

4. Cvičení

Spočtěte integrály (pomocí 2. substituce):

- | | |
|---|--|
| 1) $\int \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx$ | 2) $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} dx$ |
| 3) $\int \frac{1}{(2 + x) \cdot \sqrt{1 + x}} dx$ | 4) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ |
| 5) $\int \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} dx$ | 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{3 + \sqrt[3]{x}} dx$ |
| 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} - 1)} dx$ | 8) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$ |
| 9) $\int \frac{1}{e^x - 2} dx$ | 10) $\int \frac{1}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx$ |
| 11) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + e^x}} dx$ | 12) $\int \frac{1}{2 + e^{-x}} dx$ |

Výsledky: 1) $2\sqrt{x} - 4 \ln(\sqrt{x} + 2) + c, x > 0$; 2) $x - 2\sqrt{x} + 6 \ln(\sqrt{x} + 3) + c, x > 0$; 3) $2 \arctg(\sqrt{1 + x}) + c, x > -1$; 4) $\ln|\sqrt{x+1} - 1| - \ln(\sqrt{x+1} + 1) + c, x > -1, x \neq 0$; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 12 \ln|\sqrt[3]{x} + 2| + c, x \neq -8$; 6) $x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 9\sqrt[3]{x} - 27 \ln|\sqrt[3]{x} + 3| + c, x \neq -27$; 7) $4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|\sqrt[4]{x} - 1| + c, x > 0, x \neq 1$; 8) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c, x > 0$; 9) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln|e^x - 2| + c, x \neq \ln 2$; 10) $\frac{1}{2}x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2} \ln(e^x + 2) + c, x \in \mathbb{R}$; 11) $\frac{1}{2} \ln(\sqrt{4 + e^x} - 2) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{4 + e^x} + 2) + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $\frac{1}{2} \ln(2 + e^{-x}) + \frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$.

Spočtěte určité integrály:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\int_0^1 x^3 dx$ | 2) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$ | 3) $\int_{-1}^1 (x^2 - x) dx$ |
| 4) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ | 5) $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$ | 6) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 7) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 8) $\int_2^3 \frac{1}{x^3} dx$ | 9) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ |
| 10) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx$ | 11) $\int_0^5 e^x dx$ | 12) $\int_{-2}^2 e^{-x} dx$ |
| 13) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ | 14) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ | 15) $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x} dx$ |
| 16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ | 17) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ | 18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ |

19) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$	20) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) \, dx$	21) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x) \, dx$
22) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$	23) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \, dx$	24) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(4x) \, dx$
25) $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \, dx$	26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \, dx$	27) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$
28) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	29) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$	30) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cotg} x \, dx$
31) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$	32) $\int_1^3 \frac{1}{x^2(x+1)} \, dx$	33) $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x-3)} \, dx$
34) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+x-6} \, dx$	35) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x-2} \, dx$	36) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Mezivýsledky: 1) $[\frac{x^4}{4}]_0^1$; 2) $[\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^1$; 3) $[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^1$; 4) $[\frac{2}{3}x\sqrt{x}]_0^4$; 5) $[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}]_{-1}^8$; 6) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_0^8$; 7) $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}]_{-1}^0$; 8) $[-\frac{1}{2x^2}]_2^3$; 9) $[-\frac{1}{2x^2}]_0^1$; 10) $[-\frac{1}{2x^2}]_{-1}^0$; 11) $[e^x]_0^5$; 12) $[-e^{-x}]_{-2}^2$; 13) $[\ln|x|]_1^e$; 14) $[\ln|x|]_0^1$; 15) $[\ln|x|]_{-4}^{-3}$; 16) $[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 17) $[\sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 18) $[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$; 19) $[-\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; 20) $[\frac{1}{2}\sin(2x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 21) $[\frac{1}{3}\sin(3x)]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$; 22) $[-2\cos(\frac{x}{2})]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$; 23) $[-\cos(x + \frac{\pi}{3})]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$; 24) $[\frac{1}{4}\sin(4x)]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$; 25) $[-\frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{6})]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$; 26) $[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{6}}$; 27) $[\operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 28) $[-\operatorname{cotg} x]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 29) $[-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 30) $[\ln|\sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$; 31) $[\arctg x]_0^1$; 32) $[-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|]_1^3$; 33) $[\frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|]_2^2$; 34) $[\frac{2}{5}\ln|x+3| + \frac{3}{5}\ln|x-2|]_{-1}^1$; 35) $[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln|x-2|]_{-1}^1$; 36) $[\arcsin x]_{-1}^1$.

Výsledky: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{16}{3}$; 5) $\frac{45}{4}$; 6) 6; 7) $-\frac{3}{2}$; 8) $\frac{5}{72}$; 9) $+\infty$; 10) $-\infty$; 11) $e^5 - 1$; 12) $e^2 - \frac{1}{e^2}$; 13) 1; 14) $+\infty$; 15) $\ln\frac{3}{4}$; 16) 1; 17) $\sqrt{2}$; 18) 1; 19) 0; 20) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 21) $\frac{1}{3}$; 22) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 24) 0; 25) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 26) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; 27) 1; 28) $+\infty$; 29) $\ln\sqrt{2}$; 30) $+\infty$; 31) $\frac{\pi}{4}$; 32) $\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3}$; 33) $-\frac{1}{2}\ln 3$; 34) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{27}$; 35) $\frac{26}{3} - 8\ln 3$; 36) π .

Spočtěte určité integrály:

1) $\int_0^{\infty} x^3 \, dx$	2) $\int_{-\infty}^0 x^3 \, dx$	3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \, dx$
4) $\int_0^{\infty} (x^2 + 1) \, dx$	5) $\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) \, dx$	6) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1) \, dx$
7) $\int_0^{\infty} (x^2 - x) \, dx$	8) $\int_{-\infty}^0 (x^2 - x) \, dx$	9) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - x) \, dx$
10) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx$	11) $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} \, dx$	12) $\int_{-\infty}^0 \sqrt[3]{x} \, dx$

13) $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[3]{x} dx$	14) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$	15) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
16) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$	17) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$	18) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$
19) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$	20) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3} dx$	21) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$
22) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$	23) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$	24) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4} dx$
25) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$	26) $\int_0^{\infty} e^x dx$	27) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
28) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$	29) $\int_0^{\infty} 2^{-x} dx$	30) $\int_{-\infty}^0 2^{-x} dx$
31) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$	32) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$	33) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} dx$
34) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$	35) $\int_0^{\infty} \cos x dx$	36) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx$
37) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$	38) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$	39) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$
40) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$	41) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$	42) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$
43) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1} dx$	44) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2-1} dx$	45) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$
46) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$	47) $\int_0^1 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$	48) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

Mezivýsledky — neurčité integrály (bez konstanty c): 1) $\frac{x^4}{4}$; 4) $\frac{x^3}{3} + x$; 7) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$; 10) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; 12) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$; 14) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 17) $-\frac{1}{2x^2}$; 21) $-\frac{1}{3x^3}$; 26) e^x ; 29) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}$; 31) $\ln|x|$; 35) $\sin x$; 37) $-\cos x$; 38) $\arctg x$; 41) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$; 46) $-\frac{1}{x} + \ln|x+1| - \ln|x|$.

Výsledky: 1) ∞ ; 2) $-\infty$; 3) neexistuje (diverguje); 4) ∞ ; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) ∞ ; 8) ∞ ; 9) ∞ ; 10) ∞ ; 11) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 12) $-\infty$; 13) neexistuje (diverguje); 14) ∞ ; 15) $-\infty$; 16) neexistuje (fce není definována na celém intervalu); 17) $\frac{1}{2}$; 18) $-\frac{1}{2}$; 19) ∞ ; 20) $-\infty$; 21) $\frac{1}{24}$; 22) $\frac{1}{3}$; 23) ∞ ; 24) ∞ ; 25) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 26) ∞ ; 27) 1; 28) ∞ ; 29) $\frac{1}{\ln 2}$; 30) ∞ ; 31) ∞ ; 32) ∞ ; 33) $-\infty$; 34) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 35) neexistuje (diverguje); 36) neexistuje (diverguje); 37) neexistuje (diverguje); 38) $\frac{\pi}{2}$; 39) $\frac{3\pi}{4}$; 40) π ; 41) $\frac{1}{2}\ln 3$; 42) ∞ ; 43) $-\infty$; 44) $\frac{1}{2}\ln 2$; 45) neexistuje (funkce není definována na celém intervalu); 46) $1 - \ln 2$; 47) ∞ ; 48) ∞ .