1. cvičení

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde a_n je rovno:

1	$2n+7$	**2**	2^{n-3}	**3**	n^2+n-4
4	$\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$	**5**	$\cos\left((2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$	**6**	$\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$
7	$\frac{3n}{n+2}$	**8**	$(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$	**9**	$(-1)^{n+1}\cdot(4-n)$
10	$\left[\frac{n}{2}\right]$	**11**	$[\sqrt{n}]$	**12**	$[\sqrt{3n}]$

a) Vypište prvních 5 členů posloupnosti.
b) Určete stý člen posloupnosti.
c) Určete a_{n+1}, a_{2n}, a_{n-1}.

Výsledky **a)**: $\boxed{1}$ $9, 11, 13, 15, 17$; $\boxed{2}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; $\boxed{3}$ $-2, 2, 8, 16, 26$; $\boxed{4}$ $0, -1, 0, 1, 0$; $\boxed{5}$ $0, 0, 0, 0, 0$; $\boxed{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{7}$ $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, 2, \frac{15}{7}$; $\boxed{8}$ $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$; $\boxed{9}$ $3, -2, 1, 0, -1$; $\boxed{10}$ $0, 1, 1, 2, 2$; $\boxed{11}$ $1, 1, 1, 2, 2$; $\boxed{12}$ $1, 2, 3, 3, 3$.
Výsledky **b)**: $\boxed{1}$ 207; $\boxed{2}$ 2^{97}; $\boxed{3}$ 10096; $\boxed{4}$ 1; $\boxed{5}$ 0; $\boxed{6}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{7}$ $\frac{150}{51}$; $\boxed{8}$ $\frac{100}{101}$; $\boxed{9}$ 96; $\boxed{10}$ 50; $\boxed{11}$ 10; $\boxed{12}$ 17.
Výsledky **c)**: $\boxed{1}$ $2n+9,\ 4n+7,\ 2n+5$; $\boxed{2}$ $2^{n-2},\ 2^{2n-3},\ 2^{n-4}$; $\boxed{3}$ $n^2+3n-2,\ 4n^2+2n-4,\ n^2-n-4$; $\boxed{4}$ $\cos\left((n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \cos(n\pi),\ \cos\left((n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; $\boxed{5}$ $\cos\left((2n+3)\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left((4n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; $\boxed{6}$ $\sin\left((n+1)\cdot\frac{\pi}{3}\right),\ \sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right),\ \sin\left((n-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)$; $\boxed{7}$ $\frac{3n+3}{n+3},\ \frac{3n}{n+1},\ \frac{3n-3}{n+1}$; $\boxed{8}$ $(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2},\ \frac{2n}{2n+1},\ (-1)^{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$; $\boxed{9}$ $(-1)^n\cdot(3-n),\ 2n-4,\ (-1)^n\cdot(5-n)$; $\boxed{10}$ $\left[\frac{n+1}{2}\right],\ n,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]$; $\boxed{11}$ $[\sqrt{n+1}],\ [\sqrt{2n}],\ [\sqrt{n-1}]$; $\boxed{12}$ $[\sqrt{3n+3}],\ [\sqrt{6n}],\ [\sqrt{3n-3}]$.

K následujícím výpisům prvních pěti členů nekonečné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ najděte obecný předpis pro n-tý člen, kterému vypsané členy vyhovují:

1	$3, 6, 9, 12, 15$	**2**	$7, 11, 15, 19, 23$	**3**	$1, 6, 11, 16, 21$
4	$-1, 6, -11, 16, -21$	**5**	$17, 14, 11, 8, 5$	**6**	$2, 1, 0, -1, -2$
7	$5, 1, -3, -7, -11$	**8**	$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$	**9**	$\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, -\frac{4}{9}, \frac{5}{11}$
10	$6, 12, 24, 48, 96$	**11**	$3, 6, 12, 24, 48,$	**12**	$48, 24, 12, 6, 3$
13	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$	**14**	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	**15**	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}$
16	$1, -1, 1, -1, 1$	**17**	$-1, 1, -1, 1, -1$	**18**	$1, -1, -1, 1, 1$
19	$1, 0, 1, 0, 1$	**20**	$1, 4, 9, 16, 25$	**21**	$1, -8, 27, -64, 125$
22	$1, 1, 2, 2, 3$	**23**	$1, 1, 1, 2, 2$	**24**	$2, 3, 3, 4, 5$

Výsledky (řešení je samozřejmě nekonečně mnoho, u každého příkladu najdete pouze jedno nebo dvě nejjednodušší): **1** $3n$; **2** $4n+3$; **3** $5n-4$; **4** $(-1)^n \cdot (5n-4)$; **5** $20-3n$; **6** $3-n$; **7** $9-4n$; **8** $\frac{n}{2n+1}$; **9** $(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n+1}$; **10** $3 \cdot 2^n$; **11** $3 \cdot 2^{n-1}$; **12** $3 \cdot 2^{5-n}$; **13** 3^{3-n}; **14** $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5^{1-n}$; **15** $\frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$; **16** $(-1)^{n+1} = \sin\left((2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; **17** $(-1)^n = \sin\left((2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; **18** $(-1)^{[\frac{n}{2}]} = \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) + \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \cdot \sin(n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$; **19** $\max((-1)^{n+1}, 0) = |\sin(n \cdot \frac{\pi}{2})|$; **20** n^2; **21** $(-1)^{n+1} \cdot n^3$; **22** $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ nebo $\left[\ \sqrt{2n-1}\ \right]$; **23** $\left[\frac{n+2}{3}\right]$ nebo $\left[\ \sqrt{n}\ \right]$; **24** $\left[\ \sqrt{5n}\ \right]$.

Z následujícího seznamu vyberte posloupnosti, které jsou aritmetické či geometrické. Každá posloupnost je dána předpisem pro n-tý člen:

1 $3n-5$	**2** $12-5n$	**3** n^2-2n+1	**4** $(n+2)^2-n^2$
5 $\dfrac{n+1}{n+2}$	**6** $2 \cdot 7^n$	**7** $(-1)^n \cdot \dfrac{7^n}{6^{n+1}}$	**8** $(-1)^{n+1} \cdot (2n-1)$
9 $\dfrac{4^n}{2^{2n}}$	**10** e^{-n}	**11** $5^{\frac{n}{3}}$	**12** $\dfrac{1}{\sqrt{3^n}}$
13 $\dfrac{3}{(2n+1)^n}$	**14** $\dfrac{n}{2^n}$	**15** 2^{n^2}	**16** $(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

Výsledky (A = aritmetická, G = geometrická, $\emptyset$ = žádná z možností): **1** A, $d=3$; **2** A, $d=-5$; **3** $\emptyset$; **4** A, $d=4$; **5** $\emptyset$; **6** G, $q=7$; **7** G, $q=-\frac{7}{6}$; **8** $\emptyset$; **9** A, $d=0$, ale také G, $q=1$; **10** G, $q=\frac{1}{e}$; **11** G, $q=\sqrt[3]{5}$; **12** G, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$; **13** $\emptyset$; **14** $\emptyset$; **15** $\emptyset$; **16** G, $q=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.