

3. cvičení

Spočtěte integrály (pomocí per partes a 1. substituce):

$$\begin{array}{ll}
 1) \int x \cdot \cos(\pi x) \, dx & 2) \int \cos x \cdot e^{-x} \, dx \\
 3) \int \ln(3x+2) \, dx & 4) \int (x+1)^2 \cdot e^{2x} \, dx \\
 5) \int x \cdot \sin(1-2x) \, dx & 6) \int (1-x) \cdot e^{-x} \, dx \\
 7) \int e^{2x} \cdot \cos(3x) \, dx & 8) \int \operatorname{arctg} x \, dx \\
 9) \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx & 10) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx \\
 11) \int x^3 \cdot \sin(x^2) \, dx & 12) \int x^3 \cdot e^{-x^2} \, dx
 \end{array}$$

Výsledky: 1) $\frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + c, x \in \mathbb{R}$; 2) $\frac{1}{2} e^{-x} \sin x - \frac{1}{2} e^{-x} \cos x + c, x \in \mathbb{R}$; 3) $x \ln(3x+2) - x + \frac{2}{3} \ln(3x+2) + c, x > -\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 + 2x + 1) + c, x \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{1}{2} x \cos(1-2x) + \frac{1}{4} \sin(1-2x) + c, x \in \mathbb{R}$; 6) $x e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$; 7) $\frac{2}{13} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{13} e^{2x} \sin(3x) + c, x \in \mathbb{R}$; 8) $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, x \in \mathbb{R}$; 9) $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 10) $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + c, x > 1$; 11) $-\frac{1}{2} x^2 \cos(x^2) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + c, x \in \mathbb{R}$; 12) $-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c, x \in \mathbb{R}$.

Rozložte na parciální zlomky:

$$\begin{array}{lll}
 \boxed{1} \quad \frac{5}{(x-3)(x+2)} & \boxed{2} \quad \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} & \boxed{3} \quad \frac{5x+4}{x(x+1)} \\
 \boxed{4} \quad \frac{x-4}{x(x+2)} & \boxed{5} \quad \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} & \boxed{6} \quad \frac{16}{(x-7)(x+1)} \\
 \boxed{7} \quad \frac{2}{x(3x+2)} & \boxed{8} \quad \frac{x}{(x+1)(2x+1)} & \boxed{9} \quad \frac{x}{(2x-1)(3x-1)}
 \end{array}$$

Výsledky: $\boxed{1} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}, x \neq 3, x \neq -2$; $\boxed{2} -\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}, x \neq \pm 1$; $\boxed{3} \frac{4}{x} + \frac{1}{x+1}, x \neq 0, x \neq -1$; $\boxed{4} -\frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}, x \neq 0, x \neq -2$; $\boxed{5} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}, x \neq 2, x \neq -1$; $\boxed{6} \frac{2}{x-7} - \frac{2}{x+1}, x \neq 7, x \neq -1$; $\boxed{7} \frac{1}{x} - \frac{3}{3x+2}, x \neq 0, x \neq -\frac{2}{3}$; $\boxed{8} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}, x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$; $\boxed{9} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x-1}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{3}$.

Spočtete integrály (pomocí rozkladu na parciální zlomky):

$$\begin{array}{ll}
 1) \int \frac{5x+7}{x^2+2x-3} dx & 2) \int \frac{5x-3}{x^2-5x+6} dx \\
 3) \int \frac{x-2}{x^2-9} dx & 4) \int \frac{3x+1}{x^2-2x-3} dx \\
 5) \int \frac{1}{x^2+2x-3} dx & 6) \int \frac{1+x^2}{1-x^2} dx \\
 7) \int \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx & 8) \int \frac{x^3}{x^2+3x+2} dx \\
 9) \int \frac{x^5}{x^2+x-2} dx & 10) \int \frac{8x}{x^2-3x+2} dx \\
 11) \int \frac{2x+1}{x^3+2x^2} dx & 12) \int \frac{x^3-8}{x^2-3x+2} dx \\
 13) \int \frac{x^3}{x^2-1} dx & 14) \int \frac{x^3-1}{(x-1)^2} dx
 \end{array}$$

Rozklad na zlomky: 1) $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{12}{x-3} + \frac{-7}{x-2}$; 3) $\frac{\frac{1}{6}}{x-3} + \frac{\frac{5}{6}}{x+3}$; 4) $\frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$;
 5) $\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$; 6) $-1 + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; 7) $\frac{-\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{15}}{x+2} + \frac{\frac{1}{10}}{x-3}$; 8) $x-3 + \frac{8}{x+2} + \frac{-1}{x+1}$;
 9) $x^3 - x^2 + 3x - 5 + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{32}{3}}{x+2}$; 10) $\frac{16}{x-2} + \frac{-8}{x-1}$; 11) $\frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{3}{4}}{x} + \frac{-\frac{3}{4}}{x+2}$; 12) $x+3 + \frac{7}{x-1}$;
 13) $x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$; 14) $x+2 + \frac{3}{x-1}$.

Výsledky: 1) $2 \ln|x+3| + 3 \ln|x-1| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$; 2) $12 \ln|x-3| - 7 \ln|x-2| + c$,
 $x \neq 2$, $x \neq 3$; 3) $\frac{1}{6} \ln|x-3| + \frac{5}{6} \ln|x+3| + c$, $x \neq \pm 3$; 4) $\frac{5}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$,
 $x \neq -1$, $x \neq 3$; 5) $\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + c$, $x \neq -3$, $x \neq 1$;
 6) $-x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$, $x \neq \pm 1$; 7) $\frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln|x-3| + c$,
 $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq 3$; 8) $\frac{x^2}{2} - 3x + 8 \ln|x+2| - \ln|x+1| + c$, $x \neq -2$, $x \neq -1$;
 9) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{32}{2} \ln|x+2| + c$, $x \neq -2$, $x \neq 1$;
 10) $16 \ln|x-2| - 8 \ln|x-1| + c$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; 11) $-\frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{3}{4} \ln|x| + c$, $x \neq -2$,
 $x \neq 0$; 12) $\frac{x^2}{2} + 3x + 7 \ln|x-1| + c$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; 13) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1|$,
 $x \neq \pm 1$; 14) $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x-1|$, $x \neq 1$.