Geometrická řada

Geometrická řada je nekonečná řada, jejíž členy tvoří geometrickou posloupnost. Tedy, existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Je-li $a_1 = 0$, potom $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, bez ohledu na to, jak velké je q. Všechny n-té částečné součty jsou také rovny 0, a tedy i součet takové řady je roven 0. Touto řadou se již více nemusíme zaobírat.

Je-li $q = 0$, potom $a_n = 0$ pro všechna $n > 1$, bez ohledu na to, jak velké je a_1. Všechny n-té částečné součty jsou rovny a_1, a tedy i součet takové řady je roven a_1. Touto řadou se také již nemusíme zaobírat.

Nyní předpokládejme, že $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$.

Protože

$$\begin{aligned}
a_2 &= q \cdot a_1 \\
a_3 &= q \cdot a_2 = q^2 \cdot a_1 \\
a_4 &= q \cdot a_3 = q^3 \cdot a_1 \\
&\dots \\
a_n &= q^{n-1} \cdot a_1
\end{aligned}$$

tak

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&= a_1 + q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + \ldots + q^{n-1} \cdot a_1 = \\
&= a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})
\end{aligned}$$

Je-li $q = 1$, tak

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1} = n$$

a tedy $s_n = a_1 \cdot n$. To znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot n = a_1 \cdot \infty$$

a to je rovno ∞ nebo $-\infty$ podle toho, jestli je a_1 kladné nebo záporné. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v takovém případě diverguje do ∞ nebo do $-\infty$.

Je-li $q \neq 1$, tak můžeme využít rovnosti

$$(q^n - 1) : (q - 1) = q^{n-1} + \ldots + q + 1$$

a vyjádřit s_n jako

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v tomto případě závisí na limitě

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a ta na výrazu q^∞, který se chová různě pro $q \in (-\infty, -1)$, $q = -1$, $q \in (-1, 1)$ a $q \in (1, \infty)$.

(1) Je-li $q \in (-\infty, -1)$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{(-1)^n \cdot \infty - 1}{q - 1}$$

Pro n sudé dostáváme

$$a_1 \cdot \frac{\infty - 1}{q - 1} = -a_1 \cdot \infty$$

pro n liché

$$a_1 \cdot \frac{-\infty - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \infty$$

tedy pro $a_1 \neq 0$ má posloupnost částečných součtů dva různé hromadné body ∞ a $-\infty$, limita posloupnosti částečných součtů neexistuje.

(2) Je-li $q = -1$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{-1 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{2} \cdot \big(1 - (-1)^n\big)$$

Pro n sudé dostáváme $\frac{a_1}{2} \cdot 0 = 0$, kdežto pro n liché $\frac{a_1}{2} \cdot 2 = a_1 \neq 0$. Posloupnost částečných součtů má tedy dva různé hromadné body 0 a a_1, limita posloupnosti částečných součtů neexistuje.

(3) Je-li $q \in (-1, 1)$, potom

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

(4) Je-li $q \in (1, \infty)$, potom

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{\infty - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \infty$$

a to je rovno ∞ nebo $-\infty$ podle toho, jestli je a_1 kladné nebo záporné.

Závěrečné shrnutí: Je-li $a_1 \neq 0$, tak geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pouze pro $q \in (-1, 1)$. Její součet je v tomto případě roven

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

(tento předpis platí i pro $q = 0$, přestože jsme tento případ vyšetřovali odděleně). Pro $q \in (-\infty, -1\rangle$ řada diverguje, protože neexistuje limita posloupnosti částečných součtů. Pro $q \in \langle 1, \infty)$ řada diverguje do ∞ nebo do $-\infty$, podle toho, jestli a_1 je kladné nebo záporné.

Příklad 1: Určete součet řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^n}$$

Řešení: Pro tuto řadu je

$$a_n = \frac{3}{5^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{5^{n+1}}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \frac{3 \cdot 5^n}{3 \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5}$$

Řada je tedy geometrická, její kvocient q je roven $\frac{1}{5} \in (-1, 1)$. Pro určení součtu budeme ještě potřebovat
$$a_1 = \frac{3}{5}$$
Součet řady se pak určí jako

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

Příklad 2: Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{5^n}$$

Řešení: Pro tuto řadu je

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{5^n}$$

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot \frac{3}{5^{n+1}}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot \frac{3}{5^{n+1}}}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{5^n}} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 3 \cdot 5^n}{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5^{n+1}} = -\frac{1}{5}$$

Řada je tedy geometrická, její kvocient q je roven $-\frac{1}{5} \in (-1,1)$. Pro určení součtu budeme ještě potřebovat

$$a_1 = \frac{3}{5}$$

Součet řady se pak určí jako

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{3}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Příklad 3: Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{5^{\frac{n}{2}}}$$

Řešení: Pro tuto řadu je

$$a_n = \frac{3^{2n}}{5^{\frac{n}{2}}}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{5^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{3^{2n+2}}{5^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{2n+2}}{5^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}}{\frac{3^{2n}}{5^{\frac{n}{2}}}} = \frac{3^{2n+2} \cdot 5^{\frac{n}{2}}}{3^{2n} \cdot 5^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

Řada je geometrická, její kvocient q je roven $\frac{9}{\sqrt{5}} > 1$. Řada tedy diverguje. Protože

$$a_1 = \frac{9}{\sqrt{5}} > 0$$

tak řada diverguje do ∞.