Učební texty ke konzultacím předmětu
Matematická analýza III pro kombinované studium

Konzultace třetí

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

e-mail: lsamkova@ pf.jcu.cz

webová stránka: home.pf.jcu.cz/∼lsamkova/

Nutnou podmínkou k účasti na zkoušce je odevzdání domácí práce (vypracování zadaných úloh). Z každé kapitoly učebních textů je nutno vypracovat 2 příklady.

Diferenciální rovnice — úvod

Vzorečky potřebné při úpravách:

$$\begin{array}{ll} e^{K+L} = e^K \cdot e^L & e^{-K} = \dfrac{1}{e^K} \\ \ln A + \ln B = \ln(A \cdot B) & a \cdot \ln A = \ln(A^a) \\ -\ln A = \ln(\dfrac{1}{A}) & e^{\ln A} = A \end{array}$$

(plus podmínky: K, $L \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$; A, $B > 0$.)

Je-li $A = e^B$, pak $B = \ln A$ za podmínky $A > 0$. Je-li $A = \ln B$, pak $B = e^A$ za podmínky $B > 0$.

Je-li $A = \sqrt{B}$, pak $B = A^2$ za podmínek $A \geqq 0$, $B \geqq 0$. Je-li $A = B^2$, pak $|B| = \sqrt{A}$, neboli $B = \pm\sqrt{A}$, za podmínky $A \geqq 0$.

Z následujících rovnic vyjádřete proměnnou y. Určete, pro jaká x mají rovnice smysl.

1) $\ln y = x - 3$	2) $\ln\|y\| = x + 3$	3) $e^y = 2x - 7$
4) $y^2 = x^2 - 4$	5) $\dfrac{1}{y^2} = x - 2$	6) $\dfrac{1}{y^3} = x - 2$
7) $\sqrt{y} = 5x + 15$	8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}} = x + 1$	9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{1}{x}$
10) $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$	11) $e^{-y} = 5 - x$	12) $-e^y = 5 - x$
13) $e^{1-y} = x - 3$	14) $3e^y = x + 2$	15) $\dfrac{1}{2}\ln y = x - 1$
16) $3\ln y = x + 3$	17) $-\ln y = x^2 + 3$	18) $1 - \ln y = x$
19) $y^3 = \ln x + 1$	20) $y^3 = \dfrac{1}{\ln x + 1}$	21) $y^2 = 1 - \ln x$
22) $e^y = e^{-x} + 3$	23) $e^y = e^{-x} - 1$	24) $\ln(2y + 3) = x^2$
25) $\ln y = \ln x + 2$	26) $\ln\|y\| = 2\ln\|x\| - 3$	27) $\ln\|y\| = -\ln\|x\| - 3$

Výsledky: 1) $y = e^{x-3}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = \pm e^{x+3}$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $y = \ln(2x - 7)$, $x \in (\frac{7}{2}, \infty)$; 4) $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$; 5) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $x \in (2, \infty)$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; 7) $y = (5x + 15)^2$, $x \in \langle -3, \infty)$; 8) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, \infty)$; 9) $y = x^3$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; 10) $y = (\sqrt{x} - 1)^2$, $x \in \langle 1, \infty)$; 11) $y = -\ln(5 - x)$, $x \in (-\infty, 5)$; 12) $y = \ln(x - 5)$, $x \in (5, \infty)$; 13) $y = 1 - \ln(x - 3)$, $x \in (3, \infty)$; 14) $y = \ln(\frac{x+2}{3})$, $x \in (-2, \infty)$; 15) $y = e^{2x-2}$, $x \in \mathbb{R}$; 16) $y = e^{\frac{x}{3}+1}$, $x \in \mathbb{R}$; 17) $y = e^{-x^2-3}$, $x \in \mathbb{R}$; 18) $y = e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$; 19) $y = \sqrt[3]{\ln x + 1}$, $x \in (0, \infty)$; 20) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x+1}}$, $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$; 21) $y = \pm\sqrt{1 - \ln x}$, $x \in (0, e\rangle$; 22) $y = \ln(e^{-x} + 3)$, $x \in \mathbb{R}$; 23) $y = \ln(e^{-x} - 1)$, $x \in (-\infty, 0)$; 24) $y = \frac{e^{x^2} - 3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$; 25) $y = x \cdot e^2$, $x \in (0, \infty)$; 26) $y = \pm\frac{x^2}{e^3}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; 27) $y = \pm\frac{1}{e^3 \cdot x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Diferenciální rovnice — základní postup

V diferenciálních rovnicích je y funkcí x, tj. $y = y(x)$. Pro zjednodušení zápisu se však píše pouze y.

Řešením diferenciální rovnice

$$y' = f(x)$$

jsou všechny primitivní funkce k funkci f, tj.

$$y = F(x) + c,$$

kde $F' = f$ a $c \in \mathbb{R}$. Neboli

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{včetně konstanty } c \in \mathbb{R}.$$

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$\begin{array}{llllll} 1) & y' = x^3 - \cos x & 2) & y' = \operatorname{cotg} x & 3) & y' = \cos^3 x \\ 4) & y' = \dfrac{1}{x} - x^2 & 5) & y' = \sqrt{x} \cdot \ln x & 6) & y' = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x} \end{array}$$

Výsledky: 1) $\frac{x^4}{4} - \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 2) $\ln|\sin x| + c$, $x \neq k\pi$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 4) $\ln|x| - \frac{x^3}{3} + c$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c$, $x \in (0,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$; 6) $-\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$, $x \in (0,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

Metoda separace proměnných

Touto metodou se dají řešit rovnice upravitelné na tvar

$$g(y) \cdot y' = f(x).$$

Řešením jsou všechny funkce y vyhovující rovnici

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{včetně konstanty } c \in \mathbb{R}.$$

Pokud tedy F je primitivní funkcí k f a G je primitivní funkcí k g, potom řešením diferenciálí rovnice jsou funkce y splňující rovnici

$$G(y) = F(x) + c$$

pro $c \in \mathbb{R}$. Odtud

$$y = G_{-1}(F(x) + c).$$

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice (metodou separace proměnných):

1) $y' = 3y$ 2) $\dfrac{y'}{y} = -3$ 3) $y' = 3x^2 \cdot y$

4) $y' \cdot y^2 = \sin x$ 5) $\dfrac{y'}{y-2} = \dfrac{1}{x}$ 6) $y' = \dfrac{2y}{x}$

7) $x \cdot y' = -y$ 8) $x^2 \cdot y' = y^2$ 9) $y - x \cdot y' = 1 + x^2 \cdot y'$

Výsledky: 1) $y = K \cdot e^{3x}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = K \cdot e^{-3x}$, $K \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $y = K \cdot e^{x^3}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $y = \sqrt[3]{3c - 3\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $y = K \cdot x + 2$, $K \neq 0$, $x \neq 0$; 6) $y = K \cdot x^2$, $K \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$; 7) $y = \frac{K}{x}$, $K \neq 0$, $x \neq 0$, a $y \equiv 0$; 8) $y = \frac{x}{1-c\cdot x}$, $c \neq 0$, $x \neq \frac{1}{c}$, a $y = x$, $x \in \mathbb{R}$; 9) $y = K \cdot \frac{x}{x+1} + 1$, $K \neq 0$, $x \neq -1$, a $y \equiv 1$.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice (metodou separace proměnných), které vyhovuje počáteční podmínce a) $y(\pi) = -1$, b) $y(0) = 0$:

1) $y' = y \cdot \cos x$ 2) $y' = y \cdot \sin x$ 3) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$

4) $y' = y \cdot \operatorname{cotg} x$ 5) $y' = \dfrac{\sin x}{y}$ 6) $y' = \dfrac{\sin x}{y^2}$

Výsledky: 1a) $y = -e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y \equiv 0$; 2a) $y = -e^{-1-\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y \equiv 0$; 3a) $y = \frac{1}{\cos x}$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; b) $y = 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; 4a) neexistuje (v zadání nelze dosadit $x = \pi$); b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $x = 0$);
5a) $y = -\sqrt{-1 - 2\cos x}$, $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$; b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $y = 0$);
6a) $y = \sqrt[3]{-4 - 3\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$; b) neexistuje (v zadání nelze dosadit $y = 0$).

Integrační faktor

Metodou integračního faktoru lze řešit diferenciální rovnice tvaru

$$y' + a(x) \cdot y = b(x).$$

Integrační faktor se nazývá funkce

$$e^{A(x)}$$

kde A je (libovolná) primitivní funkce k funkci a, tedy $A' = a$. Potom

$$(y \cdot e^{A(x)})' = e^{A(x)} \cdot (y' + a(x) \cdot y) = e^{A(x)} \cdot b(x).$$

Odtud se již snadno vyjádří

$$y \cdot e^{A(x)} = \int e^{A(x)} \cdot b(x) \, \mathrm{d}x,$$

a tedy

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x) \, \mathrm{d}x.$$

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice. Použijte integrační faktor.

1) $y' + 5y = e^{2x}$	2) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$
3) $y' + y = e^{-x} \cdot \sin x$	4) $y' - \dfrac{1}{x} \cdot y = x$
5) $y' + \dfrac{3}{x} \cdot y = \dfrac{2}{x^3}$	6) $y' + x \cdot y = 2x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$
7) $y' + \dfrac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$	8) $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 3 \sin^2 x$

Mezivýsledky — integrační faktor: 1) e^{5x}; 2) x; 3) e^x; 4) $\frac{1}{x}$; 5) x^3; 6) $e^{\frac{x^2}{2}}$; 7) $e^{-\frac{1}{x}}$; 8) $\cos x$.

Výsledky: 1) $c \cdot e^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 2) $x^2 + \frac{c}{x}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $e^{-x} \cdot (c - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 4) $x^2 + c \cdot x$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{x^2} + \frac{c}{x^3}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 6) $e^{\frac{x^2}{2}} + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; 7) $(x + c) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; 8) $\frac{c + \sin^3 x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $c \in \mathbb{R}$.

K rovnicím z minulého odstavce najděte partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$. Pokud takové řešení neexistuje, najděte partikulární řešení vyhovující podmínce $y(1) = 0$.

Výsledky: 1) $\frac{6}{7} \cdot e^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) neexistuje; $x^2 - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; 3) $e^{-x} \cdot (2 - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$; 4) neexistuje; $x^2 - x$, $x \neq 0$; 5) neexistuje; $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$; 6) $e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$; 7) neexistuje; $(x - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$; 8) $\frac{1 + \sin^3 x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Budeme řešit rovnici

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

kde p, $q \in \mathbb{R}$.

Nejprve najdeme tzv. charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

což je kvadratická rovnice.

Má-li charakteristická rovnice dvě reálná řešení (dva kořeny) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak všechna řešení diferenciální rovnice mají tvar

$$y = A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x}$$

kde A, B, $x \in \mathbb{R}$.

Má-li charakteristická rovnice jedno reálné řešení (dvojnásobný kořen) λ_1, pak všechna řešení diferenciální rovnice mají tvar

$$y = A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}$$

kde A, B, $x \in \mathbb{R}$.

Má-li charakteristická rovnice dvě komplexní řešení $\alpha \pm \beta i$, pak všechna řešení diferenciální rovnice mají tvar

$$y = A \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + B \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

kde A, B, $x \in \mathbb{R}$.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

1)	$y'' + 3y' + 2y = 0$	2)	$y'' - 3y' + 2y = 0$
3)	$y'' - 2y' + y = 0$	4)	$y'' - 4y' + 5y = 0$
5)	$y'' + 9y = 0$	6)	$y'' - 9y = 0$
7)	$y'' - 9y' = 0$	8)	$y'' + y = 0$

Mezivýsledky — kořeny charakteristické rovnice: 1) -2, -1; 2) 1, 2; 3) 1 (dvojnás.); 4) $2 \pm i$; 5) $\pm 3i$; 6) ± 3; 7) 0, 9; 8) $\pm i$.

Výsledky: 1) $A \cdot e^{-2x} + B \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 2) $A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{x}$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 3) $A \cdot e^{x} + B \cdot x \cdot e^{x}$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 4) $A \cdot e^{2x} \cdot \cos x + B \cdot e^{2x} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 5) $A \cdot \cos(3x) + B \cdot \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 6) $A \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 7) $A + B \cdot e^{9x}$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$; 8) $A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}$.