y = 0$ a $y = x$.

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^4 \left(\int_0^x \sqrt{16 - x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^4 [y]_0^x \sqrt{16 - x^2} \mathrm{d}x = \int_0^4 x\sqrt{16 - x^2} \mathrm{d}x =$$

Použijeme substituci:

$$16 - x^2 = t$$

$$-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$x = 0 \rightarrow t = 16$$

$$x = 4 \to t = 0$$

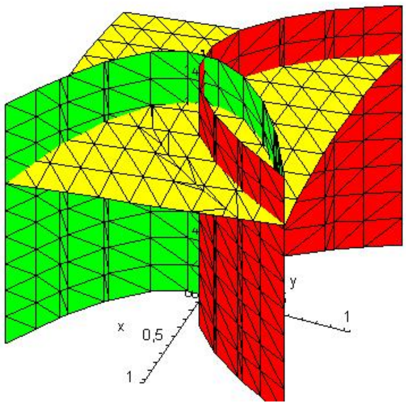
$$= \int_{16}^{0} \frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{16}^{0} = \frac{-1}{3}(-16^{\frac{3}{2}}) = \frac{64}{3}$$

Objem tělesa je $V = \frac{64}{3}$j^3.

Příklad 2.2 ([4]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $y = x^2$, $x = y^2$ a $z = 12 + y - x^2$.

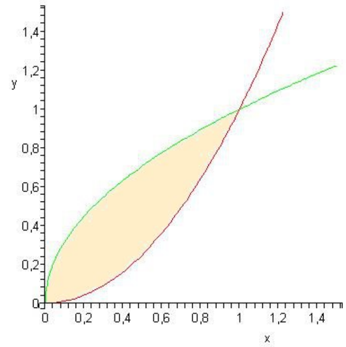
Řešení

Těleso je tvořeno průnikem dvou parabolických válcových ploch $y = x^2$, $x = y^2$ a shora omezeno rovinou $z = 12 + y - x^2$, viz obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 12 + y - x^2$

Integrační funkcí je funkce $f(x, y) = 12 + y - x^2$, což je zadaná rovina $z = 12 + y - x^2$. Parabolické válcové plochy $y = x^2$, $x = y^2$ vytvoří v rovině $z = 0$ dvě paraboly, jejichž průnik je integrovaná oblast. Z obrázku 2.3 jsou patrné meze pro proměnnou x, tj. $0 \leq x \leq 1$. Meze proměnné y vyjádříme z rovnic $y = x^2$ a $x = y^2$, tedy $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.



Obrázek 2.3: $y = x^2$, $x = y^2$

Výpočet objemu tělesa:

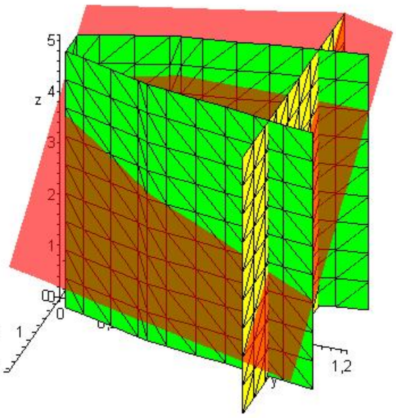
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(12 + y - x^2\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[12y + \frac{y^2}{2} - x^2 y \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(12\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^{\frac{5}{2}} - 12x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4 \right) \mathrm{d}x = \\
&= \left[8x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - 4x^3 - \frac{x^5}{10} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 4 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{569}{140}
\end{aligned}
$$

Objem tělesa je $V = \frac{569}{140}\mathrm{j}^3$.

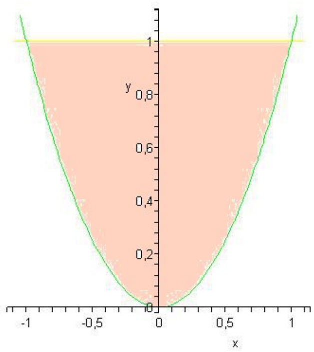
Příklad 2.3 ([4]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $y = x^2$, $x + y + z = 4$, $y = 1$ a $z = 0$.

Řešení

Rovina $x+y+z = 4$ omezuje zadané těleso shora, parabola $y = x^2$, přímka $y = 1$ a rovina $z = 0$ tvoří podstavu tělesa, viz obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: $y = x^2$, $x + y + z = 4$, $y = 1$, $z = 0$



Obrázek 2.5: $y = x^2$, $y = 1$

Na obrázku 2.5 vidíme, že podstavou tělesa je parabola $y = x^2$ protnutá přímkou $y = 1$. Meze proměnné y jsou dány y-ovou souřadnicí vrcholu paraboly a přímkou

$y = 1$, tj. $x^2 \leq y \leq 1$. Konstantní meze proměnné x jsou x-ové souřadnice průsečíků dané paraboly a přímky, tj. $-1 \leq x \leq 1$. Integrační funkcí v tomto případě je funkce $f(x, y) = 4 - x - y$.

Poznámka: Může se zdát, vzhledem k sudosti paraboly $y = x^2$ a přímky $y = 1$, že postačí vypočítat pouze polovinu objemu a ten pak zdvojnásobit. V tomto případě nelze, neboť rovina $x+y+z = 4$ není sudá. Proto musíme integrovat v celém rozsahu integrační oblasti.

Výpočet objemu tělesa:

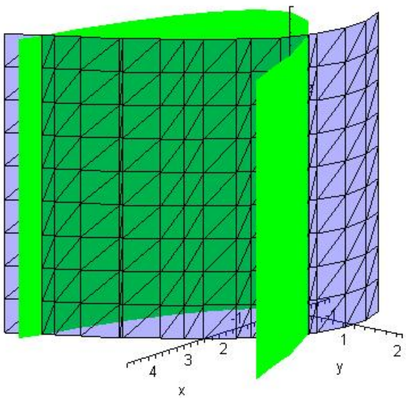
$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} (4 - x - y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-1}^{1} \left(4 - x - \frac{1}{2} - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{7x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{68}{15} \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = \frac{68}{15}\mathrm{j}^3$.

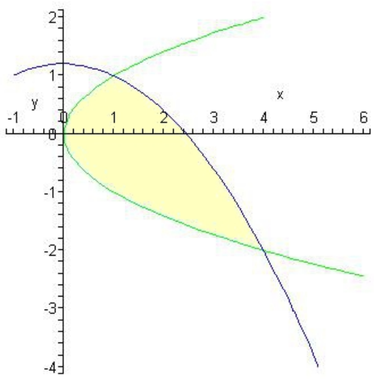
Příklad 2.4 ([4]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$ a $0 \leq z \leq 9$.

Řešení

Průnikem parabolických válcových ploch $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$ vzniká klín, jehož objem máme vypočítat. Výška tělesa je dána nerovnicí $0 \leq z \leq 9$, viz obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$, $0 \leq z \leq 9$



Obrázek 2.7: $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$

Integrační funkci určíme z nerovnice $0 \leq z \leq 9$. To znamená, že podstava tělesa leží v rovině $z = 0$ a těleso je shora omezené rovinou $z = 9$. Proto integrační funkce je funkce $f(x, y) = 9 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Za konstantní meze je výhodnější použít meze proměnné y. Kdybychom použili meze proměnné x, museli bychom integrovanou oblast rozdělit na dvě části, je to patrné na obrázku 2.7. Meze proměnné y jsou y-ové souřadnice průsečíků parabol $x^2 = 6 - 5y$, $y^2 = x$. Řešíme rovnici $y^4 = 6 - 5y$, odtud $y_1 = -2$ a $y_2 = 1$. Proměnné meze jsou dány rovnicemi obou parabol, tj. $y^2 \leq x \leq \sqrt{6 - 5y}$. Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_{-2}^{1} \left(\int_{y^2}^{\sqrt{6-5y}} 9\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} [9x]_{y^2}^{\sqrt{6-5y}} \mathrm{d}y = 9 \int_{-2}^{1} \left(\sqrt{6 - 5y} - y^2 \right) \mathrm{d}y =$$

Použijeme substituci:

$$6 - 5y = t$$

$$-5\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$y = -2 \to t = 16$$

$$y = 1 \to t = 1$$

$$= 9 \int_{16}^{1} \frac{-\sqrt{t}}{5} \mathrm{d}t - 9 \int_{-2}^{1} y^2 \mathrm{d}y = \frac{-9}{5} \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{16}^{1} - 9 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{1}^{-2} =$$

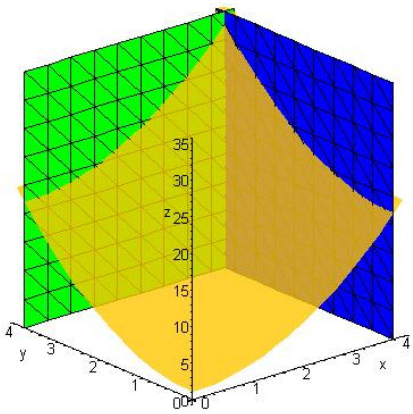
$$= -\frac{6}{5}(1 - 64) - 3(1 + 8) = \frac{243}{5}$$

Objem tělesa je $V = \frac{243}{5} \mathrm{j}^3$.

Příklad 2.5 ([2]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ a $z = x^2 + y^2 + 1$.

Řešení

Hledáme objem kolmého hranolu, shora ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2 + 1$, se čtvercovou podstavou v rovině $z = 0$, ohraničenou přímkami $x = 4$, $x = 0$, $y = 4$ a $y = 0$, viz obrázek 2.8.



Obrázek 2.8: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$, $z = x^2 + y^2 + 1$

Integrovanou funkcí je funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, neboť je horním ohraničením hranolu. Integrační meze pro obě proměnné x, y jsou konstantní, od 0 do 4.
Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^4 \left(\int_0^4 \left(x^2 + y^2 + 1 \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^4 \mathrm{d}x = \int_0^4 (4x^2 + 4 + \frac{64}{3}) \mathrm{d}x =$$

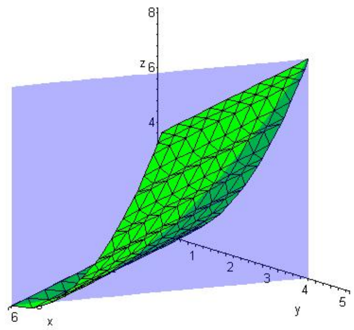
$$= \left[\frac{4x^3}{3} + 4x + \frac{64x}{3} \right]_0^4 = \frac{256}{3} + 16 + \frac{256}{3} = \frac{560}{3}$$

Objem hranolu je $V = \frac{560}{3}$j^3.

Příklad 2.6 ([2]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$ a $z = \frac{y^2}{2}$.

Řešení

Těleso je tvořeno trojúhelníkovou podstavou a je shora omezeno válcovou plochou $z = \frac{y^2}{2}$, viz. obrázek 2.9.



Obrázek 2.9: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$, $z = \frac{y^2}{2}$

Podstavu tělesa tvoří trojúhelník s odvěsnami osou x a osou y a přeponou, která je zadaná rovnicí $2x + 3y - 12 = 0$. Za konstantní meze vezmeme meze proměnné x. Dolní mez je určena osou y, tj. $x = 0$. Horní mez je x-ovou souřadnicí průniku přímky $2x + 3y - 12 = 0$ a osy x. Řešíme rovnici $2x - 12 = 0$ a odtud dostáváme $x = 6$. Dolní mez proměnné y je určena osou x. Horní mez vyjádříme z rovnice $2x + 3y - 12 = 0$, tedy $y = 4 - \frac{2x}{3}$. Integrovanou funkcí je funkce $f(x, y) = \frac{y^2}{2}$.
Výpočet objemu:

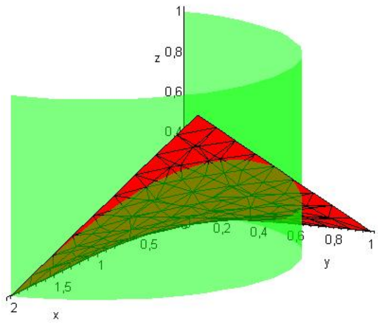
$$\begin{aligned}
V &= \int_0^6 \left(\int_0^{4-\frac{2x}{3}} \frac{y^2}{2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^6 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{4-\frac{2x}{3}} \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int_0^6 \left(4 - \frac{2x}{3} \right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{6} \int_0^6 \left(64 - 32x + \frac{16x^2}{3} - \frac{8x^3}{27} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \left[64x - 16x^2 + \frac{16x^3}{9} - \frac{2x^4}{27} \right]_0^6 = \\
&= 64 - 96 + \frac{576}{9} - \frac{432}{27} = 16
\end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = 16\mathrm{j}^3$.

Příklad 2.7 ([2]) Vypočítejte objem tělesa ležícího v prvním oktanu ohraničeného plochami $z = \frac{xy}{2}$, $x^2 + y^2 = 2x$ a $z = 0$.

Řešení

Těleso leží v prvním oktanu a je shora omezené hyperbolickým paraboloidem $z = \frac{xy}{2}$, zdola rovinou $z = 0$, viz obrázek 2.10.



Obrázek 2.10: $z = \frac{xy}{2}$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$

Integrovanou funkcí je funkce $f(x, y) = \frac{xy}{2}$. Hranice integračního oboru je určena polokružnicí $x^2+y^2 = 2x$, kde $y \leq 0$. Určíme-li si za konstantní meze meze proměnné x, pak integrace bude probíhat na intervalu $\langle 0; 2\rangle$. Meze proměnné y určuje osa x a kružnice $x^2 + y^2 = 2x$. Po vyjádření dostáváme $0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$.

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{xy}{2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) \mathrm{d}x =$$

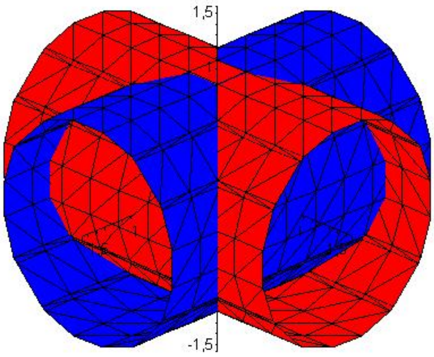
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(4 - \frac{16}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Objem tělesa je $V = \frac{1}{3}\mathrm{j}^3$.

Příklad 2.8 ([3]) Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ležícího v prvním oktanu $(x, y, z \leq 0)$ a omezeného plochami $x^2 + z^2 = 1$ a $y^2 + z^2 = 1$.

Řešení

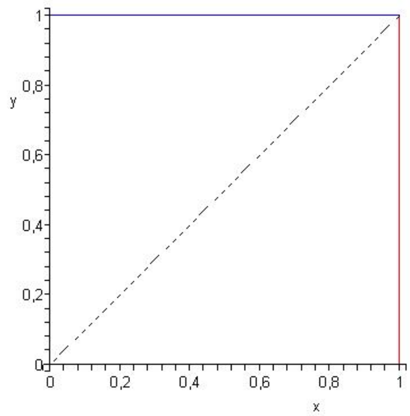
První rovnice ze zadání je válcovou plochou, jejíž osa je totožná se souřadnicovou osou y. Druhá rovnice opět představuje válcovou plochu s osou x. Počítáme-li v prvním kvadrantu, musíme oblast, která vznikla protnutím válcových ploch, ohraničit kladnými polorovinami $x = 0, y = 0, z = 0$. Vznikne těleso se čtvercovou podstavou, shora omezené zadanými plochami, viz obrázek 2.11.



Obrázek 2.11: $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

Z obrázku 2.12 je patrné, že pokud těleso rozpůlíme dle osy kvadrantu (tedy přímky $x = y$), je jedna polovina tělesa shora omezená plochou $x^2+z^2 = 1$ a druhá $y^2+z^2 = 1$. Obě tyto poloviny jsou symetrické, proto nám stačí vypočítat pouze objem jedné poloviny tělesa a vynásobit jej dvěma.

Pro výpočet použijeme plochu $x^2 + z^2 = 1$. Z ní vyjádříme proměnnou z a dostaneme $z = \sqrt{1 - x^2}$. Meze proměnných x a y vyjádříme z hraničních rovnic integrační oblasti $y = 0$ a $y = x$. Za konstantní meze můžeme vzít meze proměnné x,
tj. $0 \leq x \leq 1$. Pak proměnná y je v mezích $y = 0$ a $y = x$, tj. $0 \leq y \leq x$.



Obrázek 2.12: $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, osa prvního kvadrantu $y = x$

Pro polovinu hledaného objemu platí

$$\frac{1}{2} \cdot V = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^2} \right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x =$$

Použijeme substituci:

$$1 - x^2 = t$$

$$-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$x = 0 \to t = 1$$

$$x = 1 \to t = 0$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Tudíž celý objem tělesa je $V = \frac{2}{3}\mathrm{j}^3$.

2.2 Výpočet objemu pomocí transformace do polárních souřadnic

***Návod* 2.2** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

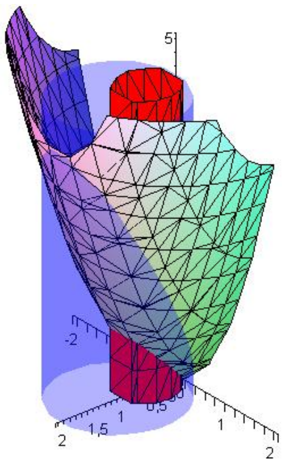
Objem válcovitého tělesa, které je omezeno shora plochou $z = f(x, y) \geq 0$, zdola plochou $z = 0$ a z boků přímou válcovou plochou, která vymezuje v rovině xy množinu Ω, se rovná

$$V = \iint_{\Psi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi.$$

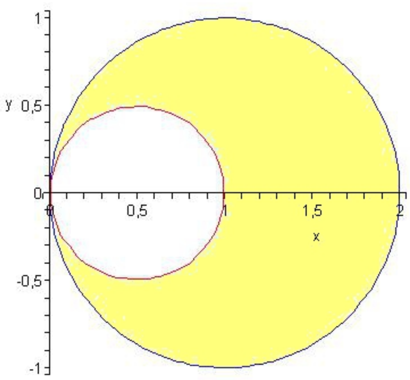
Příklad 2.9 ([2]) Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa omezeného plochami $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ a $x^2 + y^2 = z$.

Řešení

Válcové plochy $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, tvořící podstavu tělesa, se promítnou do roviny $z = 0$ na dvě kružnice, přičemž jedna z kružnic leží uvnitř druhé. Shora těleso omezuje paraboloid $\mathrm{x}^2 + y^2 = z$, viz obrázek 2.13.



Obrázek 2.13: $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = z$



Obrázek 2.14: $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$

Těleso je symetrické dle osy x, proto můžeme počítat pouze polovinu objemu, který pak zdvojnásobíme. V tomto příkladě použijeme transformaci proměnných do polárních souřadnic. Tedy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a Jakobián transformace je $J = r$. Z obrázku 2.14 je patrné, že meze proměnné r jsou určeny kružnicemi $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$. Odtud získáme nerovnici:

$$\begin{aligned} x \leq x^2 + y^2 &\leq 2x \\ r\cos\varphi \leq r^2 &\leq 2r\cos\varphi \\ \cos\varphi \leq r &\leq 2\cos\varphi \end{aligned}$$

Z předchozího vztahu zjistíme proměnné φ:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &\leq 2\cos\varphi \\ 0 &\leq \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \varphi &\leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

Budeme počítat pouze polovinu objemu časti tělesa, která leží v prvním kvadrantu, takže

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Integrační funkcí po zavedení polárních souřadnic je funkce $f(r,\varphi) = r^2$. Určíme ji z rovnice paraboloidu $x^2 + y^2 = z$.
Výpočet poloviny objemu tělesa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot V &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(15\cos^4\varphi \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{15}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{15}{16} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi \right) \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$\begin{aligned} &2\varphi = t \\ &\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$\varphi = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \pi$$

$$= \frac{15}{32}\int\limits_0^{\pi}\left(1 + 2\cos t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = \frac{15}{32}[t]_0^{\pi} + \frac{15}{16}[\sin t]_0^{\pi} + \frac{15}{32}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} =$$

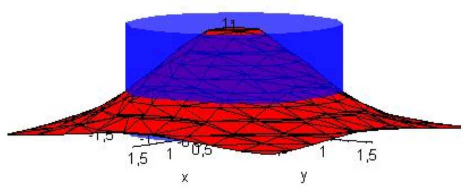
$$= \frac{15\pi}{32} + \frac{15\pi}{64} = \frac{45\pi}{64}$$

Objem tělesa je $V = 2 \cdot \frac{45\pi}{64} = \frac{45\pi}{32}\mathrm{j}^3$.

Příklad 2.10 ([3]) Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa omezeného plochami $e^{-x^2-y^2} = z$, $x^2 + y^2 = 1$ a $z = 0$.

Řešení

Podstava tělesa leží v rovině $z = 0$ a je ohraničena osami x, y a kružnicí, která vznikla kolmým promítnutím válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$ do roviny $z = 0$. Shora je omezeno rovinou $e^{-x^2-y^2} = z$. Tato rovina je symetrická podle os x, y, proto můžeme počítat pouze jednu čtvrtinu objemu a ten pak zčtyřnásobit, viz obrázek 2.15.



Obrázek 2.15: $e^{-x^2-y^2} = z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

Pro tento příklad je vhodné použít transformaci do polárních souřadnic, tedy

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{a jakobián transformace} \quad J = r.$$

Integrační funkcí v tomto případě je funkce $f(r,\varphi) = e^{-r^2}$. Protože integrovanou oblastí vezmeme část kružnice v prvním kvadrantu, meze proměnné r jsou $r = 0$ a $r = 1$ a pro meze proměnné φ platí $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Výpočet čtvrtiny objemu tělesa:

$$\frac{1}{4} \cdot V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r e^{-r^2} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

Použijeme substituci:

$$-r^2 = t$$

$$r\mathrm{d}r = \frac{-1}{2}\mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$r = 0 \rightarrow t = 0$$

$$r = 1 \rightarrow t = -1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-1} \frac{-1}{2} e^t \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[e^t \right]_0^{-1} \mathrm{d}\varphi = \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

Objem tělesa je $V = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right)$j^3.

2.3 Výpočet objemu pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

***Návod* 2.3** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině. Zobecněné polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi \\ y &= br\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{(a, b jsou konstanty)},$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle . \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r,\varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

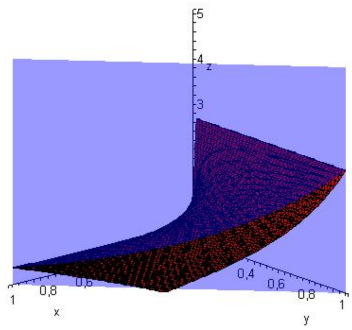
Objem válcovitého tělesa, které je omezeno shora plochou $z = f(x,y) \geq 0$, zdola plochou $z = 0$ a z boků přímou válcovou plochou, která vymezuje v rovině xy množinu Ω, se rovná

$$V = \iint\limits_{\Psi} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 2.11 ([9]) Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa omezeného plochami $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, $x + y = 1$, $x = 0$ a $y = 0$.

Řešení

Těleso s trojúhelníkovou podstavou je shora omezené rovinou $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, viz obrázek 2.16.



Obrázek 2.16: $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, $x + y = 1$

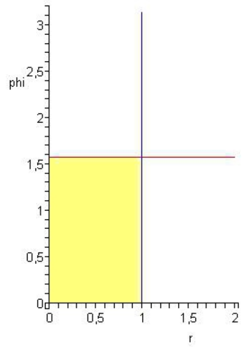
Integrační funkcí v tomto případě je funkce $f(x, y) = e^{\frac{y-x}{y+x}}$. Řešení takového integrálu je velmi nesnadné. Proto si zavedeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic, tedy

$$x = r\cos^2\varphi, \quad y = r\sin^2\varphi.$$

Spočítáme jakobián této transformace:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2r\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 2r\sin\varphi\cos^3\varphi + 2r\sin^3\varphi\cos\varphi = r\sin 2\varphi.$$

Meze nové proměnné r jsou $r = 0$ a $r = 1$, vyčteme je z trojúhelníku v podstavě, kde délka odvěsny ležící na ose y je dlouhá 1j. Trojúhelník leží v prvním kvadrantu a jeho odvěsny leží na osách x, y, takže meze pro proměnnou φ jsou $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Situaci nové integrované oblasti můžeme sledovat na obrázku 2.17.



Obrázek 2.17: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi\frac{\pi}{2}$

Po dosazení nových proměnných do původní funkce $f(x,y) = e^{\frac{y-x}{y+x}}$ dostáváme novou integrační funkci $f(r,\varphi) = e^{-\cos 2\varphi}$.

Výpočet objemu tělesa:

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 r \sin 2\varphi e^{-\cos 2\varphi} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi e^{-\cos 2\varphi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \\
&= \frac{1}{2} \sin 2\varphi e^{-\cos 2\varphi} \mathrm{d}\varphi =
\end{aligned}
$$

Použijeme substituci:

$$-\cos 2\varphi = t$$
$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\sin 2\varphi}\mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$\varphi = 0 \rightarrow t = -1$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{1} e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \left[e^t \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

Objem tělesa je $V = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$j^3.

Poznámka: Tento příklad lze řešit i jiným způsobem, který je ukázán v příkladu 2.12.

2.4 Výpočet objemu pomocí substituce

***Návod* 2.4** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině. Zobecněná transformace je dána předpisem:*

$$
\begin{aligned}
x &= g(u, v) \\
y &= h(u, v),
\end{aligned}
$$

Najdeme $\Psi \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(u, v) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$, přičemž funkce g a h a jejich parciální derivace jsou v Ψ spojité.

Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$
\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Objem válcovitého tělesa, které je omezeno shora plochou $z = f(x, y) \geq 0$, zdola plochou $z = 0$ a z boků přímou válcovou plochou, která vymezuje v rovině xy množinu Ω, se rovná

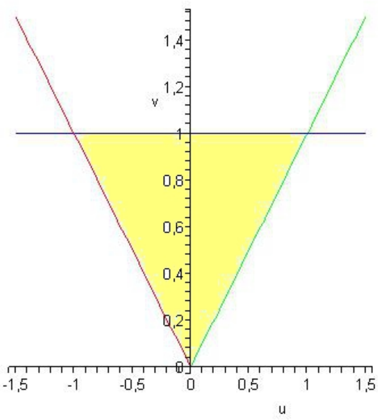
$$
V = \iint_{\Psi} f(g(u, v), h(u, v)) |J| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,
$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota Jakobiova determinantu.

Příklad 2.12 ([9]) Užitím dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa omezeného plochami $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, $x + y = 1$, $x = 0$ a $y = 0$.

Řešení

Těleso s trojúhelníkovou podstavou je shora omezené rovinou $z = e^{\frac{y-x}{y+x}}$, viz obrázek 2.16.



Obrázek 2.18: $v = 1$,$v = u$, $v = -u$

Tento příklad jsme již řešili pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic. Nyní si ukážeme, jak jej lze řešit pomocí substituce

$$u = y - x, \quad v = y + x.$$

Vyjádříme si proměnné x, y pomocí nových proměnných u, v

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{v - u}{2}$$

a odtud vypočítáme jakobián transformace:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Z obrázku 2.18 je patrné, že meze pro proměnnou v jsou $v = 0$ a $v = 1$. Meze proměnné u určíme pomocí přímek $v = u$ a $v = -u$, tedy $u = -v$ a $u = v$. Po zavedení transformace je integrační funkcí funkce $f(u,v) = e^{\frac{u}{v}}$.

Výpočet objemu tělesa:

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left[v e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^{v} \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int\limits_0^1 v \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$j^3.

Poznámka: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladě 2.11.

Kapitola 3

Dvojný integrál - výpočet hmotnosti

3.1 Výpočet hmotnosti bez užití transformace

***Návod* 3.1** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Hmotnost plochy Ω, je-li její plošná hustota v libovolném bodě $(x, y) \in \Omega$ rovna $\sigma(x, y)$, je dána vzorcem*

$$m = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\text{např. } \Omega = \{[x, y]; x \in \langle a, b\rangle, y \in \langle g(x), h(x)\rangle\},$$

potom

$$m = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \sigma(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Analogicky, dá-li se množina Ω napsat jako

$$\Omega = \{[x, y]; x \in \langle g(y), h(y)\rangle, y \in \langle c, d\rangle\},$$

potom

$$m = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} \sigma(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

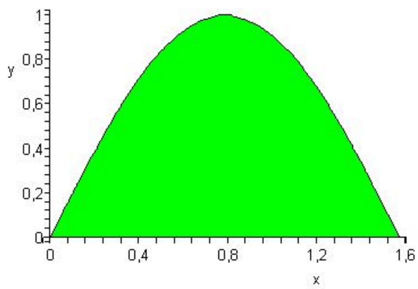
Příklad 3.1 ([4]) Vypočtěte hmotnost rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in E_2; \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \sin 2x\},$$

je-li $\sigma(x, y) = x^2$ plošná hustota.

Řešení

Obrazec je ohraničen sinusoidou a osou x, viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: $y = \sin 2x$, pro $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Meze pro proměnné jsou patrné z obrázku 3.1 a také jasně dány z předpisu obrazce A. Takže za konstantní meze bereme meze proměnné x, tj. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Pro proměnnou y platí $0 \le y \le \sin 2x$.

Dosadíme do vzorce pro hmotnost a počítáme:

$$m(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin 2x} x^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x^2 y]_0^{\sin 2x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \mathrm{d}x =$$

Použijeme substituci:

$$2x = t \qquad x = \frac{t}{2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$x = 0 \to t = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \to t = \pi$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} t^2 \sin t \mathrm{d}t =$$

Použijeme metodu per partes:

$$u = t^2 \qquad v' = \sin t$$

$$u' = 2t \qquad v = -\cos t$$

$$= -\frac{1}{8} \left[t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} t \cos t \mathrm{d}t =$$

Opět použijeme metodu per partes:

$$u = t \qquad v' = \cos t$$

$$u' = 1 \qquad v = \sin t$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} [t \sin t]_0^{\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} [\cos t]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

Hmotnost rovinného obrazce A je $m(A) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$.

Příklad 3.2 ([4]) Vypočtěte hmotnost rovinného obrazce

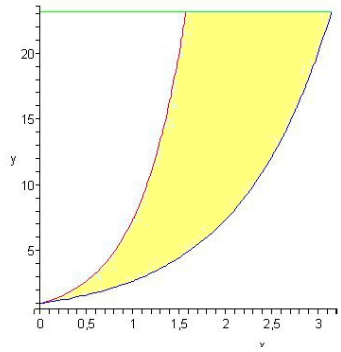
$$A = \{[x, y] \in E_2; \quad y \leq e^{2x}, y \geq e^x, y \leq e^{\pi}\},$$

je-li $\sigma(x, y) = y$ plošná hustota.

Řešení

Obrazec je ohraničen křivkami $y = e^{2x}$, $y = e^x$ a přímkou $y = e^{\pi}$, viz obrázek 3.2.

Pro výpočet hmotnosti obrazce jej musíme rozdělit na dvě části. Dolní mez proměnné x pro výpočet první části obrazce je x-ová souřadnice průsečíku křivek $y = e^{2x}$, $y = e^x$. Řešíme $e^{2x} = e^x$ a odtud dostaneme $x = 0$. Horní mez je x-ovou souřadnicí průsečíku křivky $y = e^{2x}$ a přímky $y = e^{\pi}$, tj. $x = \frac{\pi}{2}$. Tato mez je zároveĽ dolní mezí proměnné x pro výpočet hmotnosti druhé části obrazce. Horní mezí v tomto případě je x-ová souřadnice průsečíku křivky $y = e^x$ a přímky $y = e^{\pi}$, tedy $x = \pi$. Meze proměnné y jsou pro první část obrazce dány křivkami $y = e^{2x}$, $y = e^x$, takže $e^x \leq y \leq e^{2x}$. Pro druhou část obrazce jsou dány křivkou $y = e^x$ a přímkou $y = e^{\pi}$,



Obrázek 3.2: $y \leq e^{2x}$, $y \geq e^x$, $y \leq e^\pi$

tj. $e^x \leq y \leq e^\pi$.

Výpočet hmotnosti první části obrazce:

$$m_1(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{e^x}^{e^{2x}} y \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{e^x}^{e^{2x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4x} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \mathrm{d}x =$$

Pro první integrál použijeme substituci:

$$4x = t$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$x = 0 \rightarrow t = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 2\pi$$

Pro druhý integrál použijeme substituci:

$$2x = s \qquad x = \frac{s}{2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{d}s$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$x = 0 \rightarrow s = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow s = \pi$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} e^t \mathrm{d}t - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^s \mathrm{d}s = \frac{1}{8} \left[e^t \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \left[e^s \right]_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}}{8} - \frac{e^\pi}{4} + \frac{1}{8}$$

Výpočet hmotnosti druhé části obrazce:

$$m_2(A) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{e^x}^{e^\pi} y \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{e^x}^{e^\pi} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(e^{2\pi} - e^{2x} \right) \mathrm{d}x =$$

Použijeme stejnou substituci jako v předchozím výpočtu pro druhý integrál:

$$= \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \left(e^{2\pi} - e^s \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{4} \left[s e^{2\pi} - e^s \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{\pi e^{2\pi}}{4} - \frac{e^{2\pi}}{4} + \frac{e^\pi}{4}$$

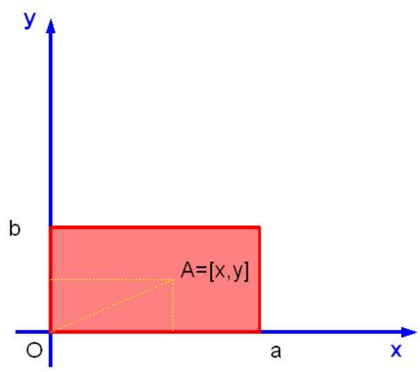
Celková hmotnost obrazce je součet obou hmotností

$$m(A) = m_1(A) + m_2(A) = \frac{e^{2\pi}}{8} - \frac{e^\pi}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\pi e^{2\pi}}{4} - \frac{e^{2\pi}}{4} + \frac{e^\pi}{4} = \frac{2\pi e^{2\pi} - e^{2\pi} + 1}{8}.$$

Příklad 3.3 ([13]) Určete hmotnost obdélníka o stranách a, b, je-li jeho plošná hustota v každém jeho bodě úměrná druhé mocnině vzdálenosti od jednoho pevně zvoleného vrcholu.

Řešení

Obdélník umístíme v souřadném systému roviny tak, aby jeden z vrcholů ležel v počátku, strana a ležela na ose x a strana b na ose y, viz obrázek 3.3.



Obrázek 3.3: Obdélník se stranami a, b

Stanovíme funkci hustoty $\sigma(x, y)$ obdélníka. Je-li A=$[x, y]$ libovolný bod obdélníka, přičemž $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, je druhá mocnina jeho vzdálenosti od vrcholu rovna $(a^2 + b^2) - (x^2 + y^2)$. Takže hustota v bodě A je rovna

$\sigma(x,y) = k((a^2+b^2)-(x^2+y^2))$, kde k je koeficient přímé úměrnosti. Když si navíc v našem případě zvolíme vrchol obdélníka ten, který leží v počátku souřadnicového systému (V=[0,0]), pak hustota je rovna $\sigma(x,y) = k(x^2+y^2)$. Jak je patrné z obrázku 3.3, meze proměnných x, y jsou konstantní a platí $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.
Výpočet hmotnosti obdélníka:

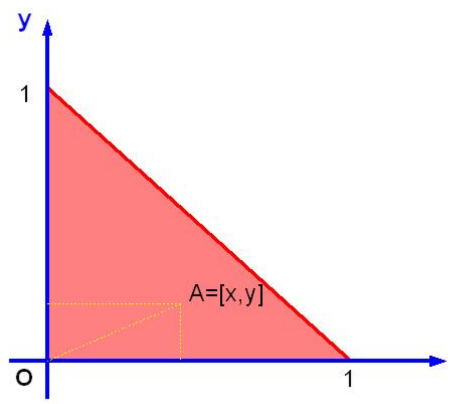
$$\begin{aligned} m &= \int_0^a \left(\int_0^b k\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}y = k \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^b \mathrm{d}x = k \int_0^a \left(bx^2 + \frac{b^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \\ &= k \left[\frac{bx^3}{3} + \frac{b^3 x}{3} \right]_0^a = k \left(\frac{a^3 b + ab^3}{3} \right) = \frac{kab}{3} \left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

Hmotnost obdélníku je $m = \frac{kab}{3}\left(a^2+b^2\right)$.

Příklad 3.4 Stanovte hmotnost trojúhelníka omezeného přímkou $x+y=1$ a osami souřadnicovými, je-li plošná hustota v libovolném bodě přímo úměrná čtverci jeho vzdálenosti od počátku.

Řešení

Situace je vyobrazena na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Trojúhelník omezený přímkou $x+y=1$ a osami souřadnicovými

Vzdálenost libovolného bodu A=$[x,y]$, přičemž $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1-x$, od počátku souřadnicového systému je rovna x^2+y^2. Hustota v bodě A je tedy rovna $\sigma(x,y) = k(x^2+y^2)$, kde k je koeficient přímé úměrnosti. Podmínky pro obě souřadnice bodu A zároveĹ udávají integrovanou oblast. Výpočet hmotnosti trojúhelníku:

$$\begin{aligned} m &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = k \int\limits_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\ &= k \int\limits_0^1 \left(2x^2 - x - \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x = k \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{k}{6} \end{aligned}$$

Hmotnost trojúhelníku je $m = \frac{k}{6}$.

3.2 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do polárních souřadnic

***Návod* 3.2** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} \;=\; \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

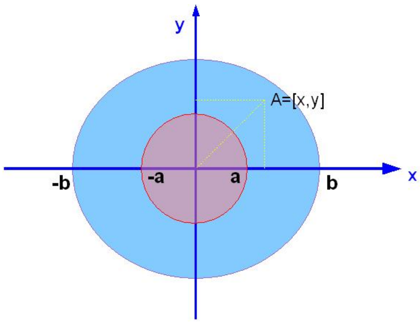
Pak hmotnost plochy Ω, je-li její plošná hustota v libovolném bodě $(x, y) \in \Omega$ rovna $\sigma(x, y)$, je dána vzorcem

$$m = \iint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 3.5 ([2]) Vypočítejte hmotnost mezikruží o poloměrech $0 \leq a \leq b$, je-li plošná hustota v libovolném bodě nepřímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od středu kružnic a na vnitřní kružnici je rovna 1.

Řešení

Mezikruží je rozdílem dvou soustředných kružnic, přičemž jedna má poloměr a a druhá b. Střed kružnic položíme do počátku souřadnicového systému, viz obrázek 3.5.



Obrázek 3.5: Mezikruží o poloměrech $0 \leq a \leq b$

Je-li A=$[x,y]$, $\sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{b^2-y^2}$, $\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{b^2-x^2}$, libovolný bod mezikruží, je vzdálenost od středu kružnic rovna $\sqrt{x^2+y^2}$. Potom hustota v bodě A je $\sigma(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde k je koeficient nepřímé úměrnosti. V tomto příkladě můžeme stanovit hodnotu koeficientu k. Víme, že hustota bodu ležícího na vnitřní kružnici je rovna 1, takže

$$\sigma(0,a) = \frac{k}{\sqrt{0+a^2}} = 1 \quad \text{odtud dostaneme} \quad k = a$$

dosadíme do funkce hustoty a získáme

$$\sigma(x,y) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Meze pro proměnnou x jsou dány poloměry kružnic. Meze proměnné y vyjadřujeme z rovnic kružnic. Pokud bychom začali počítat již nyní, dostali bychom se k řešení dost obtížného integrálu, proto je mnohem vhodnější použít transformaci do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{a jakobián této transformace je } J = r.$$

Po dosazení nových proměnných dostaneme integrační funkci (funkci hustoty) $\sigma(r,\varphi) = \frac{a}{r}$ a meze pro integraci jsou $0 \leq \varphi \leq \pi$, $a \leq r \leq b$. Výpočet hmotnosti mezikruží:

$$m = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b r \frac{a}{r} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} a[r]_a^b \, \mathrm{d}\varphi = a\,(b-a)\,[\varphi]_0^{2\pi} = 2a\pi\,(b-a)$$

Hmotnost mezikruží je $m = 2a\pi\,(b-a)$.

3.3 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

***Návod* 3.3** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Zobecněné polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi \\ y &= br\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{(}a,\ b \text{ jsou konstanty),}$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r,\varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

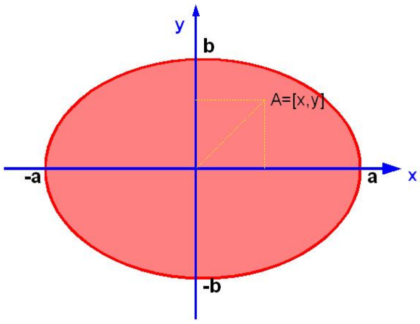
Pak hmotnost plochy Ω, je-li její plošná hustota v libovolném bodě $(x,y) \in \Omega$ rovna $\sigma(x,y)$, je dána vzorcem

$$m = \iint\limits_{\Psi} \sigma(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 3.6 ([9]) V obrazci, ohraničeném elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, je hmota rozložena tak, že hustota je přímo úměrná vzdálenosti od osy x, přičemž pro $y = 1$ je rovna γ. Najděte hmotnost celého obrazce.

Řešení

Obrazec, ohraničený elipsou, umístíme v souřadnicovém systému tak, aby střed elipsy ležel v počátku a osy na osách souřadnicových, viz obrázek 3.6.



Obrázek 3.6: Elipsa se středem v počátku

Protože takto položená elipsa je symetrická vzhledem k osám x, y, budeme počítat hmotnost pouze té části obrazce ležícího v prvním kvadrantu, tedy $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Vzdálenost libovolného bodu A=[x,y], platí podmínka $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, od osy x je y. Takže hustota v bodě A je rovna $\sigma(x, y) = ky$, kde k je koeficient přímé úměrnosti. Dále víme, že ve všech bodech uvnitř a na elipse, které mají y-ovou souřadnici rovnou 1, je hustota rovna γ. Odtud můžeme vypočítat koeficient k:

$\sigma(x, 1) = k \cdot 1 = \gamma \quad$ takže $k = \gamma$

po dosazení získáváme funkční předpis pro hustotu

$\sigma(x, y) = \gamma y$

V tomto příkladě použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic,

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

Jakobián této transformace je $J = abr$.

Pak integrační funkcí je funkce $\sigma(r, \varphi) = \gamma br\sin\varphi$. Proměnná r má meze $r = 0$ a

$r = 1$. Meze pro proměnnou φ jsou $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Výpočet hmotnosti obrazce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot m &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 ab^2 \gamma r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = ab^2\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{ab^2\gamma}{3} \left[-\cos\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^2\gamma}{3} \end{aligned}$$

Hmotnost obrazce je $m = 4 \cdot \frac{ab^2\gamma}{3} = \frac{4ab^2\gamma}{3}$.

Kapitola 4

Dvojný integrál - výpočet souřadnic těžiště

4.1 Výpočet souřadnic těžiště bez užití transformace

***Návod* 4.1** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Nechť x_0, y_0 jsou souřadnice těžiště rovinného obrazce Ω, je-li navíc $\sigma(x,y)$ jeho hustota a m hmotnost, pak platí:*

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x,y)\cdot x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x,y)\cdot y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\textit{např. } \Omega = \{[x,y]; x \in \langle a,b\rangle, y \in \langle g(x), h(x)\rangle\},$$

potom

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x,y)\cdot x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \sigma(x,y)\cdot x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x,y)\cdot y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \sigma(x,y)\cdot y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Analogicky, dá-li se množina Ω napsat jako

$$\Omega = \{[x, y]; x \in \langle g(y), h(y)\rangle, y \in \langle c, d\rangle\},$$

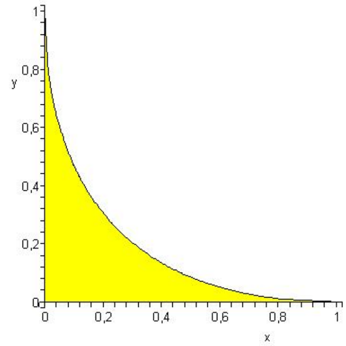
potom

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y) \cdot x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} \sigma(x, y) \cdot x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y) \cdot y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} \sigma(x, y) \cdot y \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Příklad 4.1 ([1]) Najděte souřadnice těžiště homogenní destičky, která je vymezena křivkami $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $y=0$ a $x=0$.

Řešení

Destička je ohraničena křivkou $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ a osami souřadnicovými. Její hustota je zadaná funkcí $\sigma(x,y)=k$, kde k je konstanta, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $y=0$, $x=0$

K tomu, abychom vypočítali souřadnice těžiště destičky, musíme nejdřív určit její hmotnost. Meze pro proměnné jsou patrné z obrázku 4.1. Za konstantní meze vezmeme meze proměnné x, tj. $0\le x\le 1$. Horní mez proměnné y je dána křivkou $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ a dolní mez osou x, takže $0\le y\le (1-\sqrt{x})^2$.
Výpočet hmotnosti:

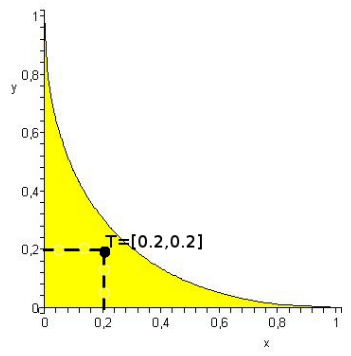
$$\begin{aligned} m &= \int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} k\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = k\int_0^1 [y]_0^{(1-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x = k\int_0^1\left(1-2\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x = \\ &= k\left[x-\frac{4x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = k\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{k}{6} \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{6}{k}\int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} kx\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x[y]_0^{(1-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x\left(1-2\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x = \\ &= 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Těleso je symetrické, takže y-ová souřadnice těžiště je rovna x-ové.

Těžištěm destičky je bod $T = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.



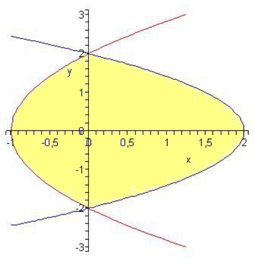
Obrázek 4.2: Zobrazení těžiště

Poznámka: Tento příklad můžeme řešit i transformací do zobecněných polárních souřadnic (např. $x = r\cos^4\varphi$, $y = r\sin^4\varphi$), tak jako v podobném příkladě 4.10.

Příklad 4.2 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y^2 = 4x + 4$ a $y^2 = -2x + 4$, je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = 1$.

Řešení

Obrazec je vlastně průnikem dvou parabol, které mají osy totožné s osou x, viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$

V tomto případě je výhodnější za konstantní meze použít meze proměnné y. Kdybychom vzali meze proměnné x, museli bychom oblast rozdělit na dvě části a počítat dva integrály. Dolní mez je záporná y-ová souřadnice průsečíků parabol a horní mezí je kladná y-ová souřadnice těchto průsečíků, tedy $y=-2$ a $y=2$. Meze proměnné x určují rovnice parabol, takže $\frac{y^2-4}{4} \leq x \leq \frac{4-y^2}{2}$.

Výpočet hmotnosti:

$$m = \int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2}[x]_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}\left(12-3y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[12y-y^3\right]_{-2}^{2} = 8$$

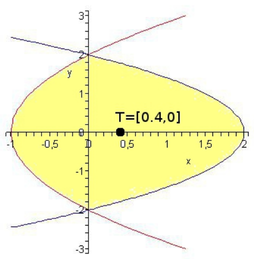
Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{16-8y^2+y^4}{4}-\frac{y^4-8y^2+16}{16}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{256}\int\limits_{-2}^{2}\left(48-24y^2+3y^4\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{256}\left[48y-8y^3+\frac{3y^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \\ &= \frac{1}{256}\left(96-64+\frac{96}{5}+96-64+\frac{96}{5}\right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{2} y[x]_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{32}\int\limits_{-2}^{2}\left(12y-3y^3\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{32}\left[6y^2-\frac{3y^4}{4}\right]_{-2}^{2} = 0 \end{aligned}$$

Těžištěm obrazce je bod $T=\left[\frac{2}{5},0\right]$.

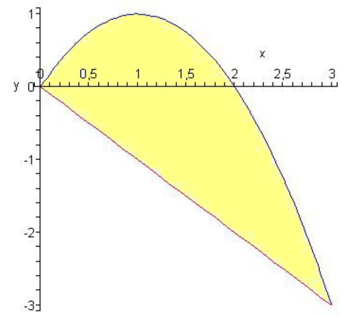


Obrázek 4.4: Zobrazení těžiště

Příklad 4.3 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = -x$ a $y = 2x - x^2$, je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = 1$.

Řešení

Obrazec je parabola $y = 2x - x^2$ vyťatá přímkou $y = -x$, viz obrázek 4.5.



Obrázek 4.5: $y = 2x - x^2$,$y = -x$

Meze proměnné x jsou x-ové souřadnice průsečíků paraboly $y = 2x - x^2$ a přímky $y = -x$, tj. $0 \leq x \leq 3$. Pak meze proměnné y jsou $y = -x$ a $y = 2x - x^2$.

Výpočet hmotnosti:

$$m = \int_0^3 \left(\int_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^3 [y]_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\frac{3}{x} - x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

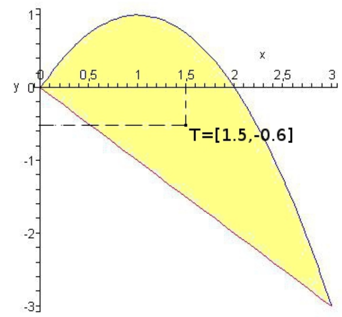
Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{2}{9} \int_0^3 \left(\int_{-x}^{2x-x^2} x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{9} \int_0^3 x[y]_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{9} \int_0^3 \left(3x^2 - x^3 \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{2}{9} \int_0^3 \left(\int_{-x}^{2x-x^2} y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{9} \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{2x-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{9} \int_0^3 \left(3x^2 - 4x^3 + x^4 \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{9} \left[x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Těžištěm obrazce je bod $T = \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{5} \right]$.



Obrázek 4.6: Zobrazení těžiště

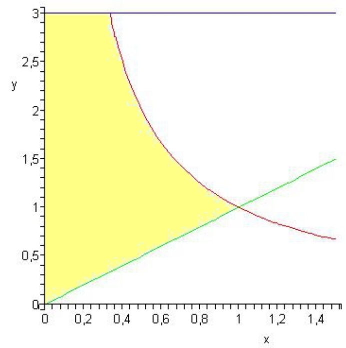
Příklad 4.4 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in E_2; \quad 0 \leq x \leq y \leq 3, y \leq \frac{1}{x}\},$$

je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = k$.

Řešení

Obrazec je ohraničen ramenem hyperboly $y = \frac{1}{x}$ a přímkami $y = x$, $y = 3$, viz obrázek 4.7.



Obrázek 4.7: $\quad 0 \leq x \leq y \leq 3, y \leq \frac{1}{x}$

Za konstantní meze zvolíme meze proměnné y, protože tak nám stačí vypočítat pouze y-ovou souřadnici průsečíku přímky $y = x$ a hyperboly $y = \frac{1}{x}$, tj. $y = 1$. Přesto integrovanou oblast musíme rozdělit na dvě části, rozdělíme ji přímkou $y = 1$. Meze proměnné y jsou tedy $y = 0$ a $y = 1$ pro první část, $y = 1$ a $y = 3$ pro druhou část. Meze proměnné x v první části obrazce určuje osa y a přímka $y = x$, takže $0 \leq x \leq y$, v druhé části opět osa y a hyperbola $y = \frac{1}{x}$, odtud $0 \leq x \leq \frac{1}{y}$.

Výpočet hmotnosti první části:

$$m_1 \;=\; k\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = k\int\limits_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{k}{2}$$

Výpočet hmotnosti druhé části:

$$m_2 \;=\; k\int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = k\int\limits_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y = k\ln 3$$

Celková hmotnost obrazce:

$$m \;=\; m_1 + m_2 = \frac{k}{2} + k\ln 3 = \frac{k\,(1+2\ln 3)}{2}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
x_{T1} &= \frac{2}{k\,(1+2\ln 3)}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y kx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{(1+2\ln 3)}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3\,(1+2\ln 3)} \\
x_{T2} &= \frac{2}{k\,(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}} kx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{(1+2\ln 3)}\left[-\frac{1}{y}\right]_1^3 = \frac{2}{3\,(1+2\ln 3)} \\
x_T &= x_{T1} + x_{T2} = \frac{1}{3\,(1+2\ln 3)} + \frac{2}{3\,(1+2\ln 3)} = \frac{1}{1+2\ln 3}
\end{aligned}$$

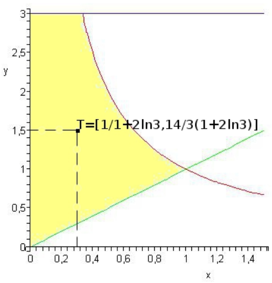
Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
y_{T1} &= \frac{2}{k\,(1+2\ln 3)}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y ky\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)}\int\limits_0^1 y[x]_0^y\mathrm{d}y = \\
&= \frac{2}{(1+2\ln 3)}\int\limits_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3\,(1+2\ln 3)} \\
y_{T2} &= \frac{2}{k\,(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}} ky\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)}\int\limits_1^3 y[x]_0^{\frac{1}{y}}\mathrm{d}y =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(1+2\ln 3)} \int_1^3 \mathrm{d}y = \frac{2}{(1+2\ln 3)} [y]_1^3 = \frac{4}{(1+2\ln 3)}$$

$$y_T = y_{T1} + y_{T2} = \frac{2}{3\,(1+2\ln 3)} + \frac{4}{(1+2\ln 3)} = \frac{14}{3\,(1+2\ln 3)}$$

Těžištěm obrazce je bod $T = \left[\frac{1}{1+2\ln 3}, \frac{14}{3(1+2\ln 3)}\right]$.

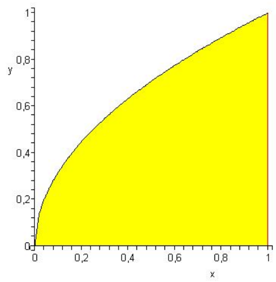


Obrázek 4.8: Zobrazení těžiště

Příklad 4.5 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkami $x = 1$, $y = 0$ a $y = \sqrt{x}$, je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = \frac{1}{x+1}$.

Řešení

Hranice integrované oblasti tvoří křivka $y = \sqrt{x}$, osa x a přímka $x = 0$, viz obrázek 4.9.



Obrázek 4.9: $x = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$

Konstantními mezemi zvolíme meze proměnné x, jak je patrné z obrázku 4.9, jsou to $x = 0$ a $x = 1$. Meze proměnné y určují křivky $y = 0$ a $y = \sqrt{x}$.

Výpočet hmotnosti:

$$m = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x} [y]_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} \mathrm{d}x =$$

Použijeme substituci:

$$x = t^2 \qquad \sqrt{x} = t$$

$$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$$

V tomto případě se nám meze nezmění

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} \mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} \mathrm{d}t = 2\left(\int\limits_0^1 \mathrm{d}t - \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \right) =$$

$$= 2\left([t]_0^1 - [\arctan t]_0^1 \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Pro snadnější výpočet nyní přehodíme pořadí integrace. Konstantní meze jsou meze proměnné y, tedy $0 \leq y \leq 1$, takže meze proměnné x jsou $x = y^2$ a $x = 1$.

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{y^2} \frac{x}{1+x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{y^2} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 [x - \ln|1+x|]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \left(1 - \ln 2 - y^2 + \ln|1+y^2| \right) \mathrm{d}y =$$

Použijeme metodu per partes:

$$u = \ln|1+y^2| \qquad v` = 1$$

$$u` = \frac{2y}{1+y^2} \qquad v = y$$

$$= \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \left([y]_0^1 - [y\ln 2]_0^1 - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 + \left[y \ln|1+y^2| \right]_0^1 - 2\int\limits_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \left(1 - \ln 2 - \frac{1}{3} + \ln 2 - 2[y]_0^1 + 2\,[\arctan y]_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi - 8}{12 - 3\pi}$$

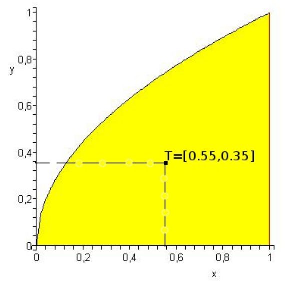
Nyní opět za konstantní meze bereme meze proměnné x.

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$y_T = \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4-\pi}\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4-\pi}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{1}{4-\pi}\left([x]_0^1 - [\ln|1+x|]_0^1\right) = \frac{1-\ln 2}{4-\pi}$$

Těžištěm obrazce je bod $T = \left[\frac{3\pi-8}{12-3\pi}, \frac{1-\ln 2}{4-\pi}\right]$.



Obrázek 4.10: Zobrazení těžiště

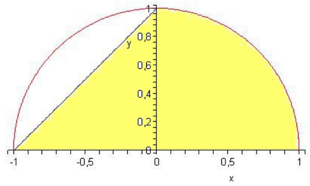
Příklad 4.6 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce

$$A = \{[x,y] \in E_2; \quad x^2+y^2 \leq 1, y \leq x+1, y \geq 0\},$$

je-li jeho plošná hustota $\sigma(x,y) = 1$.

Řešení

Obrazec je půlkružnice ležící v prvním a druhém kvadrantu a zároveň v druhém kvadrantu je navíc vyťatá přímkou $y = 1+x$, viz obrázek 4.11.



Obrázek 4.11: $x^2+y^2=1$, $y=x+1$, $y=0$

Abychom nemuseli oblast obrazce rozdělovat na dvě části, zvolíme si za konstantní meze meze proměnné y, tj. $0 \leq y \leq 1$. Pak meze proměnné x jsou $x = y - 1$ a $x = \sqrt{1 - y^2}$. Začneme-li počítat hmotnost obrazce, dostaneme se k řešení integrálu typu $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$, tomu se můžeme lehce vyhnout. Víme, že plošná hustota se jinak vypočítá jako podíl hmotnosti a obsahu ($\sigma = \frac{m}{S}$). My máme hodnotu hustoty rovnu jedné, tzn. hodnota hmotnosti se rovná hodnotě obsahu. Takže vlastně počítáme obsah obrazce. Hodnotu obsahu můžeme vydedukovat z obrázku 4.11. Část obrazce, která leží v druhém kvadrantu, je rozdíl čtvrtky kružnice a trojúhelníku s odvěsnami délky 1j. Obsah trojúhelníku je $1j^2$. Odtud obsah této části je roven $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Obsah celého obrazce a tedy i hmotnost je $m = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{4}$. Nyní už můžeme rovnou počítat souřadnice těžiště.

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{4}{\pi+2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{\pi+2}\int\limits_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \\
&= \frac{2}{\pi+2}\int\limits_0^1 \left(-2y^2 + 2y\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{\pi+2}\left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3(\pi+2)}
\end{aligned}
$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{4}{\pi+2}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{\pi+2}\int\limits_0^1 y\,[x]_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{4}{\pi+2}\int\limits_0^1 \left(y\sqrt{1-y^2} - y^2 + y\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{4}{\pi+2}\left(\int\limits_0^1 y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y + \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1\right) =
\end{aligned}
$$

Použijeme substituci:

$$1 - y^2 = t$$

$$y\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

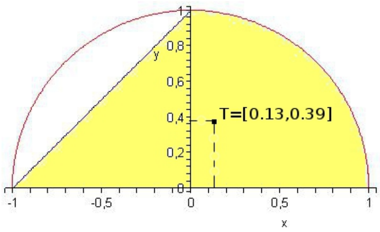
Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$y = 0 \rightarrow t = 1$$

$$y = 1 \rightarrow t = 0$$

$$= \frac{4}{\pi+2}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}\sqrt{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{\pi+2}\left(\left[-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{1}^{0}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{\pi+2}$$

Těžištěm obrazce A je bod $T = \left[\frac{2}{3(\pi+2)}, \frac{2}{\pi+2}\right]$.



Obrázek 4.12: Zobrazení těžiště

4.2 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do polárních souřadnic

***Návod* 4.2** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Pak souřadnice těžiště rovinného obrazce Ω, je-li navíc $\sigma(x, y)$ jeho hustota a m hmotnost, jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r^2 \cos\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ y_T &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

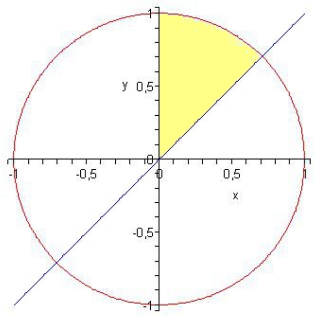
Příklad 4.7 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in E_2; \quad 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = x$.

Řešení

Obrazcem je část kružnice ležící v prvním kvadrantu a vyťatá přímkou $y = x$, tedy jedna osmina kružnice, viz obrázek 4.13.



Obrázek 4.13: $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$

Pro tento příklad je výhodnější použít transformaci do polárních souřadnic:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{a jakobián této transformace je } J = r.$$

Po dosazení do nerovnice $x^2 + y^2 \leq 1$ získáme horní mez proměnné r, tedy $r \leq 1$, dolní mezí je $r = 0$. Meze proměnné y zase z nerovnice $0 \leq x \leq y$:

$$0 \leq \cos \varphi \leq \sin \varphi$$
$$\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

Integrační funkcí je funkční předpis hustoty. S použitím transformace je hustota rovna $\sigma(r, \varphi) = r \cos \varphi$.

Výpočet hustoty jedné osminy kružnice:

$$m = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^2 \cos \varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \left[\sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$$

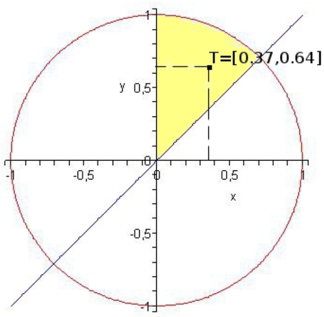
Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{6}{2-\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} r^3 \cos^2 \varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cos^2 \varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{6}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2\left(2-\sqrt{2}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{3}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3(\pi-2)}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}
\end{aligned}$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
y_T &= \frac{6}{2-\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{6}{2-\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \frac{\sin 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4\left(2-\sqrt{2}\right)} \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}
\end{aligned}$$

Těžištěm obrazce je bod $T = \left[\frac{3(\pi-2)}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}, \frac{3}{8\left(2-\sqrt{2}\right)} \right]$.



Obrázek 4.14: Zobrazení těžiště

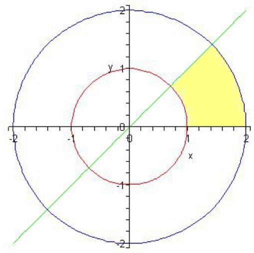
Příklad 4.8 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in E_2; \quad 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = xy$.

Řešení

Rozdílem dvou soustředných kružnic o nestejném poloměru vznikne mezikruží, které vytíná přímka $y = x$, obrazce je jedna osmina mezikruží, viz obrázek 4.15.



Obrázek 4.15: $x^2 + y^2 = 1$,$x^2 + y^2 = 4$, $y = x$

Opět zavedeme transformaci do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{a jakobián této transformace je } J = r.$$

Z nerovnice $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ získáme meze pro proměnnou r:

$$\begin{aligned} 1 \leq r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi &\leq 4 \\ 1 \leq r^2 &\leq 4 \\ 1 \leq r &\leq 2 \end{aligned}$$

A z nerovnice $0 \leq y \leq x$ získáme meze pro proměnnou φ:

$$\begin{aligned} 0 \leq r\sin\varphi &\leq r\cos\varphi \\ 0 \leq \sin\varphi &\leq \cos\varphi \\ \varphi \in \left\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle & \end{aligned}$$

Funkční předpis hustoty je nyní $\sigma(r,\varphi) = r^2 \cos\varphi \sin\varphi$.

Výpočet hmotnosti osminy mezikruží :

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$\sin\varphi = t \qquad (4.1)$$

$$\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$\varphi = 0 \rightarrow t = 0$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \mathrm{d}t = \frac{15}{4} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{15}{16}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{16}{15} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{16}{15} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^2 \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{496}{75} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$\cos\varphi = t$$

$$-\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

$$\varphi = 0 \rightarrow t = 1$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{496}{75} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 \mathrm{d}t = -\frac{496}{75} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{124\left(4-\sqrt{2}\right)}{225}$$

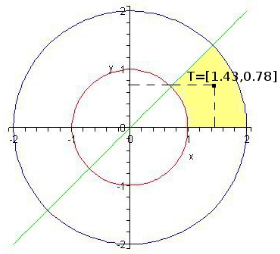
Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{16}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_1^2 r^4\cos\varphi\sin^2\varphi \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{16}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{496}{75}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Použijeme stejnou substituci (4.1) jako při výpočtu hmotnosti:

$$= \frac{496}{75}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\mathrm{d}t = \frac{496}{75}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{124\sqrt{2}}{225}$$

Těžištěm jedné osminy mezikruží je bod $T = \left[\frac{124\left(4-\sqrt{2}\right)}{225}, \frac{124\sqrt{2}}{225}\right]$.



Obrázek 4.16: Zobrazení těžiště

4.3 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

***Návod* 4.3** *Ω je omezená a uzavřená oblast v rovině xy. Zobecněné polární souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{array}\right\} \text{(a, b jsou konstanty)},$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle . \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Pak souřadnice těžiště rovinného obrazce Ω, je-li navíc $\sigma(x, y)$ jeho hustota a m hmotnost, jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Psi} \sigma(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)a^2br^2\cos\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ y_T &= \frac{1}{m}\iint\limits_{\Psi} \sigma(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)ab^2r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

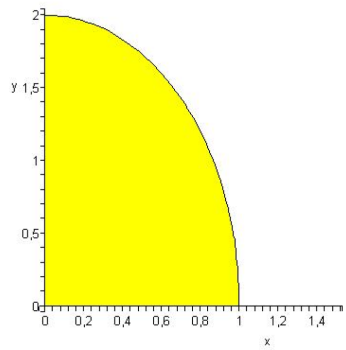
Příklad 4.9 ([4]) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in E_2; x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 + y^2 \leq 4\},$$

je-li jeho plošná hustota $\sigma(x, y) = x$.

Řešení

Obrazcem je jedna čtvrtina elipsy ležící v prvním kvadrantu, viz obrázek 4.17.



Obrázek 4.17: $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 4$

Tentokrát si zavedeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = 2r\sin\varphi \quad \text{a jakobián této transformace je } J = 2r.$$

Nerovnice $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ určuje meze proměnné r:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\varphi + \frac{4r^2\sin^2\varphi}{4} &\leq 1 \\ r^2 &\leq 1 \\ r &\leq 1 \end{aligned}$$

A z nerovnic $x \geq 0$ a $y \geq 0$ získáme meze proměnné φ:

$$\begin{aligned} r\cos\varphi \geq 0 \qquad &\wedge \qquad r\sin\varphi \geq 0 \\ \cos\varphi \geq 0 \qquad &\wedge \qquad \sin\varphi \geq 0 \\ \varphi \in \left\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle & \end{aligned}$$

Nový funkční předpis hustoty je $\sigma(r,\varphi) = r\cos\varphi$.

Výpočet hmotnosti čtvrtiny elipsy:

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 2r^2 \cos\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

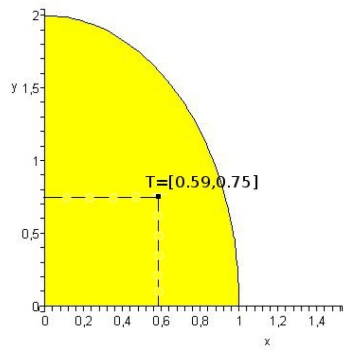
Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 2r^3 \cos^2\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 4r^3 \cos\varphi\sin\varphi \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3}{4}\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Těžištěm obrazce A je bod $T = \left[\frac{3\pi}{16}, \frac{3}{4}\right]$.

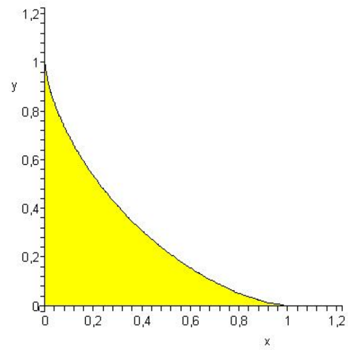


Obrázek 4.18: Zobrazení těžiště

Příklad 4.10 ([1]) Najděte souřadnice těžiště homogenní destičky, která je vymezena křivkami $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $y \geq 0$ a $x \geq 0$.

Řešení

Destička je ohraničena křivkou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ a osami souřadnicovými. Její hustota je zadaná funkcí $\sigma(x, y) = 1$, viz obrázek 4.19.



Obrázek 4.19: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $y = 0$, $x = 0$

Pro výpočet tohoto příkladu je mnohem výhodnější zavést transformaci do zobecněných polárních souřadnic:

$$x = r\cos^3\varphi, \quad y = r\sin^3\varphi.$$

Vypočítáme jakobián této transformace

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & -3\cos\varphi\sin^3\varphi \end{vmatrix} = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \frac{3}{4}r\sin^2 2\varphi$$

Pohybujeme se po celém prvním kvadrantu, proto $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. A po dosazení nových proměnných do rovnice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ dostaneme $r \in \langle 0, 1\rangle$.

Výpočet hmotnosti destičky:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{3}{4}r\sin^2 2\varphi \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \sin^2 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{16}\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{32}{3\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^1 \frac{3}{4}r^2\sin^2 2\varphi\cos^3\varphi \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cos^5\varphi\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{32}{3\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)^2\sin^2\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi =
\end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$\sin\varphi = t$

$\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy

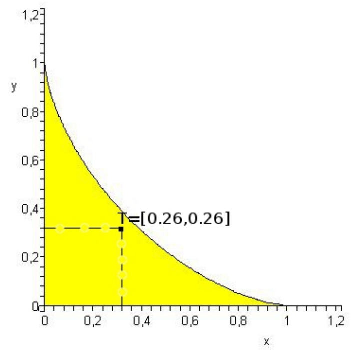
$\varphi = 0 \rightarrow t = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$

$$= \frac{32}{3\pi}\int_0^1\left(1-t^2\right)t^2\mathrm{d}t = \frac{32}{3\pi}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{256}{315\pi}$$

Y-ovou souřadnici počítat nemusíme, protože obrazec je symetrický, tudíž souřadnice se rovnají.

Těžištěm destičky je bod $T = \left[\frac{256}{315\pi}, \frac{256}{315\pi}\right]$.



Obrázek 4.20: Zobrazení těžiště

Kapitola 5

Trojný integrál - výpočet objemu

5.1 Výpočet objemu bez užití transformace

***Návod* 5.1** *Objem omezené a uzavřené množiny Ω, ležící v prostoru xyz, je dán vzorcem*

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\textit{např. } \Omega = \{[x, y, z]; x \in \langle a, b\rangle, y \in \langle g(x), h(x)\rangle, z \in \langle k(x, y), l(x, y)\rangle\},$$

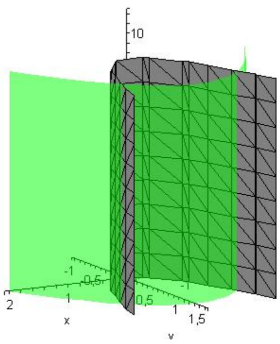
potom

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(\int\limits_{k(x,y)}^{l(x,y)} 1 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Příklad 5.1 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $0 \leq z \leq 9$, $y \geq x^2$ a $x^2 \leq 4 - 3y$.

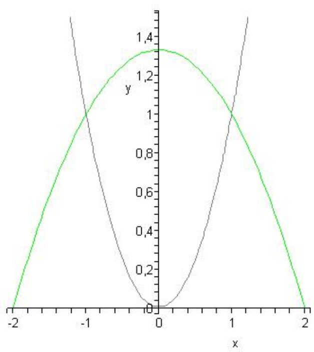
Řešení

Těleso tvoří průnik dvou parabolických ploch $y = x^2$ a $x^2 = 4 - 3y$, podstava leží v rovině $z = 0$ a shora je omezeno rovinou $z = 9$, viz obrázek 5.1.



Obrázek 5.1: $0 \leq z \leq 9$, $y \geq x^2$ a $x^2 \leq 4 - 3y$

Meze proměnných x, y určíme z podstavy tělesa, tj. položíme $z = 0$. Získáme průnik parabol $y = x^2$ a $x^2 = 4 - 3y$, přičemž x-ové souřadnice jejich průsečíků jsou meze proměnné x, tedy $x = -1$ a $x = 1$. Těleso je symetrické, stačí tedy vypočítat pouze polovinu objemu a ten pak zdvojnásobit. Omezíme se proto na oblast $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro proměnnou y získáme proměnné meze $y = x^2$, což je dolní mez, a horní mez je $y = \frac{4-x^2}{3}$. Situaci můžeme sledovat na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: $y \geq x^2$ a $x^2 \leq 4 - 3y$

Podle proměnné z integrujeme mezi rovinami $z = 0$ a $z = 9$.

Výpočet objemu jedné poloviny tělesa:

$$\frac{1}{2} \cdot V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\frac{4-x^2}{3}} \left(\int_0^9 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 9 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\frac{4-x^2}{3}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 9 \int_0^1 \left(\frac{4-x^2}{3} - x^2 \right) \mathrm{d}x =$$

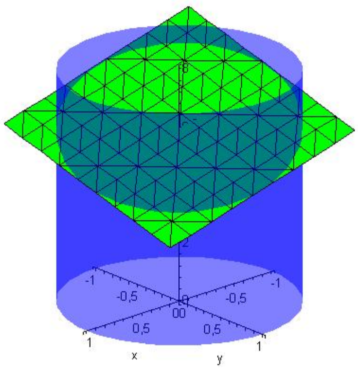
$$= 3 \int_0^1 \left(4 - 4x^2 \right) \mathrm{d}x = 12 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 8$$

Objem tělesa je $V = 2 \cdot 8 = 16\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.2 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y + z \leq 6$ a $z \geq 0$.

Řešení

Hledáme objem válce s podstavou v rovině $z = 0$ a shora omezený rovinou $x + y + z = 6$, viz obrázek 5.3.

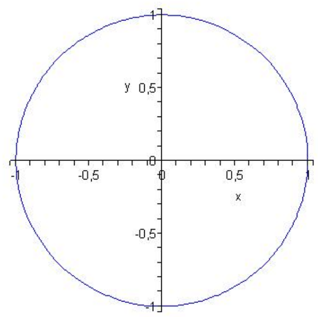


Obrázek 5.3: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y + z \leq 6$, $z \geq 0$

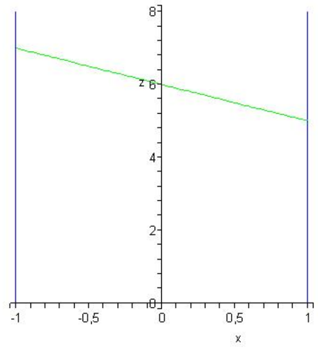
Kolmým průmětem válce do roviny $z = 0$ je kružnice se středem v počátku souřadnicového systému a poloměrem 1j, viz obrázek 5.4. Meze pro proměnné x a y získáme z rovnice kružnice $x^2+y^2 = 1$, takže $-1 \leq x \leq 1$ a $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

Těleso je zdola omezeno rovinou z a shora rovinou $x + y + z = 6$, jak je patrné z obrázku 5.5. Takže platí $0 \leq z \leq 6 - x - y$.

Výpočet objemu tělesa:



Obrázek 5.4: $x^2 + y^2 = 1$



Obrázek 5.5: $x^2 + y^2 = 1$

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int\limits_{0}^{6-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (6-x-y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left[6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \left(12\sqrt{1-x^2} \right) \mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =
\end{aligned}
$$

Pro druhý integrál použijeme substituci:

$1 - x^2 = t$

$-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$x = -1 \rightarrow t = 0$

$x = 1 \rightarrow t = 0$

Po určení nových mezí je patrné, že daný integrál je roven 0 a můžeme vyřešit pouze první integrál:

$$= \quad 12\left[\frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_{-1}^{1} = 6\pi$$

Objem tělesa je $V = 6\pi\text{j}^2$.

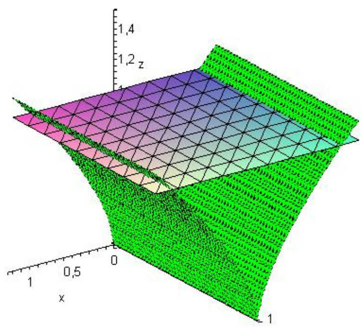
Poznámka: Mnohem výhodnější je použít transformaci do cylindrických souřadnic. Takto je vyřešen příklad 5.6.

Poznámka: V příkladě řešíme integraci funkce $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Postup řešení neurčitého integrálu tohoto typu je ukázán v poznámce na straně 11.

Příklad 5.3 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $z \leq 1$, $z \geq \sqrt[3]{x^2}$ a $0 \leq y \leq 1$.

Řešení

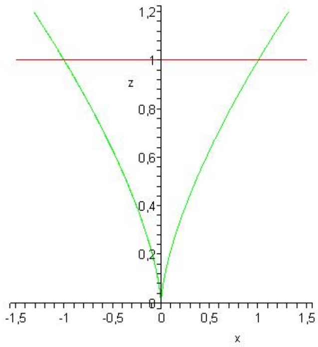
Těleso ohraničuje plocha $z \geq \sqrt[3]{x^2}$ a shora je omezeno rovinou $z = 1$, viz obrázek 5.6.



Obrázek 5.6: $z \leq 1$, $z \geq \sqrt[3]{x^2}$, $0 \leq y \leq 1$

Zadání příkladu nám jasně udává meze pro proměnné y a z, tedy $0 \leq y \leq 1$ a $\sqrt[3]{x^2} \leq z \leq 1$. Řezem tělesa rovinou $y = 0$ získáme meze proměnné x, jsou to x-ové průsečíky přímky $z = 1$ a křivky $z = \sqrt[3]{x^2}$. Řešíme rovnici $\sqrt[3]{x^2} = 1$, odtud dostáváme $x = -1$ a $x = 1$.

Jak je patrné na obrázku 5.7, těleso je symetrické dle osy z. Stačí nám tedy počítat



Obrázek 5.7: $z = 1$, $z = \sqrt[3]{x^2}$, $0 \leq y \leq 1$

pouze objem poloviny tělesa a ten pak zdvojnásobit. Takže pro proměnnou x platí $0 \leq x \leq 1$.

Výpočet objemu jedné poloviny tělesa:

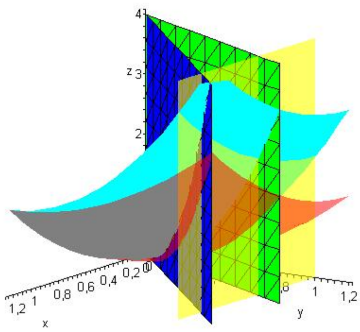
$$\frac{1}{2} \cdot V = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{x^2}}^1 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

Objem tělesa je $V = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.4 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $z \geq x^2 + y^2$, $z \leq x^2 + 2y^2$, $y \geq x$, $y \geq 2x$, $y \leq 1$.

Řešení

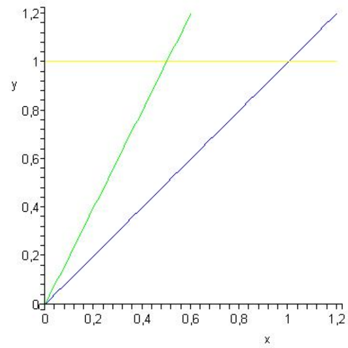
Těleso je ohraničeno dvěma paraboloidy a třemi rovinami, viz obrázek 5.8.



Obrázek 5.8: $z \geq x^2 + y^2$, $z \leq x^2 + 2y^2$, $y \geq x$, $y \geq 2x$, $y \leq 1$

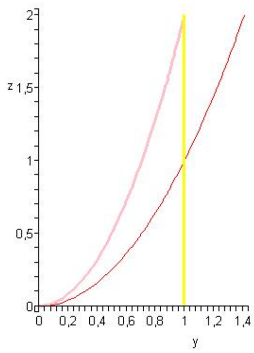
Řezem tělesa rovinou $z = 0$ získáme integrační oblast pro proměnné x a y. Z obrázku 5.9 je patrné, že kolmým průmětem tělesa do roviny $z = 0$ je trojúhelník, který tvoří přímky $y = x$, $y = 2x$ a $y = 1$. Výhodnější v této situaci je zvolit za konstantní meze meze proměnné y, tj. $y = 0$ a $y = 1$. Pak meze pro proměnnou x jsou $x = \frac{y}{2}$ a $x = y$.

Těleso je zdola omezené paraboloidem $z = x^2+y^2$ a shora paraboloidem $z = x^2+2y^2$.



Obrázek 5.9: $y = x$, $y = 2x$, $y = 1$

Můžeme se o tom přesvědčit řezem tělesa rovinou $x = 0$, viz obrázek 5.10. Takže platí $x^2 + y^2 \leq z \leq x^2 + 2y^2$.



Obrázek 5.10: $z = y^2$, $z = 2y^2$, $y = 0$, $y = 1$

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} \left(\int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \left(y - \frac{y}{2} \right) \mathrm{d}y =$$

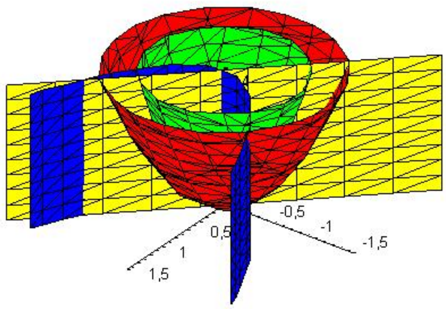
$$= \left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Objem tělesa je $V = \frac{1}{8}$j^3.

Příklad 5.5 ([1]) Vypočtěte objem tělesa, které je vymezeno plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x^2$ a $y = x$.

Řešení

Těleso ohraničují dva paraboloidy $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, parabolická plocha $y = x^2$ a rovina $y = x$, viz obrázek 5.11.



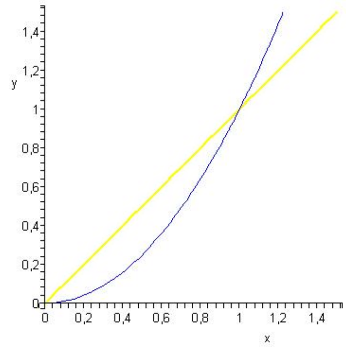
Obrázek 5.11: $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x^2$ a $y = x$

Meze pro proměnné x a y určíme z rovnice parabolické plochy $y = x^2$ a roviny $y = x$. Situaci můžeme sledovat na obrázku 5.12, což je řez tělesa rovinou $z = 0$. X-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou jsou meze proměnné x, tj. $0 \leq x \leq 1$. Pak meze proměnné y jsou samotné rovnice paraboly a přímky a platí $x^2 \leq y \leq x$.

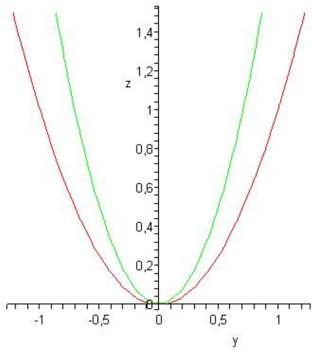
Z obrázku 5.13 je patrné, že podle proměnné z integrujeme od paraboloidu $z = x^2 + y^2$ do paraboloidu $z = 2x^2 + 2y^2$.

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{x} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x =$$



Obrázek 5.12: $y = x^2$ a $y = x$



Obrázek 5.13: $z = y^2$, $z = 2y^2$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 = \frac{3}{35}$$

Objem tělesa je $V = \frac{3}{35}$j^3.

5.2 Výpočet objemu pomocí transformace do cylindrických souřadnic

***Návod* 5.2** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Cylindrické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0,2\pi\rangle \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(r,\varphi,z) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y,z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Pak objem tělesa Ω je dán vzorcem

$$V = \iiint\limits_{\Psi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

Příklad 5.6 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y + z \leq 6$ a $z \geq 0$.

Řešení

Tento příklad jsme již řešili v předchozí podkapitole Výpočet objemu bez užití transformace, viz příklad 5.2. Nyní si jej ale vypočítáme pomocí transformace do cylindrických souřadnic. Zavedeme nové proměnné:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Integračním oborem pro proměnné r a φ je kružnice s poloměrem 1j a středem v počátku, viz obrázek 5.4. Takže platí $0 \leq r \leq 1$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Těleso je zdola omezeno rovinou $z = 0$, což je dolní mez proměnné z. Ke zjištění horní meze této proměnné musíme dosadit do rovnice roviny $z = 6 - x - y$ za souřadnice x, y a z cylindrické souřadnice:

$$z = 6 - r\cos\varphi - r\sin\varphi.$$

Výpočet objemu tělesa:

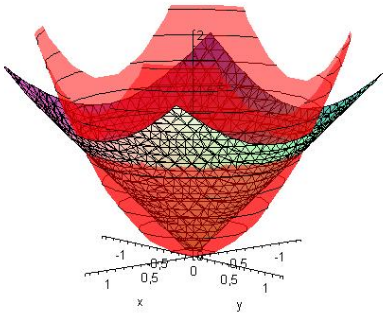
$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{6-r\cos\varphi-r\sin\varphi} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(6r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\left[3r^2 - \frac{r^3\cos}{3} - \frac{r^3\sin\varphi}{3}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(3 - \frac{\cos\varphi}{3} - \frac{\sin\varphi}{3}\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left[3\varphi - \frac{\sin\varphi}{3} + \frac{\cos\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = 6\pi
\end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = 6\pi\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.7 ([10]) Vypočtěte objem tělesa, které je vymezeno plochami $z = x^2 + y^2$ a $z^2 = x^2 + y^2$.

Řešení

Hledáme objem průniku paraboloidu $z = x^2 + y^2$ a kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, viz obrázek 5.14.



Obrázek 5.14: $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

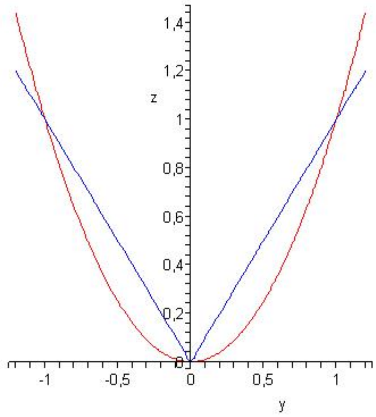
a jakobián této transformace je $J = r$.

Pro zjištění mezí proměnné r si vyjádříme proměnnou z, získáme tak roviny průniku kuželové plochy a paraboloidu:

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 = z \\ z^2 &= z \\ z(z-1) &= 0 \\ z = 0 \quad &\wedge \quad z = 1 \end{aligned}$$

Dosadíme obě z do zadaných rovnic a odtud získáme $0 \leq r \leq 1$. Pro proměnnou φ nemáme žádnou podmínku, takže $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Je to jasné i z obrázku 5.14.

Integrace podle proměnné z probíhá od paraboloidu ke kuželové ploše, viz obrázek 5.15. Po dosazení cylindrických souřadnic tak získáme $r^2 \leq z \leq r$.



Obrázek 5.15: $z = y^2$, $z^2 = y^2$

Výpočet objemu tělesa:

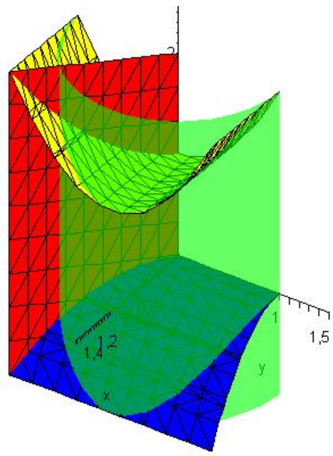
$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{r^2}^{r} r \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \left(r^2 - r^3 \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{12} \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{1}{12}\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = \frac{\pi}{6}\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.8 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $z \leq y^2+1$, $z \geq -x^2$, $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq -x$ a $x \geq 0$.

Řešení

Těleso je část válce ohraničená shora i zdola parabolickými plochami, viz obrázek 5.16.



Obrázek 5.16: $z \leq y^2+1$, $z \geq -x^2$, $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq -x$, $x \geq 0$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Meze pro proměnné r a φ vyjádříme z nerovnic $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq -x$, $x \geq 0$. Hledaná oblast je vlastně část kružnice s poloměrem 1 a středem v počátku, která leží v prvním a čtvrtém kvadrantu, přičemž ve čtvrtém kvadrantu je navíc vyťatá osou tohoto kvadrantu, tedy přímkou $y = -x$, viz obrázek 5.17.

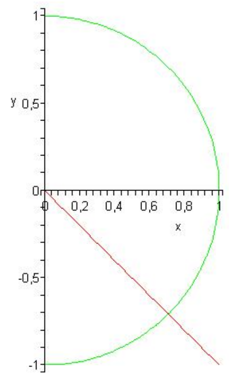
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 1 \\ r^2 &\leq 1 \\ r &\in \langle 0,1\rangle . \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme meze pro proměnnou φ

$$y \geq -x \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} r\sin\varphi \geq -r\cos\varphi \quad &\wedge \quad r\cos\varphi \geq 0 \\ \tan\varphi \geq -1 \quad &\wedge \quad \cos\varphi \geq 0 \\ \varphi \quad &\in \quad \left\langle -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle. \end{aligned}$$

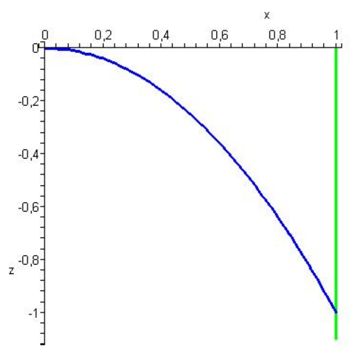
Integrace dle proměnné z probíhá od parabolické plochy $z \geq -x^2$, jejíž osa je



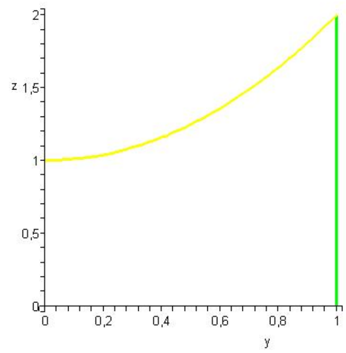
Obrázek 5.17: $x^2 + y^2 = 1$, $y = -x$, $x = 0$

totožná s osou y. Situaci si můžeme zobrazit řezem tělesa rovinou $y = 0$, viz obrázek 5.18. Horní mez proměnné z tedy určuje parabolická plocha $z \geq y^2 + 1$, která má svou osu rovnoběžnou s osou x. Opět si tuto situaci můžeme zobrazit pomocí řezu tělesa, tentokrát rovinou $x = 0$, viz obrázek 5.19. Po dosazení cylindrických souřadnic získáváme $-r^2\cos^2\varphi \leq z \leq r^2\sin^2\varphi + 1$.

Výpočet objemu tělesa:



Obrázek 5.18: $z = 1$, $z = -x^2$, $x = 1$, $x = 0$



Obrázek 5.19: $z = y^2 + 1$, $z = 0$, $y = 1$

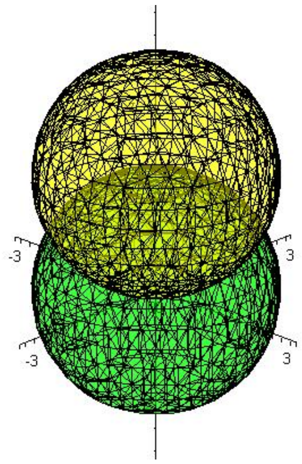
$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{-r^2\cos^2\varphi}^{r^2\sin^2\varphi+1} r\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} \left(r^3\sin^2\varphi + r + r^3\cos^2\varphi \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4} \left[\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{16} \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = \frac{9\pi}{16}\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.9 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ a $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$.

Řešení

Těleso tvoří průnik dvou koulí o stejném poloměru, ale s odlišnou polohou středů ležících na ose z, viz obrázek 5.20.



Obrázek 5.20: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

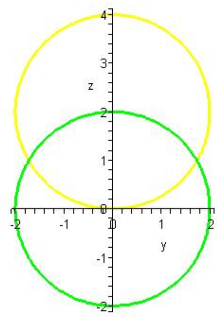
a jakobián této transformace je $J = r$.

Pro získání mezí proměnné r si z druhé rovnice vyjádříme z a dosadíme do první rovnice. Dostáváme tedy:

$$|z - 2| = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

pohybujeme-li se ve spodní polokouli (viz obrázek 5.21), pak

$$\begin{aligned} -z + 2 &= \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z &= 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$



Obrázek 5.21: $y^2 + z^2 \leq 4$, $y^2 + (z-2)^2 \leq 4$

a po dosazení cylindrických souřadnic $z = 2 - \sqrt{4 - r^2}$. Dále řešíme rovnici:

$$\begin{aligned}
r^2 + (2 - \sqrt{4 - r^2})^2 &= 4 \\
r^2 + 4 - 4\sqrt{4 - r^2} + 4 - r^2 &= 4 \\
4 - 4\sqrt{4 - r^2} &= 0 \\
\sqrt{4 - r^2} &= 1 \\
|r| &= \sqrt{3} \qquad \text{(podmínka pro r je } r \leq 0) \\
r &= \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Takže pro proměnnou r platí $0 \leq r \leq \sqrt{3}$. Pro proměnnou φ jsme nedostali žádnou podmínku, tzn. $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Pro proměnnou z získáme integrační oblast vyjádřením ze zadaných nerovnic, přičemž nesmíme zapomenout, že těleso je součástí spodní části druhé koule. Potom tedy

$$2 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4 - r^2} - r \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

Pro první část integrálu použijeme substituci:

$$4 - r^2 = t$$

$$-2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$r = 0 \rightarrow t = 4$$

$$r = \sqrt{3} \rightarrow t = 1$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[-\frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_4^1 - \left[r^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{5}{3} 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

Objem tělesa je $V = \frac{10\pi}{3}\mathrm{j}^3$.

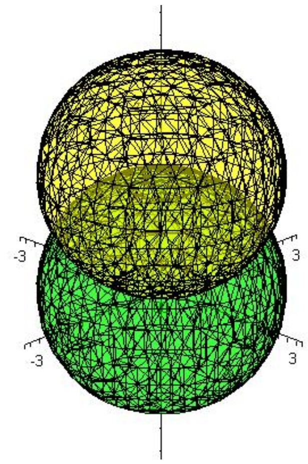
Poznámka: Tento příklad můžeme řešit i pomocí posunutí. V následujícím příkladu (5.10) je tento způsob ukázán. Také jej lez řešit pomocí transformace do sférických souřadnic, viz příklad 5.16.

Příklad 5.10 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ a $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$.

Řešení

Těleso tvoří průnik dvou koulí o stejném poloměru, ale s odlišnou polohou středů ležících na ose z, viz obrázek 5.22.

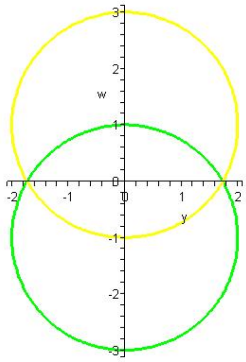
Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:



Obrázek 5.22: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = w + 1$$

a jakobián této transformace je $J = r$.



Obrázek 5.23: $y^2 + (w+1)^2 \leq 4$, $y^2 + (w-1)^2 \leq 4$

Díky úpravě z-ové souřadnice se nám obě kružnice posunuly o jeden díl směrem dolů po ose z, což nám umožňuje snadnější úvahy při řešení příkladu. Navíc uvědomíme-li si, že těleso je symetrické vzhledem k rovině $w = 0$ $(z = 1)$, stačí nám vypočítat pouze kulovou výseč, ležící nad rovinou $w = 0$, koule zadané rovnicí $x^2+y^2+z^2 = 4$. Vypočítáme tak polovinu objemu tělesa.
Po dosazení cylindrických souřadnic do nerovnice $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ získáme $r^2 + (w + 1)^2 \leq 4$. Kolmým průmětem této kulové výseče do roviny $w = 0$ získáme meze pro proměnné r a φ. Jedná se o kružnici, jejíž poloměr získáme vyřešením rovnice:

$$\begin{aligned} r^2 + (0+1)^2 &= 4 \\ &\text{a odtud} \\ r &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nedostali jsme žádné podmínky pro proměnnou φ a zároveň z obrázku 5.22 je naprosto jasné, že pro ni platí $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
Horní polovina tělesa je zdola omezena rovinou $w = 0$ a shora koulí $w = \sqrt{4-r^2} - 1$.
Výpočet objemu jedné poloviny tělesa:

$$\frac{1}{2} \cdot V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}-1} r \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4-r^2} - r \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

Pro první část integrálu použijeme substituci:

$$4 - r^2 = t$$

$$-2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$r = 0 \rightarrow t = 4$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow t = 1$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[-\frac{\sqrt{t^3}}{3} \right]_4^1 - \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{5}{6} 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Objem tělesa je $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}\mathrm{j}^3$.

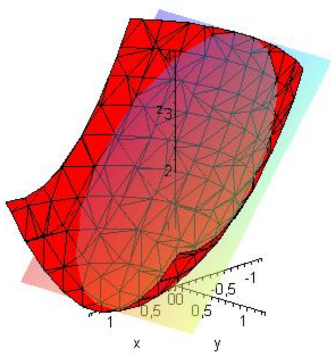
Poznámka: Tato úloha je vyřešená také v příkladech 2.11 a 5.16.

Příklad 5.11 ([10]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $z = (x-1)^2 + y^2$ a $z = 2(1-x)$.

Řešení

Těleso ohraničuje plocha $z = (x-1)^2 + y^2$ shora je omezeno rovinou $z = 2(1-x)$, viz obrázek 5.24.

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic zároveň s posunutím, jehož směr



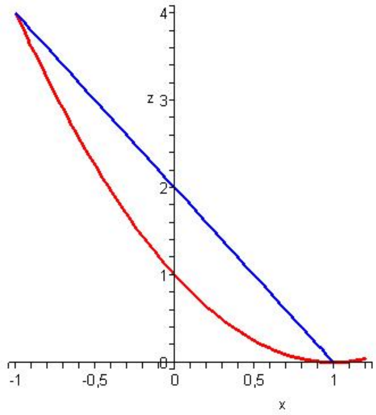
Obrázek 5.24: $z = (x-1)^2 + y^2$ a $z = 2(1-x)$

je rovnoběžný s osou x:

$$x = r\cos\varphi + 1, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Na obrázku 5.25 vidíme, že integrace podle z probíhá od kužele po rovinu, takže:



Obrázek 5.25: $z = (x-1)^2$ a $z = 2(1-x)$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq z \leq -2(x-1)$$

$$r^2 \leq z \leq -2r\cos\varphi$$

a odtud získáme meze pro proměnné r a φ

$$r^2 \leq r\cos\varphi$$

$$r \leq -2\cos\varphi$$

a zároveň pro r platí $r \geq 0$

$$0 \leq r \leq -2\cos\varphi.$$

Z toho vyplývá:

$$0 \leq -2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi \leq 0$$

$$\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle.$$

Výpočet objemu tělesa:

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{-2\cos\varphi} \left(\int_{r^2}^{-2r\cos\varphi} r\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{-2\cos\varphi} \left(-2r^2\cos\varphi - r^3 \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[-\frac{2}{3}r^3\cos\varphi - \frac{r^4}{4} \right]_0^{-2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^2 \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{3}\left[\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{6}\left[\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Objem tělesa je $V = \frac{\pi}{2}\mathrm{j}^3$.

5.3 Výpočet objemu pomocí transformace do sférických souřadnic

***Návod* 5.3** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Sférické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &= r\sin\vartheta, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ tak, že každému bodu $(r, \varphi, \vartheta) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y, z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta.$$

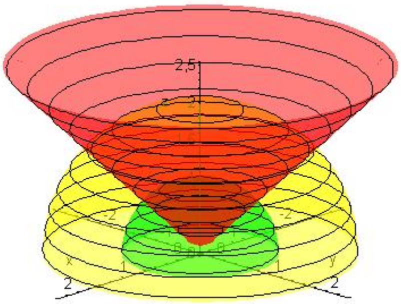
Pak objem tělesa Ω je dán vzorcem

$$V = \iiint\limits_{\Psi} r^2\cos\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta.$$

Příklad 5.12 ([1]) Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochami $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a $x^2+y^2=z^2$.

Řešení

Těleso je prostor mezi dvěmi koulemi omezený kuželem, viz obrázek 5.26.



Obrázek 5.26: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$

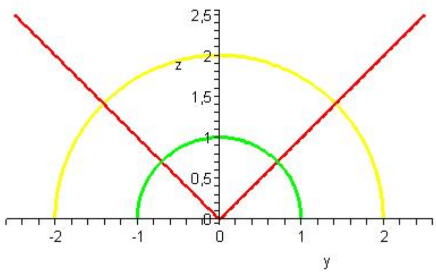
Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J=r^2\cos\vartheta$.

Integrace podle proměnné r probíhá od koule s menším poloměrem, tj. $x^2+y^2+z^2=1$ a po dosazení sférických souřadnic $r=1$, po kouli s větším poloměrem, tedy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a po dosazení nových souřadnic $r=2$. Situaci si můžeme zobrazit řezem tělesa rovinou $x=0$, viz obrázek 5.27. Z rovnice kužele získáme meze proměnné ϑ:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) &= r^2\sin^2\vartheta \\ r^2\cos^2\vartheta &= r^2\sin^2\vartheta \end{aligned}$$



Obrázek 5.27: $y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$, $y^2 = z^2$

pohybujeme se nad rovinou $z = 0$ a zároveň pro ϑ platí $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos\vartheta = \sin\vartheta$$

počítáme objem tělesa ležícího uvnitř kužele, proto

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &\leq \sin\vartheta \\ \vartheta &\in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Pro proměnnou φ žádnou podmínku nemáme a také z obrázku je jasné, že není nijak omezená, proto $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výpočet objemu tělesa:

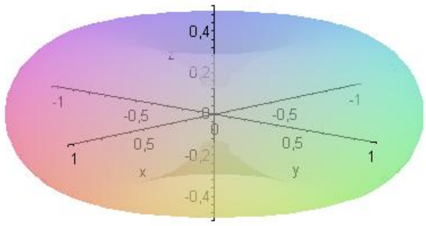
$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_1^2 r^2 \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \cos\vartheta \right]_1^2 \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{7}{3} \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{7}{3} \int\limits_0^{2\pi} [\sin\vartheta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{7\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V = \frac{7\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2} \right) \mathrm{j}^3$.

Příklad 5.13 ([2]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (x^2 + y^2)^2$.

Řešení

Těleso vznikne rotací smyčky kolem osy z, obrázek 5.28.



Obrázek 5.28: $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (x^2 + y^2)^2$

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Meze pro proměnnou φ můžeme určit hned z obrázku 5.28, zde vidíme, že těleso se rozprostírá kolem osy z a také řezem tělesa rovinou $z = 0$ je kružnice s poloměrem r. Proměnnou r si vyjádříme z rovnice plochy $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (x^2 + y^2)^2$ po dosazení sférických souřadnic:

$$r^6 = (r^2\cos^2\vartheta)^2$$

$$r = \cos^2\vartheta$$

pohybujeme se uvnitř plochy, proto

$$0 \le r \le \cos^2\vartheta.$$

Z podmínky pro proměnnou r získáváme i meze proměnné ϑ:

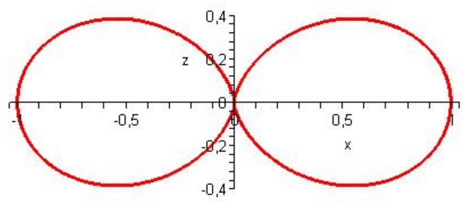
$$0 \leq \cos^2 \vartheta$$

zároveň proměnná ϑ je definovaná na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, takže dostáváme

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Situaci můžeme sledovat na obrázku 5.29, jedná se o řez tělesa rovinou $y = 0$.

Výpočet objemu tělesa:



Obrázek 5.29: $(x^2 + z^2)^3 = x^4$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos^2 \vartheta} r^2 \cos \vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \cos \vartheta \right]_0^{\cos^2 \vartheta} \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 \vartheta\right)^3 \cos \vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Pro integrál použijeme substituci:

$\sin \vartheta = t$

$\cos \vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$\vartheta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow t = -1$

$\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^3 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi =$$

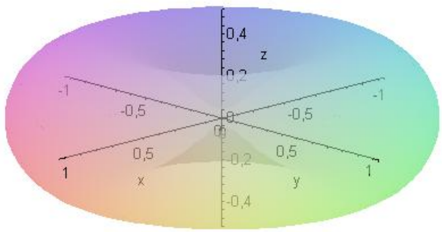
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[t-t^3+\frac{3t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{105}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{64\pi}{105}$$

Objem tělesa je $V = \frac{64\pi}{105}\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.14 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2$.

Řešení

Těleso vznikne rotací smyčky kolem osy z, obrázek 5.30.



Obrázek 5.30: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Řezem tělesa rovinou $z = 0$ získáme kružnici s poloměrem r, odtud tedy můžeme hned určit meze proměnné φ, tj. $0 \le \varphi \le 2\pi$. Proměnnou r si vyjádříme z rovnice plochy $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2-z^2$ po dosazení sférických souřadnic:

$$r^4 = r^2\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)$$
$$r^2 = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta$$
$$r = \sqrt{\cos 2\vartheta}$$

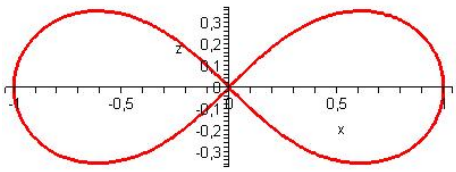
pohybujeme se uvnitř plochy, proto

$$0 \le r \le \sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Z podmínky pro proměnnou r získáváme i meze proměnné ϑ:

$$\begin{aligned} 0 &\le \sqrt{\cos 2\vartheta} \\ 0 &\le \cos 2\vartheta \\ 2\vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi \right\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi \right\rangle. \end{aligned}$$

Smyčku si můžeme zobrazit pomocí řezu tělesa rovinou $y = 0$, viz obrázek 5.31.



Obrázek 5.31: $(x^2+z^2)^2 = x^2 - z^2$

Výpočet objemu tělesa:

$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\vartheta}} r^2\cos\vartheta \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}\cos\vartheta\right]_0^{\sqrt{\cos 2\vartheta}}\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\vartheta}\cos 2\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta}\left(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\right)\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\vartheta}\left(1-2\sin^2\vartheta\right)\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

Pro integrál použijeme substituci:

$$\sin\vartheta = t$$

$$\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\vartheta = -\frac{\pi}{4} \to t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} \to t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-2t^2}\left(1-2t^2\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2\left(\frac{1}{2}-t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2t^2\sqrt{2\left(\frac{1}{2}-t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi -$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}+\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{2}t\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}\varphi -$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{32}\arcsin\sqrt{2}t+\frac{t}{8}\left(2t^2-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{4}2\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{32}2\pi = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8}$$

Objem tělesa je $V = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8}\mathrm{j}^3$.

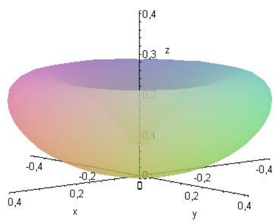
Poznámka: V příkladě řešíme integrace funkce $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ a funkce $g(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$. Postup řešení integrace funkce $f(x)$ je ukázán v poznámce na straně 11. Řešení integrace funkce $g(x)$ si ukážeme zde:

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x &= \\
& \text{Použijeme substituci:} \\
& \qquad x = a\sin t \\
& \qquad t = \arcsin\frac{x}{a} \\
& \qquad dx = a\cos t\mathrm{d}t \\
&= \int a^3\sin^2 t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = \int a^4\sin^2 t\cos^2 t = \\
&= \int \frac{a^4}{4}\sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{2}\int\frac{1}{2}\left(1 - \cos 4t\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{a^4}{8}\int 1\mathrm{d}t - \frac{a^4}{8}\int\cos 4t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}t - \frac{a^4}{8}\cdot\frac{\sin 4t}{4} = \\
&= \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{8}\left(2x^2 - a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} + C
\end{aligned}
$$

Příklad 5.15 ([2]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z\,(x^2 + y^2)$.

Řešení

Těleso zobrazuje obrázek 5.32.



Obrázek 5.32: $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = z\left(x^2 + y^2\right)$

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Proměnnou r si vyjádříme z rovnice plochy $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = z\left(x^2+y^2\right)$ po dosazení sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} r^4 &= r^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta \\ r &= \cos^2\vartheta\sin\vartheta \end{aligned}$$

$$\text{a zároveň platí } r \geq 0$$

$$0 \leq r \leq \cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

Z podmínky pro proměnnou r získáváme i meze proměnné ϑ:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2\vartheta\sin\vartheta \\ 0 &\leq \sin\vartheta \end{aligned}$$

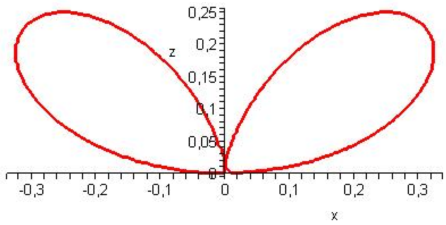
navíc pro proměnnou ϑ platí $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\vartheta \in \left\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle.$$

Situaci zobrazíme řezem tělesa rovinou $y = 0$, viz obrázek 5.33. Zároveň pro proměnnou φ jsme nedostali žádné omezující podmínky, takže $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Výpočet objemu tělesa:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos^2\vartheta\sin\vartheta} r^2\cos\vartheta \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\cos\vartheta\right]_0^{\cos^2\vartheta\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\vartheta\sin^3\vartheta\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\vartheta\left(1-\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$



Obrázek 5.33: $\left(x^2+z^2\right)^2 = x^2 - z^2$

Použijeme substituci:

$$\cos\vartheta = t$$

$$-\sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\vartheta = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0$$

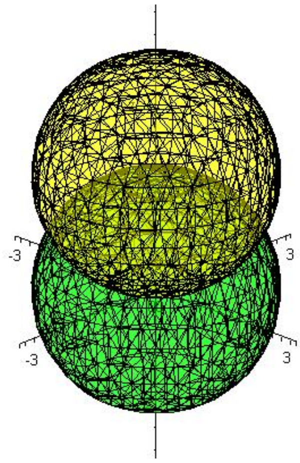
$$= \quad -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_1^0 t^7\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} -\frac{1}{40}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{60}$$

Objem tělesa je $V = \frac{\pi}{60}\mathrm{j}^3$.

Příklad 5.16 ([4]) Vypočtěte objem tělesa určeného nerovnicemi
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ a $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$.

Řešení

Těleso tvoří průnik dvou koulí o stejném poloměru, ale s odlišnou polohou středů ležících na ose z, viz obrázek 5.34. Pokud si uvědomíme jeho symetričnost podle roviny $z = 1$, můžeme objem vypočítat pomocí transformace do sférických souřadnic. Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:



Obrázek 5.34: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\cos\vartheta,\\
y &= r\sin\varphi\cos\vartheta,\\
z &= r\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.
Vypočítáme si pouze objem poloviny tělesa, která leží nad rovinou $z = 1$. Znamená to tedy, že počítáme objem kulové výseče. Podstavu tohoto tělesa tvoří kružnice o poloměru r. Proto pro proměnnou φ platí $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Integrace podle proměnné r probíhá od roviny $z = 1$ po kouli zadanou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Po dosazení sférických souřadnic vyjádříme dolní mez z rovnice

$$
\begin{aligned}
r\sin\vartheta &= 1\\
r &= \frac{1}{\sin\vartheta} \qquad \text{přičemž musí platit, že } \vartheta \neq 0 + k\pi
\end{aligned}
$$

Horní mez určuje rovnice koule:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4 \\ r &= 2. \end{aligned}$$

Z podmínky pro proměnnou r získáváme i meze proměnné ϑ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\vartheta} &\le 2 \\ \sin\vartheta &\ge \frac{1}{2} \end{aligned}$$

navíc pro proměnnou ϑ platí $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$$\vartheta \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle.$$

Výpočet objemu tělesa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot V &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{\sin\vartheta}}^{2} r^2\cos\vartheta \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\cos\vartheta\right]_{\frac{1}{\sin\vartheta}}^{2}\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8\cos\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Pro druhou část integrálu použijeme substituci:

$$\sin\vartheta = t$$

$$\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\vartheta = \frac{\pi}{6} \to t = \frac{1}{2}$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \to t = 1$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[8\sin\vartheta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3} - \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{3}$$

Objem tělesa je $V = 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3}j^3$.

Poznámka: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladech 2.11 a 5.10.

5.4 Výpočet objemu pomocí substituce

***Návod* 5.4** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Zobecněná transformace je dána předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= g(u,v,w) \\ y &= h(u,v,w) \\ z &= j(u,v,w), \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(u,v,w) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y,z) \in \Omega$, přičemž funkce g, h, j a jejich parciální derivace jsou v Ψ spojité.

Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \\ \frac{\partial j}{\partial u} & \frac{\partial j}{\partial v} & \frac{\partial j}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak objem tělesa Ω je dán vzorcem

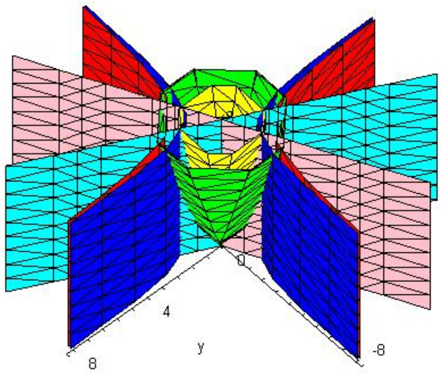
$$V = \iiint\limits_{\Psi} |J| \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w,$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota Jakobia determinantu (tzv. Jakobian).

Příklad 5.17 ([3]) Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2\,(x^2 + y^2)$, $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$ a $y = 2x$.

Řešení

Těleso je ohraničeno šesti plochami a při vykreslení je situace velmi nepřehledná, viz obrázek 5.35. Zvolením vhodné substituce si situaci pro výpočet vytvoříme mnohem přehlednější.



Obrázek 5.35: $z = x^2 + y^2$, $z = 2\,(x^2 + y^2)$, $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$

Zavedeme substituci:

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \\ w &= z. \end{aligned}$$

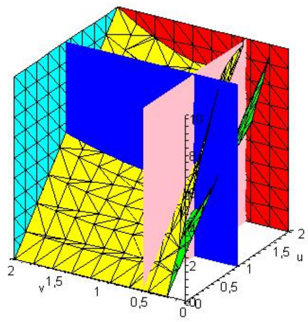
Abychom vypočítali jakobián této substituce, musíme si vyjádřit proměnné x, y a z:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= \sqrt{uv} \\ z &= w \end{aligned}$$

Výpočet jakobiánu:

$$\mathbf{J}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \qquad \neq 0.$$

Parciální derivace funkcí jsou spojité a jakobián je nenulový.



Obrázek 5.36: $w=\frac{u+uv^2}{v}$, $z=2\frac{u+uv^2}{v}$, $u=1$, $u=2$, $v=\frac{1}{2}$, $v=2$

Po dosazení substituce do původních rovnic získáme intervaly pro nové proměnné (situaci můžeme sledovat na obrázku 5.36):

$$\begin{aligned} u &\in \langle 1,2\rangle \\ v &\in \left\langle \frac{1}{2},2\right\rangle \\ w &\in \left\langle \frac{u+uv^2}{v}, 2\frac{u+uv^2}{v}\right\rangle \end{aligned}$$

Výpočet objemu tělesa:

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\left(\int\limits_{\frac{u+uv^2}{v}}^{2\frac{u+uv^2}{v}}\frac{1}{2v}\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{u+uv^2}{2v^2}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u= \\ &= \int\limits_1^2\left[-\frac{u}{2v}+\frac{uv}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}u=\int\limits_1^2\left(2u-\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u=\left[u^2-\frac{u^2}{4}\right]_1^2=\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Objem tělesa je $V=\frac{9}{4}\mathrm{j}^3$.

Kapitola 6

Trojný integrál - výpočet hmotnosti

6.1 Výpočet hmotnosti bez užití transformace

***Návod* 6.1** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Jestliže Ω má hustotu $\sigma(x,y,z)$ v bodě $[x,y,z]$, pak je hmotnost tělesa Ω dána vzorcem*

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

$$\text{např. } \Omega = \{[x,y,z]; x \in \langle a,b\rangle, y \in \langle g(x),h(x)\rangle, z \in \langle k(x,y),l(x,y)\rangle\},$$

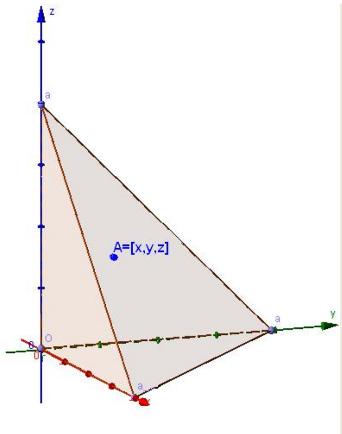
potom

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(\int\limits_{k(x,y)}^{l(x,y)} \sigma(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Příklad 6.1 ([2]) Určete hmotnost jehlanu ohraničeného rovinami $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, je-li hustota v libovolném bodu tělesa přímo úměrná první souřadnici tohoto bodu.

Řešení

Jehlan je umístěn v počátku souřadnicového systému, viz obrázek 6.1.



Obrázek 6.1: $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

Stanovíme si funkci hustoty $\sigma(x,y,z)$ jehlanu. Zvolíme-li si libovolný bod $A=[x,\ y,\ z]$, ležící na nebo uvnitř tělesa, pak funkce hustoty je přímo úměrná první souřadnici tohoto bodu, takže $\sigma(x,y,z)=kx$, kde k je koeficient přímé úměrnosti.

Meze proměnných x, y jsou určeny trojúhelníkovou podstavou jehlanu. Za konstantní meze zvolíme meze proměnné x, pak $0 \leq x \leq a$. Meze proměnné y jsou tedy $0 \leq y \leq a-x$. Integrace dle proměnné z probíhá od roviny $z=0$ po rovinu $z=a-x-y$, tj. $0 \leq z \leq a-x-y$.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} kx\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = k \int_0^a \left(\int_0^{a-x} x\,(a-x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= k \int_0^a x \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} \mathrm{d}x = k \int_0^a \frac{x}{2}\,(a-x)^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{k}{2} \left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^4k}{24} \end{aligned}$$

Hmotnost jehlanu je $m=\frac{a^4k}{24}$.

6.2 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do cylindrických souřadnic

***Návod* 6.2** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Cylindrické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0, \infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(r, \varphi, z) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x, y, z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

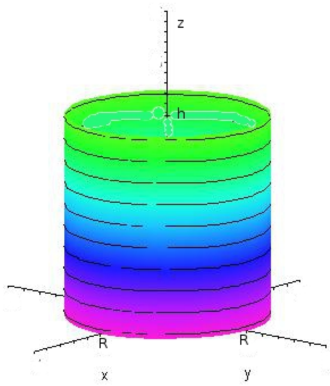
Pak hmotnost tělesa Ω, které má hustotu $\sigma(x, y, z)$ v bodě $[x, y, z]$, je dána vzorcem

$$m = \iiint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r \mathrm{d}z \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 6.2 ([2]) Určete hmotnost přímého rotačního válce s poloměrem podstavy R, výškou h, je-li hustota v jeho libovolném bodě přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu základny válce.

Řešení

Válec umístíme tak, aby střed podstavy ležel v počátku souřadnicového systému, viz obrázek 6.3.



Obrázek 6.2: Válec s poloměrem podstavy R a výškou h

Zvolíme-li si libovolný bod $A = [x, y, z]$ válce, přičemž $-R \leq x \leq R$, $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ a $0 \leq z \leq h$, pak jeho vzdálenost od středu základny válce je rovna $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hustota v libovolném bodě válce je přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu základny válce, takže její funkční předpis je
$\sigma(x, y, z) = k\,(x^2 + y^2 + z^2)$, kde k je koeficient přímé úměry.
Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Po dosazení cylindrických souřadnic do funkčního předpisu hustoty získáváme $\sigma(r, \varphi, z) = k\,(r^2 + z^2)$. Meze pro proměnné r a φ určíme z podstavy válce, což je kružnice s poloměrem R. Odtud tedy $0 \leq r \leq R$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Válec je zdola omezen rovinou $z = 0$ a shora rovinou $z = h$, takže $0 \leq z \leq h$.

Výpočet hmotnosti tělesa:

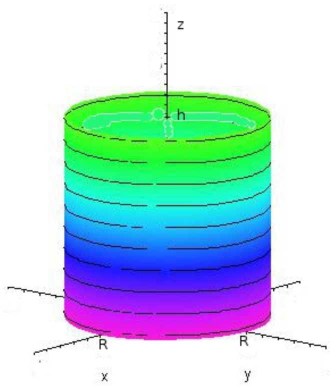
$$\begin{aligned} m &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h kr\left(r^2 + z^2\right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = k \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left[r^3 z + \frac{rz^3}{3} \right]_0^h \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \\ &= k \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(hr^3 + \frac{rh^3}{3} \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = 2k\pi \left[\frac{hr^4}{4} + \frac{r^2h^3}{6} \right]_0^R = \frac{k\pi R^2 h}{6} \left(3R^2 + 2h^2\right) \end{aligned}$$

Hmotnost tělesa je $m = \frac{k\pi R^2 h}{6}\,(3R^2 + 2h^2)$.

Příklad 6.3 ([2]) Určete hmotnost válce s poloměrem podstavy R a výškou h, jestliže hustota v bodě M válce je přímo úměrná vzdálenosti bodu M od horní podstavy a je rovna 1 na dolní podstavě.

Řešení

Válec umístíme tak, aby střed podstavy ležel v počátku souřadnicového systému, viz obrázek 6.3.



Obrázek 6.3: Válec s poloměrem podstavy R a výškou h

Řešíme hmotnost totožného tělesa s tělesem v předchozím příkladě (6.2). Opět máme válec, jehož podstavou je kružnice s poloměrem R a jeho výška je h. Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Meze pro proměnné nám zůstávají stejné:

$$\begin{aligned} 0 \leq r &\leq R, \\ 0 \leq \varphi &\leq 2\pi, \\ 0 \leq z &\leq h. \end{aligned}$$

Nyní musíme stanovit funkci hustoty $\sigma(x, y, z)$. Vzdálenost bodu $M = [x, y, z]$ od horní podstavy je rovna $h-z$, pak hustota v tomto bodě je rovna $\sigma(x, y, z) = k(h-z)$. Navíc víme, že na dolní podstavě je rovna 1. To znamená, že pokud bod M bude ležet v dolní podstavě, hustota bude rovna $k(h-0)$ a zároveň jedné. Odtud můžeme vyjádřit koeficient úměrnosti k:

$$\begin{aligned} k(h-0) &= 1 \\ k &= \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Funkční předpis hustoty je tedy $\sigma(r, \varphi, z) = \frac{1}{h}(h-z)$.

Výpočet hmotnosti válce:

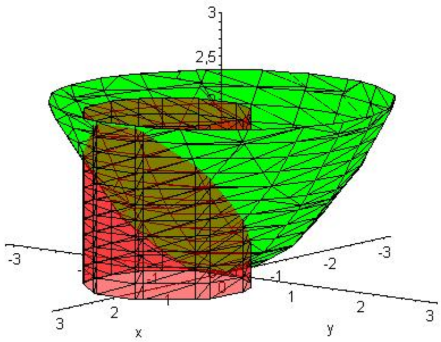
$$\begin{aligned} m &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r \frac{1}{h}(h-z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left[rz - \frac{rz^2}{2h} \right]_0^h \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(hr - \frac{hr}{2} \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = h\pi \left[r^2 - \frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{h\pi R^2}{2} \end{aligned}$$

Hmotnost válce je $m = \frac{h\pi R^2}{2}$.

Příklad 6.4 ([2]) Určete hmotnost homogenního tělesa, které je vytvořeno částí vnitřku válcové plochy $x^2+y^2=2x$ ležící mezi plochou $x^2+y^2=2z$ a rovinou $z=0$.

Řešení

Těleso je válec, jehož osa je rovnoběžná s osou z, zdola je omezen rovinou $z=0$ a shora částí paraboloidu $x^2+y^2=2z$, viz obrázek 6.4.



Obrázek 6.4: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2z$, $z=0$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J=r$.

Podstavou tělesa je kružnice s poloměrem 1 a středem v bodě $S=[1,0,0]$. Proměnnou r vyjádříme tedy z rovnice válce:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2r\cos\varphi \\ r &= 2\cos\varphi \end{aligned}$$

pohybujeme se uvnitř kružnice a zároveň platí $r \geq 0$, takže získáváme

$$0 \leq r \leq 2\cos\varphi.$$

Z podmínky pro proměnnou r si vyjádříme meze proměnné φ:

$$\begin{aligned} 2\cos\varphi &\geq 0 \\ \cos\varphi &\geq 0 \\ \varphi &\in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle. \end{aligned}$$

Integrace podle proměnné z probíhá od roviny $z = 0$ do plochy $x^2 + y^2 = 2z$. Po dosazení cylindrických souřadnic získáme:

$$0 \leq z \leq \frac{r^2}{2}.$$

Jedná se o homogenní těleso, proto funkční předpis hustoty je $\sigma(r, \varphi, z) = k$, kde k je konstanta.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$\begin{aligned}
m &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{2\cos\varphi} \left(\int_{0}^{\frac{r^2}{2}} kr\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{2\cos\varphi} \frac{r^3}{2} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 2k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{k}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{k}{2} \left([\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin 2\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4\pi}{2} \mathrm{d}\varphi \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

Hmotnost tělesa je $m = \frac{3\pi}{4}$.

6.3 Výpočet hmotnosti pomocí transformace do sférických souřadnic

***Návod* 6.3** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Sférické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &= r\sin\vartheta, \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0 \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ tak, že každému bodu $(r,\varphi,\vartheta) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y,z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta.$$

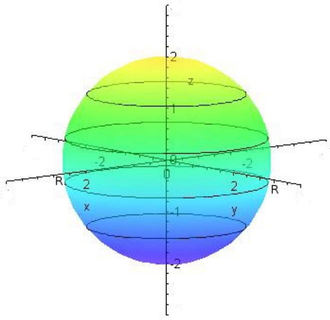
Pak hmotnost tělesa Ω, které má hustotu $\sigma(x,y,z)$ v bodě $[x,y,z]$, je dána vzorcem

$$m = \iiint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r^2\cos\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 6.5 ([2]) Určete hmotnost koule s poloměrem R, je-li její hustota přímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti od jejího středu a v jednotkové vzdálenosti je rovná γ.

Řešení

Střed koule umístíme do počátku souřadnicového systému, viz obrázek 6.5.



Obrázek 6.5: Koule s poloměrem R

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Stanovíme funkci hustoty $\sigma(x,y,z)$ koule. Je-li bod A=[x,y,z] libovolným bodem koule, přičemž $-R \leq x \leq R$, $-\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$ a $-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, je jeho vzdálenost od středu koule rovna $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Funkce hustoty je tedy rovna $\sigma(x,y,z) = k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$. Navíc víme, že pokud je vzdálenost tohoto bodu rovna 1, pak $\sigma(x,y,z) = \gamma$. Odsud můžeme vyjádřit koeficient přímé úměry:

$$\begin{aligned} \sigma(x,y,z) &= k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \\ \gamma &= 1k \end{aligned}$$

$$k = \gamma$$

Z toho vyplývá, že funkce hustoty po dosazení sférických souřadnic je rovna

$\sigma(x, y, z) = \gamma r^3$.

Řezem tělesa rovinou $z = 0$ je kružnice s poloměrem R, odtud tedy $0 \leq r \leq R$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Zároveň pro proměnnou ϑ nemáme žádné omezující podmínky, takže $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Výpočet hmotnosti koule:

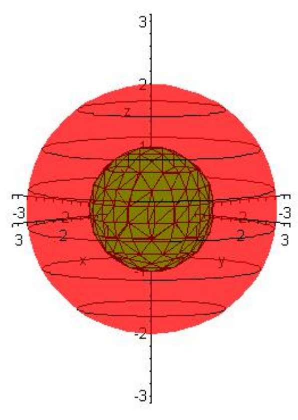
$$\begin{aligned} m &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma r^5 \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = 2\gamma \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^5 \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = 4\gamma\pi \int_0^R r^5 \mathrm{d}r = \\ &= \frac{2\gamma\pi R^6}{3} \end{aligned}$$

Výpočet hmotnosti $m = \frac{2\gamma\pi R^6}{3}$.

Příklad 6.6 ([2]) Určete hmotnost kulové vrstvy mezi kulovými plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, je-li hustota v libovolném jejím bodě nepřímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku souřadného systému.

Řešení

Středy obou ploch leží v počátku souřadného systému, viz obrázek 6.6.



Obrázek 6.6: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Vzdálenost libovolného bodu $A = [x, y, z]$, ležící v prostoru mezi oběmi koulemi, od středu kulových ploch je rovna$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pak hustota výseče je $\sigma(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Po dosazení sférických souřadnic do funkčního předpisu hustoty je hustota $\sigma(r,\varphi,\vartheta) = \frac{k}{r}$. Integrace podle proměnné r probíhá od kružnice s poloměrem 1 po kružnici s poloměrem 2, odtud $1 \le r \le 2$. Meze proměnných φ a ϑ nejsou nijak omezeny, a proto pro ně platí:

$$\begin{aligned} \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

Výpočet hmotnosti výseče:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2 kr\cos\vartheta \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3k}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3k}{2}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{d}\varphi = 6k\pi \end{aligned}$$

Hmotnost tělesa je $m = 6k\pi$.

Kapitola 7

Trojný integrál - výpočet souřadnic těžiště

7.1 Výpočet souřadnic těžiště bez užití transformace

***Návod* 7.1** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Jsou-li x_0, y_0 a z_0 souřadnice těžiště tělesa Ω, je-li navíc $\sigma(x,y,z)$ jeho hustota a m hmotnost, pak platí:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Dá-li se množina Ω napsat pomocí intervalů s proměnlivou spojitou mezí,

např. $\Omega = \{[x,y]; x\in\langle a,b\rangle, y\in\langle g(x),h(x)\rangle, y\in\langle k(x,y),l(x,y)\rangle\}$,

potom

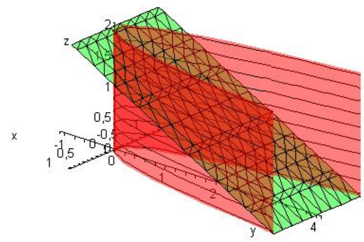
$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left(\int\limits_{k(x,y)}^{l(x,y)}\sigma(x,y,z)\cdot x\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(\int\limits_{k(x,y)}^{l(x,y)} \sigma(x,y,z)\cdot y \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(x,y,z)\cdot z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \left(\int\limits_{k(x,y)}^{l(x,y)} \sigma(x,y,z)\cdot z \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Příklad 7.1 ([4]) Vypočtěte souřadnice těžiště T tělesa, je-li $\sigma(x, y, z) = k$ hustota. Těleso T je určené nerovnicemi $z \geq 0$, $y \geq 4x^2$ a $z \leq \frac{4-y}{2}$.

Řešení

Těleso je tvořeno parabolickou plochou $y = 4x^2$ a shora omezeno rovinou $z = \frac{4-y}{2}$, viz obrázek 7.1.



Obrázek 7.1: $z \geq 0$, $y \geq 4x^2$, $z \leq \frac{4-y}{2}$

Řezem tělesa rovinou $z = 0$ vznikne parabola $y = 4x^2$ vyťatá přímkou $y = 4$. Odtud získáme meze proměnných x a y. Meze proměnné x jsou x-ové souřadnice průsečíků přímky s parabolou, tj. $x = -1$ a $x = 1$. Pak meze proměnné y jsou $y = 4x^2$ a $y = 4$. Integrace proměnné z probíhá od roviny $z = 0$ po rovinu $z = \frac{4-y}{2}$. Pro výpočet souřadnic těžiště tělesa musíme nejdříve vypočítat jeho hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{4x^2}^{4}\left(\int_{0}^{\frac{4-y}{2}} k\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = k\int_{-1}^{1}\left(\int_{4x^2}^{4}\frac{4-y}{2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_{4x^2}^{4}\mathrm{d}x = \\ &= 8k\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = 8k\left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{16x^4}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{64k}{15} \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{15}{64k}\int_{-1}^{1}\left(\int_{4x^2}^{4}\left(\int_{0}^{\frac{4-y}{2}} kx\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{128}\int_{-1}^{1}\left(\int_{4x^2}^{4} x\,(4-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{15}{128}\int_{-1}^{1}\left[4xy - \frac{xy^2}{2}\right]_{4x^2}^{4}\mathrm{d}x = \frac{15}{16}\int_{-1}^{1}\left(x - 2x^3 + x^5\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{15}{16}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

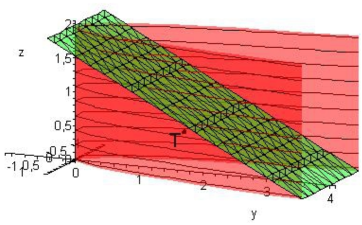
Výpočet y-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
y_T &= \frac{15}{64k}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{4x^2}^{4}\left(\int\limits_{0}^{\frac{4-y}{2}} ky\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{128}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{4x^2}^{4} y\,(4-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{128}\int\limits_{-1}^{1}\left[2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{4x^2}^{4}\mathrm{d}x = \frac{15}{4}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}-x^4+\frac{2x^6}{3}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{4}\left[\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{2x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště:

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{15}{64k}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{4x^2}^{4}\left(\int\limits_{0}^{\frac{4-y}{2}} kz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{512}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{4x^2}^{4}\left(16-8y+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{512}\int\limits_{-1}^{1}\left[16y-4y^2+\frac{y^3}{3}\right]_{4x^2}^{4}\mathrm{d}x = \frac{15}{8}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}-x^2+x^4-\frac{x^6}{6}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{8}\left[\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[0, \frac{12}{7}, \frac{4}{7}\right]$.

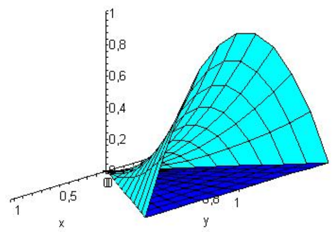


Obrázek 7.2: Těžiště tělesa

Příklad 7.2 ([4]) Vypočtěte souřadnice těžiště T tělesa, je-li $\sigma(x, y, z) = k$ hustota. Těleso je určené nerovnicemi $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq y^2 - x^2$.

Řešení

Těleso je část hyperbolického paraboloidu, která leží nad rovinami $z = 0$ a $y = 0$, a je ohraničena rovinou $y = 1$, viz obrázek 7.3.



Obrázek 7.3: $0 \leq y \leq 1$ a $0 \leq z \leq y^2 - x^2$

Meze pro proměnné y a z jsou již zadány v zadání. Meze proměnné x zjistíme pomocí řezu tělesa rovinou $z = 0$, což znamená, že řešíme rovnici $0 = y^2 - x^2$ a odtud dostáváme $x = -y$ a $x = y$.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$m = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(\int_0^{y^2-x^2} k \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = k \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(y^2 - x^2\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = k \int_0^1 \frac{4y^3}{3} \mathrm{d}y = \frac{1}{3}k$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{3}{k} \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(\int_0^{y^2-x^2} kx \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 3 \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(xy^2 - x^3\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \\ &= 3 \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-y}^{y} \mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

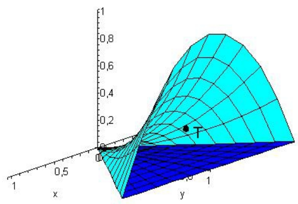
Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{3}{k} \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(\int_0^{y^2-x^2} ky \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 3 \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \left(y^3 - x^2y\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \\ &= 3 \int_0^1 \left[xy^3 - \frac{yx^3}{3} \right]_{-y}^{y} \mathrm{d}y = 4 \int_0^1 y^4 \mathrm{d}y = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{3}{k}\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-y}^{y}\left(\int\limits_0^{y^2-x^2} kz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-y}^{y}\left(y^4-2x^2y^2+x^4\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{3}{2}\int\limits_0^1\left[xy^4-\frac{2x^3y^2}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-y}^{y}\mathrm{d}y = \frac{8}{5}\int\limits_0^1 y^5\mathrm{d}y = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Těžištěm tělesa je bod $T=\left[0,\frac{4}{5},\frac{4}{15}\right]$.

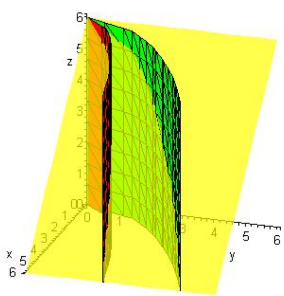


Obrázek 7.4: Těžiště tělesa

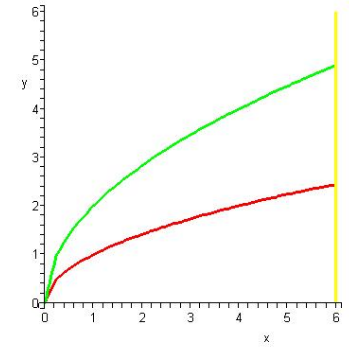
Příklad 7.3 ([8]) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa, které je ohraničené plochami $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$ a $x+z=6$.

Řešení

Těleso je ohraničeno plochami $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, zdola je omezeno rovinou $z=0$ a shora rovinou $x+z=6$ viz obrázek 7.5.



Obrázek 7.5: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=6$



Obrázek 7.6: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x = 6$

Řezem tělesa rovinou $z = 0$ získáme meze proměnných x a y. Z obrázku 7.6 je patrné, že meze pro proměnnou x jsou $x = 0$ a $x = 6$. Integrace podle y probíhá od křivky $y = \sqrt{x}$ po křivku $y = 2\sqrt{x}$. Těleso je omezené zdola rovinou $z = 0$, tj. dolní mez, a shora rovinou $z = 6 - x$, to je horní mez.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$\begin{aligned} m &= \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int\limits_0^{6-x} k \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = k \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= k \int\limits_0^6 \left(6\sqrt{x} - x\sqrt{x} \right) \mathrm{d}x = k \left[4x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^6 = \frac{48\sqrt{6}k}{5} \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{5}{48\sqrt{6}k} \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int\limits_0^{6-x} kx \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{5}{48\sqrt{6}} \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(6x - x^2 \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{5}{48\sqrt{6}} \int\limits_0^6 \left(6x\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} \right) \mathrm{d}x = \frac{5}{48\sqrt{6}} \left[\frac{12x^{\frac{3}{2}}}{5} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} = \right]_0^6 = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

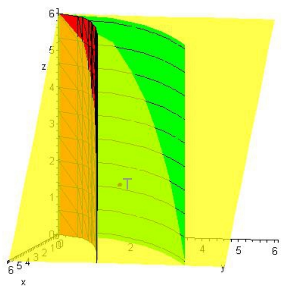
Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{5}{48\sqrt{6}k} \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int\limits_0^{6-x} ky \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{5}{48\sqrt{6}} \int\limits_0^6 \left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6y - xy) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{5}{96\sqrt{6}} \int\limits_0^6 \left[6y^2 - xy^2 \right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{5}{96\sqrt{6}} \int\limits_0^6 \left(18x - 3x^2 \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{5}{96\sqrt{6}} \left[9x^2 - x^3 \right]_0^6 = \frac{15\sqrt{6}}{16} \end{aligned}$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$
\begin{aligned}
z_T &= \frac{5}{48\sqrt{6}k}\int\limits_0^6\left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\left(\int\limits_0^{6-x} kz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{96\sqrt{6}}\int\limits_0^6\left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\left(36-12x+x^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{96\sqrt{6}}\int\limits_0^6\left(36\sqrt{x}-12x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{96\sqrt{6}}\left[24x^{\frac{3}{2}}-\frac{24x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^6 = \frac{12}{7}
\end{aligned}
$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[\frac{18}{7}, \frac{15\sqrt{6}}{16}, \frac{12}{7}\right]$.



Obrázek 7.7: Těžiště tělesa

7.2 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do cylindrických souřadnic

***Návod* 7.2** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Cylindrické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ \textit{kde} & \\ r &\geq 0, \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbf{R}$ tak, že každému bodu $(r,\varphi,z) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y,z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

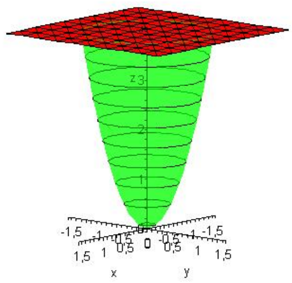
Pak souřadnice těžiště tělesa Ω, je-li $\sigma(x,y,z)$ jeho hustota a m jeho hmotnost, jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r^2 \cos\varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Psi} \sigma(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) zr \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Příklad 7.4 ([4]) Vypočtěte souřadnice těžiště T tělesa, je-li $\sigma(x,y,z) = k$ hustota. Těleso je určené nerovnicemi $z \leq 4$ a $z \geq 4\left(x^2 + y^2\right)$.

Řešení

Těleso je rotační paraboloid shora omezený rovinou $z = 4$, viz obrázek 7.8.



Obrázek 7.8: $z \leq 4$, $z \geq 4\left(x^2 + y^2\right)$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Meze pro proměnnou z jsou patrné ze zadání a po zavedení transformace je tedy $4\,r^2 \;\leq\; z \;\leq\; 4$. Odtud zjistíme meze pro proměnnou r

$$\begin{aligned} 4r^2 &\leq 4 \\ r^2 &\leq 1 \\ \text{zároveň pro } r \text{ platí } r \geq 0 \\ r &\leq 1. \end{aligned}$$

Nemáme žádnou podmínku pro proměnnou φ a i z obrázku je patrné, že $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Výpočet hmotnosti tělesa:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{4r^2}^4 kr\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 4\left(r - r^3\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= 4k\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = k[\varphi]_0^{2\pi} = 2k\pi \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{4r^2}^4 kr^2\cos\varphi\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}4\left(r^2-r^4\right)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\left(r^2-r^4\right)\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r = 0 \end{aligned}$$

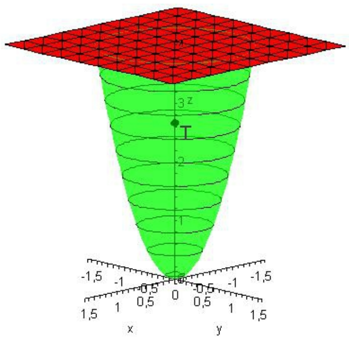
Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{4r^2}^4 kr^2\sin\varphi\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}4\left(r^2-r^4\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\left(r^2-r^4\right)\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r = 0 \end{aligned}$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_{4r^2}^4 krz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}8\left(r-r^5\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \\ &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[0, 0, \frac{8}{3}\right]$.

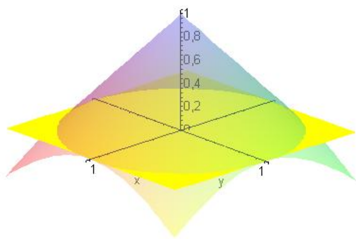


Obrázek 7.9: Těžiště tělesa

Příklad 7.5 ([10]) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa s jednotkovou hustotou ohraničeného plochami $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z = 0$.

Řešení

Těleso je kužel zdola omezený rovinou $z = 0$, viz obrázek 7.10.



Obrázek 7.10: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$

Zavedeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

a jakobián této transformace je $J = r$.

Řezem tělesa rovinou $z = 0$ získáme meze proměnných r a φ. Jedná se o kružnici s poloměrem 1j. Odtud dostáváme $0 \leq r \leq 1$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Integrace dle proměnné z probíhá od roviny $z = 0$ po kuželovou plochu $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, po dosazení nových souřadnic $z = 1 - r$.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-r} 1 \cdot r \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r - r^2 \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{6} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-r} r^2 \cos\varphi \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(r^2 - r^3 \right) \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^1 \left(r^2 - r^3 \right) [\sin\varphi]_0^{2\pi} \mathrm{d}r = 0 \end{aligned}$$

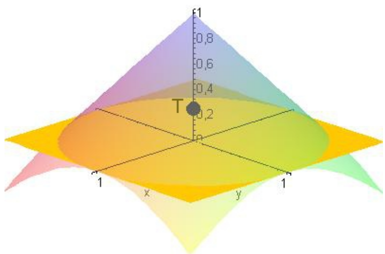
Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{3}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-r} r^2\sin\varphi \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{\pi}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(r^2-r^3\right)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \\ &= \frac{3}{\pi}\int\limits_0^1\left(r^2-r^3\right)\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r = 0 \end{aligned}$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{3}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-r} rz\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2\pi}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(r-2r^2+r^3\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \\ &= 3\left[\frac{r^2}{2}-\frac{2r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[0, 0, \frac{1}{4}\right]$.



Obrázek 7.11: Těžiště tělesa

7.3 Výpočet souřadnic těžiště pomocí transformace do sférických souřadnic

***Návod* 7.3** *Ω je omezená a uzavřená množina v prostoru xyz. Sférické souřadnice jsou dány předpisem:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &= r\sin\vartheta, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Najdeme $\Psi \subset \langle 0,\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ tak, že každému bodu $(r,\varphi,\vartheta) \in \Psi$ je tímto předpisem jednoznačně přiřazen bod $(x,y,z) \in \Omega$.
Jakobiův determinant této transformace má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta.$$

Pak souřadnice těžiště tělesa Ω, je-li $\sigma(x,y,z)$ jeho hustota a m jeho hmotnost, jsou dány vzorci

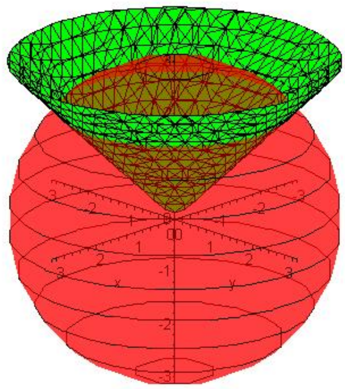
$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r^3\cos\varphi\cos^2\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r^3\sin\varphi\cos^2\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega} \sigma(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r^3\sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

.

Příklad 7.6 ([4]) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa s jednotkovou hustotou určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ a $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení

Těleso tvoří průnik koule, která má poloměr 3j a střed v souřadnicovém počátku, s kuželem, viz obrázek 7.12.



Obrázek 7.12: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos \varphi \cos \vartheta, \\
y &= r \sin \varphi \cos \vartheta, \\
z &= r \sin \vartheta
\end{aligned}
$$

a jakobián této transformace je $J = r^2 \cos \vartheta$.

Poloměr kulové plochy nám udává horní mez proměnné r, odtud $0 \leq r \leq 3$. Meze proměnné ϑ získáme z nerovnice $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$
\begin{aligned}
r^2 \sin^2 \vartheta &\geq r^2 \cos^2 \vartheta \\
\sin^2 \vartheta &\geq \cos^2 \vartheta \\
\text{zároveň pro proměnnou } \varphi \text{ platí } \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle & \\
\vartheta &\geq \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Pro proměnnou φ nemáme žádné podmínky a proto $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výpočet hmotnosti tělesa:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 1 \cdot r^2 \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = 18\pi \left[\sin\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 9\pi \left(2 - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^3 \cos\varphi \cos^2\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^3 \cos^2\vartheta \left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta = 0
\end{aligned}
$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{1}{9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^3 \sin\varphi \cos^2\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^3 \cos^2\vartheta \left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta = 0
\end{aligned}
$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$
\begin{aligned}
z_T &= \frac{1}{9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{9}{4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi =
\end{aligned}
$$

Použijeme substituci:

$\sin\vartheta = t$

$\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$

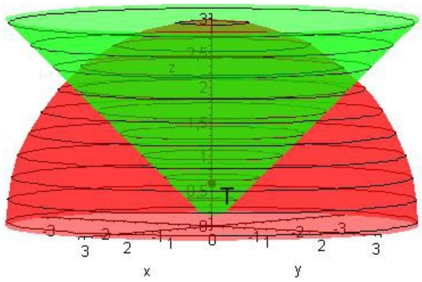
Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$\vartheta = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$

$$
= \frac{9}{4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{9}{4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)} \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \mathrm{d}\varphi = \frac{9}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}
$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[0, 0, \frac{9}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}\right]$.

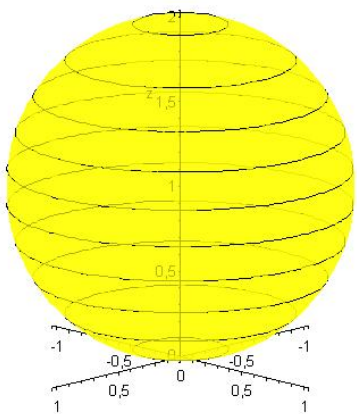


Obrázek 7.13: Těžiště tělesa

Příklad 7.7 ([2]) Najděte souřadnice těžiště koule $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$, jestliže hustota je v libovolném bodě koule nepřímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku souřadnic, tj. $\sigma(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Řešení

Hledáme těžiště koule, která má poloměr 1j a střed v bodě $S = [0,0,1]$, viz obrázek 7.14.



Obrázek 7.14: Koule s poloměrem 1j a středem S=[0,0,1]

Zavedeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$

a jakobián této transformace je $J = r^2\cos\vartheta$.

Z nerovnice $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$, po dosazení sférických souřadnic, získáme meze proměnné r:

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\vartheta + (r\sin\vartheta - 1)^2 &\leq 1 \\ r^2 - 2r\sin\vartheta &\leq 0 \\ r\,(r - 2\sin\vartheta) &\leq 0 \\ \text{nezapomínáme na podmínku } r \geq 0 & \\ r &\leq 2\sin\vartheta \end{aligned}$$

Pak meze pro proměnnou ϑ zjistíme z nerovnice:

$$\begin{aligned} 2\sin\vartheta &\geq 0 \\ \sin\vartheta &\geq 0 \\ \text{přičemž pro proměnnou } \vartheta \text{ platí } \vartheta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \vartheta &\in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Pro proměnnou φ platí $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. A funkční předpis hustoty po dosazení sférických souřadnic je tedy roven $\sigma = \frac{k}{r}$.

Výpočet hmotnosti koule:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\vartheta} \frac{k}{r} r^2 \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\sin\vartheta} \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= 2k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$\sin\vartheta = t$$

$$\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$$

Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$$\vartheta = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$$

$$= 2k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{2k}{3} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4k\pi}{3}$$

Výpočet x-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{3}{4k\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\vartheta} \frac{k}{r} r^3 \cos\varphi \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\sin\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin\varphi]_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 0 \end{aligned}$$

Výpočet y-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$y_T = \frac{3}{4k\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\vartheta} \frac{k}{r} r^3 \sin\varphi \cos\vartheta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin\vartheta}\sin\varphi\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 0$$

Výpočet z-ové souřadnice těžiště tělesa:

$$z_T = \frac{3}{4k\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{2\sin\vartheta}\frac{k}{r}r^3\sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^4\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta\right)\mathrm{d}\varphi =$$

Použijeme substituci:

$\sin\vartheta = t$

$\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t$

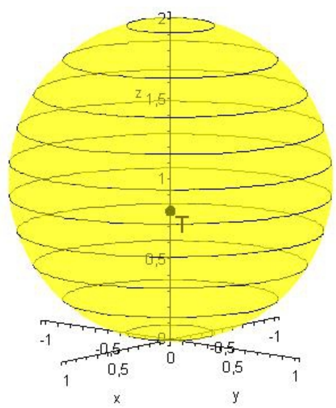
Při použití substituce musíme změnit meze nové proměnné, tedy:

$\vartheta = 0 \rightarrow t = 0$

$\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{1}t^4 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{5\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{5}$$

Těžištěm tělesa je bod $T = \left[0, 0, \frac{4}{5}\right]$.



Obrázek 7.15: Těžiště tělesa

Literatura

[1] DĚMIDOVIČ B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1

[2] HAVLAS J., VITNER Č.: *Matematika - dvojný, trojný, křivkový a plošný integrál*, dotisk, České vysoké učení technické v Praze, 1988. číslo publikace: 6388

[3] KOPÁČEK J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky III*, Praha : Matfyzpress, 2002. ISBN 80-85863-95-2

[4] KOUTKOVÁ H., PRUDILOVÁ K.: *Sbírka příkladů z matematiky III*, 1. vydání, Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7204-598-3

[5] *Kvadriky* [online],
dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/lakoma/KOGG/Kvadriky.pdf

[6] LOMTATIDZE L., PLCH R.: *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*, Brno : Přírodovědecká fakulta, 2003. ISBN 80-210-3228-6

[7] LUKEŠ J., MALÝ J.: *Míra a integrál*, 2. vydání, Univerzita Karlova v Praze, 2002. ISBN 80-246-043-0

[8] MAŠEK J.: *Řešené úlohy z matematiky. Dvojné, trojné, křivkové a plošné integrály*, 1. vydání, Západočeská univerzita v Plzni, 2001. ISBN 80-7082-836-6

[9] MÍČKA J.: *Sbírka příkladů z matematiky*, 4. vydání, VŠCHT Praha, 2002. ISBN 80-7080-484-X

[10] NAGY J., NAVRÁTIL O.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, 1. vydání, České vysoké učení technické v Praze, 2005. ISBN 80-01-03176-4

[11] POLÁK J.: *Přehled středoškolské matematiky*, 6. vydání, Prometheus, s.r.o., 1995. ISBN 80-85849-78-X

[12] RYBIČKA J.: *LaTeX pro začátečníky*, 3. vydání, Brno : KONVOJ, 2003. ISBN 80-7302-049-1

[13] TESAŘ J.: *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky*, 1. vydání, Pedagogická fakulta JU České Budějovice. ISBN 80-7040-133-8