

6. Cvičení

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané křivky kolem osy x :

1) $y = 3x - 2, x \in \langle 1, 2 \rangle$

2) $y = 3x - 2, x \in \langle 0, 1 \rangle$

3) $y = 2 - x, x \in \langle 0, 3 \rangle$

4) $y = e^x, x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

5) $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 4 \rangle$

6) $y = \sqrt[3]{x}, x \in \langle -1, 1 \rangle$

7) $y = \frac{1}{\sin x}, x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle$

8) $y = \frac{1}{\cos x}, x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$

Výsledky: 1) 7π ; 2) π ; 3) 3π ; 4) $\frac{\pi}{2}(e - 1)$; 5) 8π ; 6) $\frac{6\pi}{5}$; 7) π ; 8) $\pi \cdot (\sqrt{3} - 1)$.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy omezené danými křivkami kolem osy x :

1) $y = x^4, y = \sqrt{x}$

2) $y = x, y = x^2$

3) $y = \frac{2}{x}, y = 3 - x$

4) $y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$

5) $y = x + 2, y = x^2$

Mezivýsledky — meze integrálů: 1) 0, 1; 2) 0, 1; 3) 1, 2; 4) 0, 1; 5) -1, 2.

Výsledky: 1) $\frac{7\pi}{18}$; 2) $\frac{2\pi}{15}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{5}$; 5) $\frac{72\pi}{5}$.

Vypočítejte a) objem elipsoidu, který vznikne rotací křivky $y = \sqrt{36 - 9x^2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$, kolem osy x ;

b) objem rotačního paraboloidu, který vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$, kolem osy x .

Výsledky: a) 96π ; b) 8π .

Vypočítejte délku křivky dané předpisem:

1) $y = 2x + 3, x \in \langle 1, 2 \rangle$

2) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, x \in \langle 0, 3 \rangle$

3) $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, x \in \langle 0, 1 \rangle$

4) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle$

5) $y = \frac{1}{2}(\ln(\sin x) + \ln(\cos x)), x \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $\int_1^2 \sqrt{5} \, dx$; 2) $\int_0^3 \sqrt{x+1} \, dx$; 3) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \, dx$;
4) $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} \, dx$; 5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (\cotg x + \tg x) \, dx$.

Výsledky: 1) $\sqrt{5}$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $4 - 2\sqrt{2}$; 5) $\ln \sqrt{3}$.

Určete povrch rotační plochy vzniklé tak, že kolem osy x rotuje křivka daná předpisem:

- 1) $y = \sqrt{4x}$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$ 2) $y = 2\sqrt{x+1}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$
3) $y = 2x + 1$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$

Mezivýsledky — integrály: 1) $2\pi \int_0^3 2\sqrt{x+1} \, dx$; 2) $2\pi \int_0^1 2\sqrt{x+2} \, dx$;
3) $2\pi \int_0^2 \sqrt{5}(2x+1) \, dx$.

Výsledky: 1) $\frac{56\pi}{3}$; 2) $\frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$; 3) $12\sqrt{5}\pi$.