

**Učební texty ke konzultacím předmětu
Matematická analýza III pro kombinované studium**

Konzultace první a druhá

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

e-mail: [lsamkova@ pf.jcu.cz](mailto:lsamkova@pf.jcu.cz)

webová stránka: home.pf.jcu.cz/~lsamkova/

**Obsah kurzu: Primitivní funkce. Neurčitý integrál. Určitý integrál.
Aplikace určitého integrálu. Úvod do teorie diferenciálních rovnic.**

Literatura:

- učebnice pro Gymnázia — např. Diferenciální a integrální počet, nakl. Prometheus
- Děmidovič: Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, nakl. Fragment
- Škrášek, Tichý: Základy aplikované matematiky II, SNTL
- Samková, Sběrka příkladů z matematiky, skripta ČVUT
- Kaňka, Henzler: Matematika 2, učebnice VŠE

Nutnou podmínkou k účasti na zkoušce je odevzdání domácí práce (vypracování zadaných úloh). Z každé kapitoly učebních textů (kromě kapitoly "Aplikace") je nutno vypracovat 2 příklady, z kapitoly "Aplikace" 1 příklad na každý vzoreček.

Zkouška se skládá z ústní a písemné části.

Neurčitý integrál

V celé kapitole je $c \in \mathbb{R}$ takzvaná integrační konstanta.

$$F'(x) = f(x) \text{ pro } x \in (a, b),$$

$$\text{pak } \int f(x) dx = F(x) + c \text{ na intervalu } (a, b)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ pro } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int 0 dx = c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$, pokud existují integrály vpravo

Spočítejte integrály (bez použití per partes a substituce):

$$1) \int x^5 dx$$

$$2) \int 4x^3 dx$$

$$3) \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$4) \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$5) \int \frac{1}{x} dx$$

$$6) \int \sqrt{x} dx$$

$$7) \int \sqrt[5]{x} dx$$

$$8) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$9) \int x \cdot \sqrt[3]{x} dx$$

$$10) \int x^2 \cdot \sqrt{x} dx$$

$$11) \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

$$12) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$$

$$13) \int 3x(x^2 - 1) dx$$

$$14) \int 2x(3 - x) dx$$

$$15) \int \frac{x^3 - 4x^2}{x^2} dx$$

$$16) \int \frac{1+x^2}{x^3} dx$$

$$17) \int (x^2 - 3x)^2 dx$$

$$18) \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} dx$$

$$19) \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

$$20) \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$$

$$21) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$22) \int (3 \sin x - 2 \cos x) dx$$

$$23) \int \frac{4 - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

Výsledky: 1) $\frac{x^6}{6} + c, x \in \mathbb{R}$; 2) $x^4 + c, x \in \mathbb{R}$; 3) $-\frac{1}{2x^2} + c, x \neq 0$; 4) $-\frac{1}{3x^3} + c, x \neq 0$; 5) $\ln|x| + c, x \neq 0$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, x > 0$; 7) $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c, x \neq 0$; 9) $\frac{3}{7}x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + c, x \in \mathbb{R}$; 10) $\frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + c, x > 0$; 11) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c, x > 0$; 12) $-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2}} + c, x \neq 0$; 13) $\frac{3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + c, x \in \mathbb{R}$; 14) $3x^2 - \frac{2x^3}{3} + c, x \in \mathbb{R}$; 15) $\frac{x^2}{2} - 4x + c, x \neq 0$; 16) $-\frac{1}{2x^2} + \ln|x| + c, x \neq 0$; 17) $\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 + c, x \in \mathbb{R}$; 18) $\frac{x^2}{2} - x + c, x \neq -4$; 19) $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c, x \neq 0$; 20) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c, x > 0$; 21) $-\cotg x + c, x \neq k\pi$; 22) $-3\cos x - 2\sin x + c, x \in \mathbb{R}$; 23) $4\operatorname{tg} x - 2x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Metoda per partes

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Spočítejte integrály pomocí metody per partes:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ | 2) $\int \frac{1}{x^3} \ln x \, dx$ |
| 3) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$ | 4) $\int x \cdot \ln x \, dx$ |
| 5) $\int \ln x \, dx$ | 6) $\int (2x + 3) \cdot \ln x \, dx$ |
| 7) $\int x \cdot \sin x \, dx$ | 8) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ |
| 9) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ | 10) $\int (2x - 3) \cdot e^x \, dx$ |
| 11) $\int (x^2 + x) \cdot e^x \, dx$ | 12) $\int (3 - 2x) \cdot \sin x \, dx$ |

Výsledky: 1) $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c, x > 0$; 2) $-\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + c, x > 0$; 3) $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c, x > 0$; 4) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c, x > 0$; 5) $x \ln x - x + c, x > 0$; 6) $(x^2 + 3x) \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} - 3x + c, x > 0$; 7) $-x \cos x + \sin x + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 9) $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 10) $(2x - 5) \cdot e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 11) $(x^2 - x + 1) \cdot e^x + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $(2x - 3) \cdot \cos x - 2 \sin x + c, x \in \mathbb{R}$.

Substituce

Schematicky:

$$y = g(x)$$

$$dy = g'(x) \, dx$$

Tedy

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(y) \, dy.$$

Spočítejte integrály pomocí substituce:

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1) $\int \cos(x+2) dx$ | 2) $\int \sin(3x+4) dx$ | 3) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ |
| 4) $\int \sin(\pi-x) dx$ | 5) $\int e^{3x} dx$ | 6) $\int e^{-x} dx$ |
| 7) $\int e^{x+5} dx$ | 8) $\int e^{2-x} dx$ | 9) $\int e^{2x-1} dx$ |
| 10) $\int (x+1)^2 dx$ | 11) $\int (x+1)^{10} dx$ | 12) $\int (1-x)^{10} dx$ |
| 13) $\int (2x+5)^5 dx$ | 14) $\int (3-5x)^3 dx$ | 15) $\int \sqrt{2x-1} dx$ |
| 16) $\int \sqrt[3]{3-2x} dx$ | 17) $\int \frac{1}{(x+7)^2} dx$ | 18) $\int \frac{1}{(3x+2)^3} dx$ |
| 19) $\int \frac{1}{\sqrt{5x+1}} dx$ | 20) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} dx$ | 21) $\int \frac{1}{x+1} dx$ |
| 22) $\int \frac{1}{2x-1} dx$ | 23) $\int \frac{1}{1-2x} dx$ | 24) $\int \frac{1}{4-x} dx$ |
| 25) $\int \frac{3}{1-x} dx$ | 26) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | 27) $\int x \cdot \sqrt{3+x^2} dx$ |
| 28) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ | 29) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ | 30) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ |
| 31) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ | 32) $\int (e^x+8)^2 \cdot e^x dx$ | 33) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ |

Substituce (doporučené): 1) $y = x + 2$; 2) $y = 3x + 4$; 3) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = \pi - x$; 5) $y = 3x$; 6) $y = -x$; 7) $y = x + 5$; 8) $y = 2 - x$; 9) $y = 2x - 1$; 10) $y = x + 1$; 11) $y = x + 1$; 12) $y = 1 - x$; 13) $y = 2x + 5$; 14) $y = 3 - 5x$; 15) $y = 2x - 1$; 16) $y = 3 - 2x$; 17) $y = x + 7$; 18) $y = 3x + 2$; 19) $y = 5x + 1$; 20) $y = 3 - x$; 21) $y = x + 1$; 22) $y = 2x - 1$; 23) $y = 1 - 2x$; 24) $y = 4 - x$; 25) $y = 1 - x$; 26) $y = 1 + x^2$; 27) $y = 3 + x^2$; 28) $y = 1 + x^2$; 29) $y = x^3 + 1$; 30) $y = 1 - x^4$; 31) $y = \sin x$; 32) $y = e^x + 8$; 33) $y = \sin x$.

Výsledky: 1) $\sin(x+2)+c, x \in \mathbb{R}$; 2) $-\frac{1}{3} \cos(3x+4)+c, x \in \mathbb{R}$; 3) $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)+c, x \in \mathbb{R}$; 4) $\cos(\pi-x)+c, x \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{1}{3}e^{3x}+c, x \in \mathbb{R}$; 6) $-e^{-x}+c, x \in \mathbb{R}$; 7) $e^{x+5}+c, x \in \mathbb{R}$; 8) $-e^{2-x}+c, x \in \mathbb{R}$; 9) $\frac{1}{2}e^{2x-1}+c, x \in \mathbb{R}$; 10) $\frac{(x+1)^3}{3}+c, x \in \mathbb{R}$; 11) $\frac{(x+1)^{11}}{11}+c, x \in \mathbb{R}$; 12) $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+c, x \in \mathbb{R}$; 13) $\frac{(2x+5)^6}{12}+c, x \in \mathbb{R}$; 14) $-\frac{(3-5x)^4}{20}+c, x \in \mathbb{R}$; 15) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+c, x > \frac{1}{2}$; 16) $-\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(3-2x)^4}+c, x \in \mathbb{R}$; 17) $-\frac{1}{x+7}+c, x \neq -7$; 18) $-\frac{1}{6(3x+2)^2}+c, x \neq -\frac{2}{3}$; 19) $\frac{2}{5}\sqrt{5x+1}+c, x > -\frac{1}{5}$; 20) $-\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(3-x)^2}+c, x \neq 3$; 21) $\ln|x+1|+c, x \neq -1$; 22) $\frac{1}{2} \ln|2x-1|+c, x \neq \frac{1}{2}$; 23) $-\frac{1}{2} \ln|1-2x|+c, x \neq \frac{1}{2}$; 24) $-\ln|4-x|+c, x \neq 4$; 25) $-3 \ln|1-x|+c, x \neq 1$; 26) $\sqrt{1+x^2}+c, x \in \mathbb{R}$; 27) $\frac{1}{3}(3+x^2)\sqrt{3+x^2}+c, x \in \mathbb{R}$; 28) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)+c, x \in \mathbb{R}$; 29) $\frac{1}{3} \ln|x^3+1|+c, x \neq -1$; 30) $-\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+c, x \in (-1, 1)$; 31) $e^{\sin x}+c, x \in \mathbb{R}$; 32) $\frac{(e^x+8)^3}{3}+c, x \in \mathbb{R}$; 33) $\frac{1}{4} \sin^4 x+c, x \in \mathbb{R}$.

Spočtěte integrály (pomocí per partes a 1. substituce):

$$\begin{array}{ll}
 1) \int x \cdot \cos(\pi x) \, dx & 2) \int \cos x \cdot e^{-x} \, dx \\
 3) \int \ln(3x + 2) \, dx & 4) \int (x + 1)^2 \cdot e^{2x} \, dx \\
 5) \int x \cdot \sin(1 - 2x) \, dx & 6) \int (1 - x) \cdot e^{-x} \, dx
 \end{array}$$

Výsledky: 1) $\frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + c$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\frac{1}{2}e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x} \cos x + c$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $x \ln(3x + 2) - x + \frac{2}{3} \ln(3x + 2) + c$, $x > -\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 + 2x + 1) + c$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{1}{2}x \cos(1 - 2x) + \frac{1}{4} \sin(1 - 2x) + c$, $x \in \mathbb{R}$; 6) $xe^{-x} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozklad na parciální zlomky

Necht' $A, B \in \mathbb{Z}$. Necht' $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$. Pak existují jednoznačně určená $C, D \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}.$$

Spočtěte integrály (pomocí rozkladu na parciální zlomky):

$$\begin{array}{ll}
 1) \int \frac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3} \, dx & 2) \int \frac{5x - 3}{x^2 - 5x + 6} \, dx \\
 3) \int \frac{x - 2}{x^2 - 9} \, dx & 4) \int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x - 3} \, dx \\
 5) \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \, dx & 6) \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \, dx
 \end{array}$$

Rozklad na zlomky: 1) $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{12}{x-3} + \frac{-7}{x-2}$; 3) $\frac{\frac{1}{6}}{x-3} + \frac{\frac{5}{6}}{x+3}$; 4) $\frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$; 5) $\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$; 6) $x - 3 + \frac{8}{x+2} + \frac{-1}{x+1}$.

Výsledky: 1) $2 \ln|x+3| + 3 \ln|x-1| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$; 2) $12 \ln|x-3| - 7 \ln|x-2| + c$, $x \neq 2$, $x \neq 3$; 3) $\frac{1}{6} \ln|x-3| + \frac{5}{6} \ln|x+3| + c$, $x \neq \pm 3$; 4) $\frac{5}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$, $x \neq -1$, $x \neq 3$; 5) $\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$; 6) $\frac{x^2}{2} - 3x + 8 \ln|x+2| - \ln|x+1| + c$, $x \neq -2$, $x \neq -1$.

Druhá substituce

Schematicky:

$$\begin{aligned}
 x &= h(y) \\
 dx &= h'(y) \, dy
 \end{aligned}$$

Tedy

$$\int f(x) dx = \int f(h(y)) \cdot h'(y) dy$$

pokud $h' > 0$, resp. $h' < 0$.

Spočtěte integrály (pomocí 2. substituce):

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx & 2) \int \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} dx \\ 3) \int \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} dx & 4) \int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{3 + \sqrt[3]{x}} dx \end{array}$$

Doporučené substituce: 1) $y = \sqrt{x}$, tj. $x = y^2$; 2) $y = \sqrt{x}$, tj. $x = y^2$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$, tj. $x = y^3$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$, tj. $x = y^3$.

Výsledky: 1) $2\sqrt{x} - 4 \ln(\sqrt{x} + 2) + c$, $x > 0$; 2) $x - 2\sqrt{x} + 6 \ln(\sqrt{x} + 3) + c$, $x > 0$; 3) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 6 \sqrt[3]{x} + 12 \ln |\sqrt[3]{x} + 2| + c$, $x \neq -8$; 4) $x - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 9 \sqrt[3]{x} - 27 \ln |\sqrt[3]{x} + 3| + c$, $x \neq -27$.

Určitý integrál

Necht' $\int f(x) dx = F(x) + c$ na intervalu (a, b) . Pak

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+),$$

pokud má rozdíl vpravo smysl.

Spočtěte určité integrály:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^1 x^3 dx & 2) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx & 3) \int_{-1}^1 (x^2 - x) dx \\ 4) \int_0^4 \sqrt{x} dx & 5) \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx & 6) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\ 7) \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx & 8) \int_2^3 \frac{1}{x^3} dx & 9) \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx \\ 10) \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx & 11) \int_0^5 e^x dx & 12) \int_{-2}^2 e^{-x} dx \\ 13) \int_1^e \frac{1}{x} dx & 14) \int_0^1 \frac{1}{x} dx & 15) \int_{-4}^{-3} \frac{1}{x} dx \\ 16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx & 17) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx & 18) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ 19) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx & 20) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx & 21) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x) dx \\ 22) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx & 23) \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx & 24) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(4x) dx \\ 25) \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx & 26) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx & 27) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

Mezivýsledky: 1) $[\frac{x^4}{4}]_0^1$; 2) $[\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^1$; 3) $[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^1$; 4) $[\frac{2}{3}x\sqrt{x}]_0^4$; 5) $[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}]_{-1}^8$; 6) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_0^8$; 7) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_{-1}^0$; 8) $[-\frac{1}{2x^2}]_2^3$; 9) $[-\frac{1}{2x^2}]_0^1$; 10) $[-\frac{1}{2x^2}]_{-1}^0$; 11) $[e^x]_0^5$; 12) $[-e^{-x}]_{-2}^2$; 13) $[\ln|x|]_1^e$; 14) $[\ln|x|]_0^1$; 15) $[\ln|x|]_{-4}^{-3}$; 16) $[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 17) $[\sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 18) $[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 19) $[-\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 20) $[\frac{1}{2}\sin(2x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 21) $[\frac{1}{3}\sin(3x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 22) $[-2\cos(\frac{x}{2})]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$; 23) $[-\cos(x + \frac{\pi}{3})]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$; 24) $[\frac{1}{4}\sin(4x)]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$; 25) $[-\frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{6})]_0^{\frac{5\pi}{6}}$; 26) $[-\cotg x]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 27) $[\tg x]_0^{\frac{\pi}{4}}$.

Výsledky: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{16}{3}$; 5) $\frac{45}{4}$; 6) 6; 7) $-\frac{3}{2}$; 8) $\frac{5}{72}$; 9) $+\infty$; 10) $-\infty$; 11) $e^5 - 1$; 12) $e^2 - \frac{1}{e^2}$; 13) 1; 14) $+\infty$; 15) $\ln \frac{3}{4}$; 16) 1; 17) $\sqrt{2}$; 18) 1; 19) 0; 20) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 21) $\frac{1}{3}$; 22) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 24) 0; 25) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 26) $+\infty$; 27) 1.

Spočítejte určité integrály:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_0^\infty x^3 dx$ | 2) $\int_{-\infty}^0 x^3 dx$ | 3) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$ |
| 4) $\int_0^\infty (x^2 + 1) dx$ | 5) $\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) dx$ | 6) $\int_{-\infty}^\infty (x^2 + 1) dx$ |
| 7) $\int_0^\infty (x^2 - x) dx$ | 8) $\int_{-\infty}^0 (x^2 - x) dx$ | 9) $\int_{-\infty}^\infty (x^2 - x) dx$ |
| 10) $\int_0^\infty \sqrt{x} dx$ | 11) $\int_{-\infty}^\infty \sqrt{x} dx$ | 12) $\int_{-\infty}^0 \sqrt[3]{x} dx$ |
| 13) $\int_{-\infty}^\infty \sqrt[3]{x} dx$ | 14) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 15) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 16) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 17) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ | 18) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$ |
| 19) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3} dx$ | 20) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3} dx$ | 21) $\int_2^\infty \frac{1}{x^4} dx$ |
| 22) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ | 23) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4} dx$ | 24) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4} dx$ |
| 25) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4} dx$ | 26) $\int_0^\infty e^x dx$ | 27) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ |
| 28) $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$ | 29) $\int_0^\infty \cos x dx$ | 30) $\int_{-\infty}^\infty \sin x dx$ |
| 31) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ | 32) $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$ | 33) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} dx$ |
| 34) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} dx$ | 35) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 36) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - 1} dx$ |
| 37) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 38) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 39) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 - 1} dx$ |

Mezivýsledky — neurčité integrály (bez konstanty c): 1) $\frac{x^4}{4}$; 4) $\frac{x^3}{3} + x$; 7) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$; 10) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; 12) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$; 14) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 17) $-\frac{1}{2x^2}$; 21) $-\frac{1}{3x^3}$; 26) e^x ; 29) $\sin x$; 30) $-\cos x$; 31) $\ln|x|$; 35) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$.

Výsledky: 1) ∞ ; 2) $-\infty$; 3) neexistuje (diverguje); 4) ∞ ; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) ∞ ; 8) ∞ ; 9) ∞ ; 10) ∞ ; 11) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 12) $-\infty$; 13) neexistuje (diverguje); 14) ∞ ; 15) $-\infty$; 16) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 17) $\frac{1}{2}$; 18) $-\frac{1}{2}$; 19) ∞ ; 20) $-\infty$; 21) $\frac{1}{24}$; 22) $\frac{1}{3}$; 23) ∞ ; 24) ∞ ; 25) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 26) ∞ ; 27) 1; 28) ∞ ; 29) neexistuje (diverguje) 30) neexistuje (diverguje); 31) ∞ ; 32) ∞ ; 33) $-\infty$; 34) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 35) $\frac{1}{2} \ln 3$; 36) ∞ ; 37) $-\infty$; 38) $\frac{1}{2} \ln 2$; 39) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu).

Per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

Spočtěte určité integrály (pomocí per partes):

$$\begin{array}{ll} 1) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx & 2) \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx \\ 3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx & 4) \int_0^1 x \cdot e^x dx \\ 5) \int_1^e \ln x dx & 6) \int_0^1 (2x - 1) \cdot e^x dx \end{array}$$

Mezivýsledky — neurčitě integrály (bez konstanty c): 1) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x}$; 2) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x}$; 3) $x \sin x + \cos x$; 4) $x \cdot e^x - e^x$; 5) $x \ln x - x$; 6) $2xe^x - 3e^x$.

Výsledky: 1) 1; 2) $-\frac{4}{9}$; 3) $\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$; 4) 1; 5) 1; 6) $3 - e$.

Substituce pro určitý integrál

Schematicky:

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ dy &= g'(x) dx \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

Spočtěte určité integrály (pomocí substituce):

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^1 (2x - 1)^4 dx & 2) \int_{-1}^1 \frac{1}{(x - 3)^2} dx & 3) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^3} dx \\ 4) \int_1^3 (2 - x)^3 dx & 5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \frac{\pi}{2}) dx & 6) \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{4} dx \end{array}$$

Doporučené substituce: 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = x - 3$; 3) $y = 2x + 1$; 4) $y = 2 - x$;
5) $y = x - \frac{\pi}{2}$; 6) $y = \frac{x}{4}$.

Výsledky: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{16}$; 4) 0; 5) -1 ; 6) $2\sqrt{2}$.

Aplikace určitého integrálu

Pro f a g spojitě funkce na intervalu (a, b) je

A) obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x roven

$$\int_a^b |f(x)| \, dx;$$

B) obsah plochy omezené křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ roven

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx;$$

C) objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x roven

$$\pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx;$$

D) objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy omezené křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ kolem osy x roven

$$\left| \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx - \pi \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx \right|.$$

Vypočítejte obsah plochy "pod grafem", tj. mezi grafem dané funkce a osou x :

1) $y = 2 - x$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$

2) $y = 2x + 1$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$

3) $y = x^2 - x$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$

4) $y = x^2 - x$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$

5) $y = x^2$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$

6) $y = x^3$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$

7) $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$

8) $y = \sqrt{x} - 1$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$

Mezivýsledky — dělicí body: 1) 2; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 0 a 1; 5) 0; 6) 0; 7) nejsou; 8) 1.

Výsledky: 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{17}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{17}{3}$; 5) $\frac{16}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{16}{3}$; 8) 2.

Vypočítejte obsah plochy omezené křivkami:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = x + 6, y = x^2$ | 2) $y = x^2, y = 2x + 3$ |
| 3) $y = 1 - x^2, y = 4x + 4$ | 4) $y = x^4, y = x$ |
| 5) $y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2$ | 6) $y = \frac{x^2}{4}, y = \frac{x}{2} + 2$ |
| 7) $y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$ | 8) $y = \frac{3}{x}, y = 4 - x$ |
| 9) $y = \frac{2}{x}, y = 3 + \frac{2}{x-3}$ | 10) $y = \sqrt[3]{x}, y = x^2$ |
| 11) $y = x^3, y = \sqrt{x}$ | 12) $y = x^3, y = 4x$ |
| 13) $y = x^4, y = x^2$ | 14) $y = \sqrt[3]{x}, y = x$ |

Mezivýsledky: 1) $\int_{-2}^3 (x+6-x^2) dx$; 2) $\int_{-1}^3 (2x+3-x^2) dx$; 3) $\int_{-3}^{-1} (1-x^2-4x-4) dx$;
4) $\int_0^1 (x-x^4) dx$; 5) $\int_{-1}^2 (4-x^2-x^2+2x) dx$; 6) $\int_{-2}^4 (\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}) dx$; 7) $\int_0^3 (x^2-\frac{x^3}{3}) dx$;
8) $\int_1^3 (4-x-\frac{3}{x}) dx$; 9) $\int_1^2 (3+\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x}) dx$; 10) $\int_0^1 (\sqrt[3]{x}-x^2) dx$; 11) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^3) dx$;
12) $\int_{-2}^0 (x^3-4x) dx + \int_0^2 (4x-x^3) dx = 2 \cdot \int_0^2 (4x-x^3) dx$; 13) $\int_{-1}^0 (x^2-x^4) dx +$
 $+\int_0^1 (x^2-x^4) dx = 2 \cdot \int_0^1 (x^2-x^4) dx$; 14) $\int_{-1}^0 (x-\sqrt[3]{x}) dx + \int_0^1 (\sqrt[3]{x}-x) dx =$
 $2 \cdot \int_0^1 (\sqrt[3]{x}-x) dx$.

Výsledky: 1) $\frac{125}{6}$; 2) $\frac{32}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{10}$; 5) 9; 6) 9; 7) $\frac{9}{4}$; 8) $4 - 3 \ln 3$; 9) $3 - 4 \ln 2$;
10) $\frac{5}{12}$; 11) $\frac{5}{12}$; 12) 8; 13) $\frac{4}{15}$; 14) $\frac{1}{2}$.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané křivky kolem osy x :

- | | |
|---|--|
| 1) $y = 3x - 2, x \in \langle 1, 2 \rangle$ | 2) $y = 3x - 2, x \in \langle 0, 1 \rangle$ |
| 3) $y = 2 - x, x \in \langle 0, 3 \rangle$ | 4) $y = e^x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ |
| 5) $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 4 \rangle$ | 6) $y = \sqrt[3]{x}, x \in \langle -1, 1 \rangle$ |

Výsledky: 1) 7π ; 2) π ; 3) 3π ; 4) $\frac{\pi}{2}(e-1)$; 5) 8π ; 6) $\frac{6\pi}{5}$.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy omezené danými křivkami kolem osy x :

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = x^4, y = \sqrt{x}$ | 2) $y = x, y = x^2$ |
| 3) $y = \frac{2}{x}, y = 3 - x$ | 4) $y = \sqrt[3]{x}, y = x$ |

Mezivýsledky — meze integrálů: 1) 0, 1; 2) 0, 1; 3) 1, 2; 4) -1, 1.

Výsledky: 1) $\frac{7\pi}{18}$; 2) $\frac{2\pi}{15}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{8\pi}{15}$.